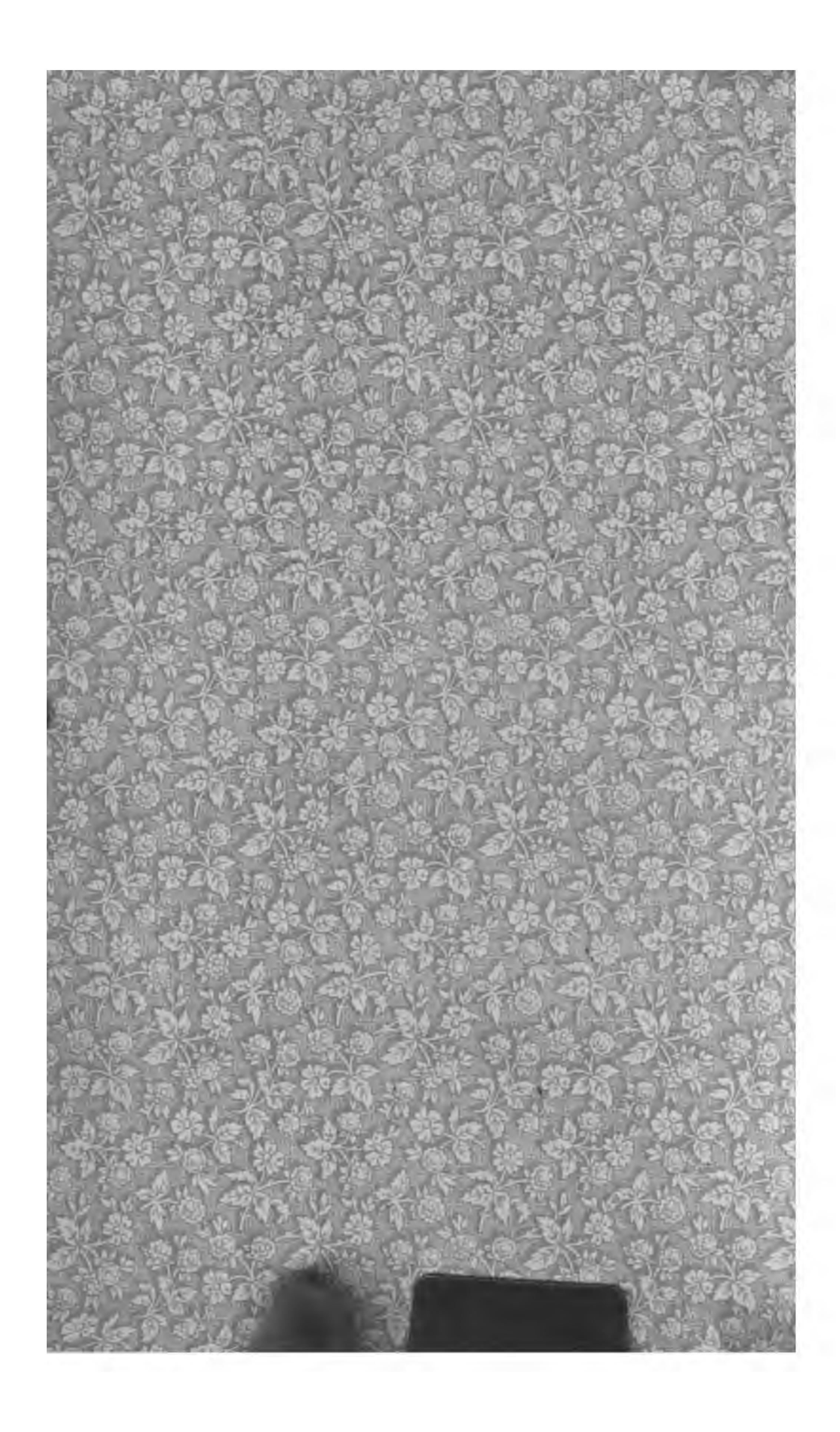
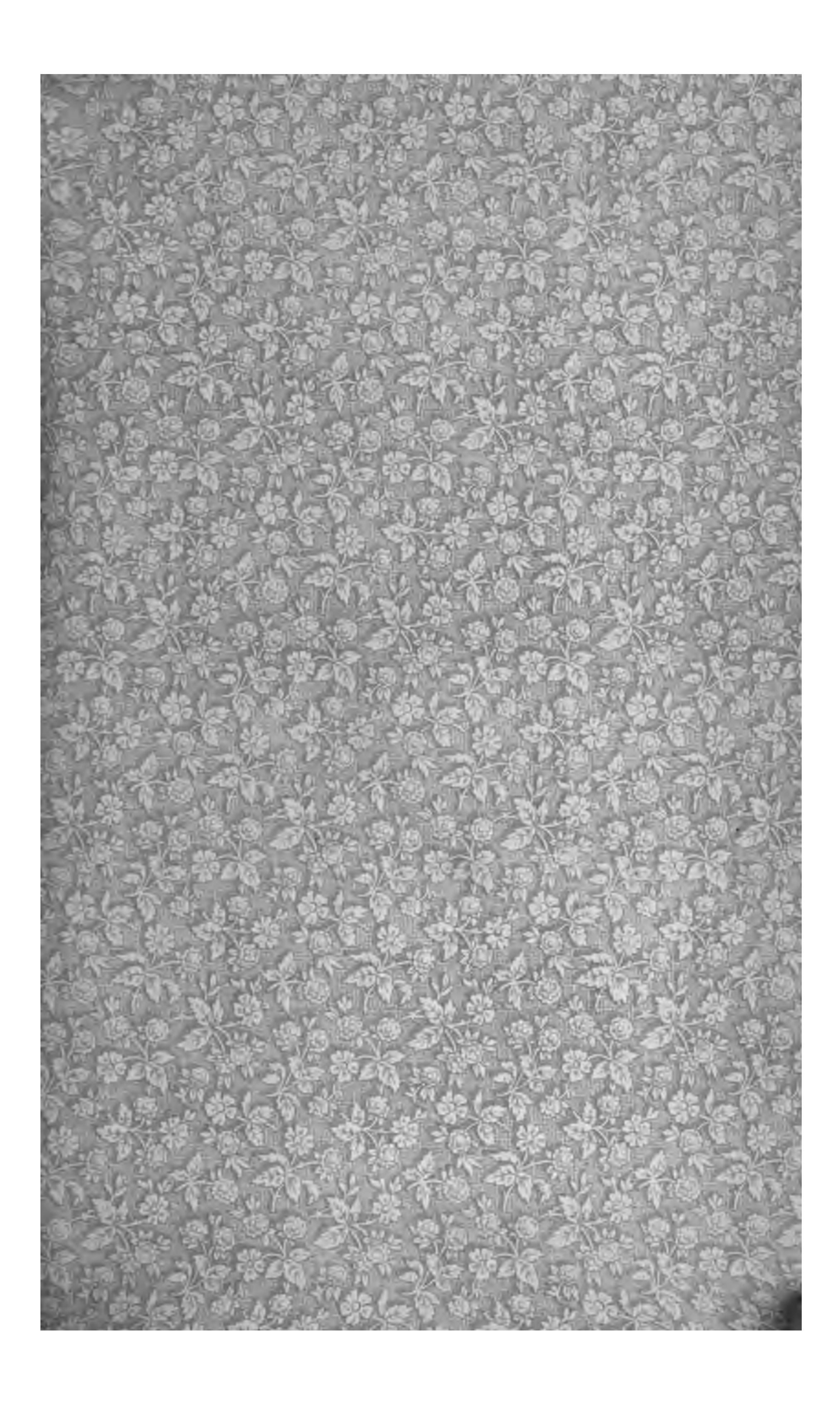






ARCHIV
DER MATHEMATIK UND PHYSIK

MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE DER LEHRER AN HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN.

GEGRÜNDET 1841 DURCH J. A. GRUNERT.

DRITTE REIHE.

HERAUSGEGEBEN

VON

E. LAMPE
IN BERLIN.

W. FRANZ MEYER
IN KÖNIGSBERG I. PR.

E. JAHNKE
IN BERLIN.

DRITTER BAND.

MIT 45 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1902.

Inhalt.

Rezensionen.

Vermischte Mitteilungen.

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

Berichtigung zu Band 3.

S. 133 vierte Zeile von unten lies six ou sept fois statt six fois.

Gleichung und Eigenschaften der Röhrenflächen.

Von V. KOMMERELL in Reutlingen.

1. *Gleichung der Röhrenflächen.* — Bonnet[1]) und Bour[2]) haben einen Weg zur Herleitung einer Fläche von gegebenen Eigenschaften in der Gaufsschen Parameterform angegeben, der im folgenden benutzt und daher zunächst kurz skizziert werden soll.[3])

Zwischen den sechs Fundamentalgröfsen E, F, G, D, D', D'', welche aus den von Gaufs in seinen bekannten Disquisitiones generales circa superficies curvas eingeführten durch Division mit $\sqrt{EG-F^2}$ hervorgehen, bestehen drei partielle Differentialgleichungen[4]), die sich aus gewissen Integrabilitätsbedingungen ergeben. Sie lauten:

$$\frac{DD''-D'^2}{\Delta^2} = \frac{1}{F}\left(\frac{\partial p'}{\partial u} - \frac{\partial p}{\partial v} + p'q' - p''q\right); \tag{1}$$

$$\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial D'}{\partial u} = p'D + (q'-p)D' - qD''; \tag{2}$$

$$\frac{\partial D''}{\partial u} - \frac{\partial D'}{\partial v} = q'D'' + (p'-q'')D' - p''D; \tag{3}$$

wo:

$$\Delta^2 = EG - F^2;$$

und:

$$\left\{\begin{aligned}
\Delta^2 p &= \tfrac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}G - \left(-\tfrac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial u}\right)F;\\
\Delta^2 p' &= \tfrac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}G - \tfrac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}F;\\
\Delta^2 p'' &= \left(-\tfrac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}\right)G - \tfrac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}F;\\
\Delta^2 q &= \left(-\tfrac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial u}\right)E - \tfrac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}F;\\
\Delta^2 q' &= \tfrac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}E - \tfrac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}F;\\
\Delta^2 q'' &= \tfrac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}E - \left(-\tfrac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}\right)F.
\end{aligned}\right. \tag{4}$$

---

1) Bonnet, Journ. Éc. Pol. Cah. **52**, 31 ff. 1867.

2) Bour, Journ. Éc. Pol. Cah. **39**, 23. 1862.

3) Vgl. hierzu: Stahl u. Kommerell, Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie. § 8.

4) Gl. (1) findet sich bei Gaufs, Disqu. gen. Art. 11 u. 12, (2) u. (3) bei Mainardi, Giornale dell' Istituto Lombardo. T. IX, 395, 1856 und Codazzi, Ann. di Mat. **2**, 273, 1868.

Nachdem durch eine passende Wahl der Parameter u und v zwei der sechs Fundamentalgröfsen bestimmt sind, bestehen zwischen den vier übrigen die drei Gleichungen (1) bis (3), nebst der die Eigenschaft der Fläche bestimmenden Gleichung, zusammen also vier, aus welchen die vier Gröfsen in Funktion von u und v zu ermitteln sind. Diese Methode ist jedoch bis jetzt nur in einfachen Fällen durchgeführt, z. B. bei Minimalflächen.[1]) Schon bei Flächen konstanter mittlerer Krümmung und konstanten Krümmungsmafses stöfst man auf partielle Differentialgleichungen, deren Integration noch nicht geleistet ist.[2]) Sind nun die Fundamentalgröfsen in der angegebenen Weise bestimmt, so sind drei Tripel partikulärer Integrale für das folgende simultane System in den abhängigen Variabeln a, a_1, a_2 zu bestimmen[3]):

$$(5)\begin{cases} \frac{\partial a}{\partial u} - (\varrho' a_1 + \sigma' a_2) = 0; & \frac{\partial a}{\partial v} - (\varrho'' a_1 + \sigma'' a_2) = 0; \\ \frac{\partial a_1}{\partial u} - (Da + pa_1 + qa_2) = 0; & \frac{\partial a_1}{\partial v} - (D'a + p'a_1 + q'a_2) = 0; \\ \frac{\partial a_2}{\partial u} - (D'a + p'a_1 + q'a_2) = 0; & \frac{\partial a_2}{\partial v} - (D''a + p''a_1 + q''a_2) = 0. \end{cases}$$

Hierbei ist:

$$(6)\qquad \begin{cases} \varrho' \Delta^2 = FD' - GD; & \sigma' \Delta^2 = FD - ED'; \\ \varrho'' \Delta^2 = FD'' - GD'; & \sigma'' \Delta^2 = FD' - ED''. \end{cases}$$

Die Integrabilitätsbedingungen des Systems (5) sind durch die Gleichungen (1) bis (3) dargestellt.

Sind x_0, x_1, x_2; y_0, y_1, y_2; z_0, z_1, z_2 drei linear unabhängige Wertsysteme (deren Determinante also nicht verschwindet), welche, für a, a_1, a_2 eingesetzt, das System befriedigen, so sind die Koordinaten x, y, z der Fläche bestimmt durch die Gleichungen:

$$(7)\qquad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = \xi_0 x_1 + \eta_0 y_1 + \zeta_0 z_1; & \frac{\partial x}{\partial v} = \xi_0 x_2 + \eta_0 y_2 + \zeta_0 z_2; \\ \frac{\partial y}{\partial u} = \xi_1 x_1 + \eta_1 y_1 + \zeta_1 z_1; & \frac{\partial y}{\partial v} = \xi_1 x_2 + \eta_1 y_2 + \zeta_1 z_2; \\ \frac{\partial z}{\partial u} = \xi_2 x_1 + \eta_2 y_1 + \zeta_2 z_1; & \frac{\partial z}{\partial v} = \xi_2 x_2 + \eta_2 y_2 + \zeta_2 z_2. \end{cases}$$

Die Konstanten ξ_0, η_0, ζ_0; ξ_1, η_1, ζ_1; ξ_2, η_2, ζ_2 unterliegen hierbei noch der Bedingung, dafs sie die Koordinaten der Endpunkte dreier konjugierten Durchmesser der folgenden Fläche 2. Ordnung sind:

$$(8)\quad M_{11}\xi^2 + M_{22}\eta^2 + M_{33}\zeta^2 + 2M_{23}\eta\zeta + 2M_{31}\zeta\xi + 2M_{12}\xi\eta = 1,$$

1) S. Grundformeln, § 12.

2) Grundformeln, § 9, Gl. (12), (13), (14).

3) Ebenda, § 7, Gl. (2).

deren Koeffizienten M_{ik} durch folgende Gleichungen bestimmt sind:

$$(9) \qquad \begin{cases} M_{11} = x_0^2 \quad + \frac{1}{\Delta^2}(Gx_1^2 + Ex_2^2 - 2Fx_1x_2); \\ M_{12} = x_0 y_0 + \frac{1}{\Delta^2}[Gx_1y_1 + Ex_2y_2 - F(x_1y_2 + y_1x_2)]. \end{cases}$$

Die vier übrigen ergeben sich durch zyklische Vertauschung von x, y, z.

Dieses hier nur in seinen Hauptpunkten und ohne Beweis angegebene Verfahren soll nun angewendet werden auf die *Flächen, für welche der eine Hauptkrümmungsradius R_1 konstant ist.* Wählen wir als Parameterkurven die Krümmungslinien, wodurch $D' = F = 0$ wird, so lassen sich die Gleichungen (1)—(3) in folgende Form bringen[1]):

$$(10) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right) = -\frac{\sqrt{EG}}{R_1R_2};$$

$$(11) \qquad \frac{\partial \lg\sqrt{E}}{\partial v} = \frac{1}{R_1(R_2 - R_1)}\frac{\partial R_1}{\partial v};$$

$$(12) \qquad \frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial u} = \frac{R_1}{R_2(R_1 - R_2)}\frac{\partial R_2}{\partial u}.$$

Ferner ist für dieses Parametersystem:

$$(13) \qquad \frac{1}{R_1} = \frac{D}{E}; \quad \frac{1}{R_2} = \frac{D''}{G}.$$

Hierzu kommt noch die Gleichung: $R_1 = \text{const.}$ Diese Konstante sei mit w bezeichnet. Gleichung (11) ergiebt dann:

$$\frac{\partial \lg\sqrt{E}}{\partial v} = 0,$$

woraus folgt, dafs E Funktion von u allein ist. Diese Funktion kann unbeschadet der Allgemeinheit gleich einer Konstante gesetzt werden[2]), also z. B.

$$(14) \qquad E = w^2.$$

Dann folgt aus (13): $D = w$. Gleichung (12) ergiebt: $\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial u} = \frac{w}{R_2(w - R_2)}\frac{\partial R_2}{\partial u}$; oder integriert: $\sqrt{G} = \frac{R_2 V}{w - R_2}$, wo die willkürliche Funktion V von v allein $= 1$ gesetzt werden kann, so dafs man hat:

$$(15) \qquad \sqrt{G} = \frac{R_2}{w - R_2};$$

1) Grundformeln, § 9, Gl. (6) u. (9).

2) Ebenda, S. 26. Note 3.

oder nach R_2 aufgelöst:

$$R_2 = \frac{w\sqrt{G}}{1+\sqrt{G}}. \tag{16}$$

Geht man mit diesem Wert in Gleichung (10) ein, so erhält man für G die partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2} = -(1+\sqrt{G}), \tag{17}$$

woraus:

$$\sqrt{G} = V_1 \cos u + V_2 \sin u - 1, \tag{18}$$

wo V_1 und V_2 willkürliche Funktionen von v allein sind. Aus (16) und (18) folgt zunächst:

$$R_2 = \frac{w(V_1 \cos u + V_2 \sin u - 1)}{V_1 \cos u + V_2 \sin u}; \tag{19}$$

und hieraus in Verbindung mit (13):

$$D = \frac{1}{w}(V_1 \cos u + V_2 \sin u - 1)(V_1 \cos u + V_2 \sin u). \tag{20}$$

Nun ist das simultane System (5) zu integrieren. Die drei links stehenden Gleichungen desselben nehmen die Form an:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial u} + \dfrac{a_1}{w} = 0; \quad \dfrac{\partial a_1}{\partial u} - wa = 0; \\ \dfrac{\partial a_2}{\partial u} - a_2 \dfrac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial u} = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Differenziert man die beiden ersten Gleichungen nach u, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial u^2} = -\frac{1}{w}\frac{\partial a_1}{\partial u} = -a; \quad \frac{\partial^2 a_1}{\partial u^2} = w\frac{\partial a}{\partial u} = -a_1;$$

und hieraus durch Integration:

$$a = V_3 \sin u + V_4 \cos u; \quad a_1 = -w(V_3 \cos u - V_4 \sin u). \tag{22}$$

Die dritte Gleichung läßt sich direkt integrieren und giebt:

$$a_2 = V_5\sqrt{G}. \tag{23}$$

Die drei rechts stehenden Gleichungen des Systems (5) erhalten die Form:

$$\frac{\partial a}{\partial v} + \frac{D''}{G} a_2 = 0; \quad \frac{\partial a_1}{\partial v} - \frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial u} a_2 = 0;$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial v} - D''a + \frac{1}{2E}\frac{\partial G}{\partial u} a_1 - \frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial v} a_2 = 0.$$

Geht man in diese Gleichungen mit den gefundenen Werten ein, so erhält man durch eine einfache Rechnung für die fünf Funktionen $V_1, \ldots, V_5$ folgende drei Bedingungsgleichungen:

$$(24)\quad \frac{dV_3}{dv} + \frac{V_5 V_2}{w} = 0; \quad \frac{dV_4}{dv} + \frac{V_5 V_1}{w} = 0; \quad \frac{dV_5}{dv} - \frac{V_1 V_4 + V_2 V_3}{w} = 0.$$

Die Aufgabe ist jetzt also, unter Berücksichtigung dieser Gleichungen aus (22) und (23) drei linear unabhängige partikuläre Integrale zu finden. Die Gleichungen (24) stimmen nun vollständig überein mit den bekannten Frenetschen Gleichungen, welche zwischen dem Krümmungs- und Torsionsradius einer beliebigen Raumkurve R' und den Cosinus der Neigungswinkel ihrer Tangente, Hauptnormale und Binormale gegen die Koordinatenachsen bestehen. Bezeichnet man: den Krümmungsradius mit r', den Torsionsradius mit ϱ', die Neigungswinkel der Tangente mit α', β', γ', die der Hauptnormale mit l', m', n', die der Binormale mit λ', μ', ν', so gelten die Gleichungen[1]):

$$(25)\quad \frac{d\cos\alpha'}{ds'} = \frac{\cos l'}{r'}; \quad \frac{d\cos\lambda'}{ds'} = \frac{\cos l'}{\varrho'}; \quad \frac{d\cos l'}{ds'} = -\left(\frac{\cos\alpha'}{r'} + \frac{\cos\lambda'}{\varrho'}\right);$$

nebst den durch zyklische Vertauschung aus ihnen hervorgehenden. Die willkürlichen Funktionen $V_1, \ldots, V_5$ drücken sich also sehr einfach aus durch *die oben genannten Elemente einer beliebigen Raumkurve R'.* Wir haben nur zu setzen:

$$(26)\quad V_1 = \frac{w}{r'}; \quad V_2 = \frac{w}{\varrho'};$$

so erhalten wir die gesuchten drei partikulären Integrale, indem wir V_3, V_4, V_5 der Reihe nach die folgenden Werte geben:

$$(27)\quad \begin{cases} V_3 = \cos\lambda',\ \cos\mu',\ \cos\nu'; \quad V_4 = \cos\alpha',\ \cos\beta',\ \cos\gamma'; \\ V_5 = -\cos l',\ -\cos m',\ -\cos n'; \end{cases}$$

wo die eingeführten Radien und Winkel einer ganz beliebigen Raumkurve zugehören, deren Bogenelement dv' ist. Die drei Systeme von partikulären Integralen des Systems (5) sind nun:

$$(28)\quad \begin{cases} x_0 = \cos\lambda' \sin u + \cos\alpha' \cos u; \\ x_1 = -w(\cos\lambda' \cos u - \cos\alpha' \sin u); \\ x_2 = \cos l'\left(1 - \frac{w\cos u}{r'} - \frac{w \sin u}{\varrho'}\right); \end{cases}$$

nebst den entsprechenden Gleichungen in y und z. Die auf die Raumkurven bezüglichen Gröfsen sind hierbei natürlich sämtlich Funktionen von v' allein.

---

1) Grundformeln § 13, Gl. (10), (11), (12).

Es sind nun noch die Koeffizienten M_{ik} der Gleichung (8) zu bilden. Aus (9) ergiebt sich durch eine einfache Rechnung:

$$M_{11} = x_0^2 + \frac{x_1^2}{E} + \frac{x_2^2}{G} = \cos\lambda'^2 + \cos\alpha'^2 + \cos l'^2 = 1.$$

Ebenso: $M_{22} = M_{33} = 1$; $M_{23} = M_{31} = M_{12} = 0$.
Somit erhält Gleichung (8) die Form:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1;$$

d. i. eine Kugel vom Radius 1. Als Endpunkte konjugierter Durchmesser nimmt man am einfachsten die Achsenschnittpunkte und erhält so:

$\xi_0 = 1,\ \eta_0 = 0,\ \zeta_0 = 0;\quad \xi_1 = 0,\ \eta_1 = 1,\ \zeta_1 = 0;\quad \xi_2 = 0,\ \eta_2 = 0,\ \zeta_2 = 1;$

also:

$$a_1 = \frac{dx}{du} = -w(\cos\lambda'\cos u - \cos\alpha'\sin u);$$

$$a_2 = \frac{\partial x}{\partial v} = \cos\lambda'\left[1 - w\left(\frac{\cos u}{r'} + \frac{\sin u}{\varrho'}\right)\right] \text{ u. s. w.}$$

und hieraus schließlich:

$$(29)\qquad \begin{cases} x = \int \cos l'\ dv' - w(\cos\lambda'\sin u + \cos\alpha'\cos u); \\ y = \int \cos m' dv' - w(\cos\mu'\sin u + \cos\beta'\cos u); \\ z = \int \cos n'\ dv' - w(\cos\nu'\sin u + \cos\gamma'\cos u). \end{cases}$$

Dies ist die *Gleichung der gesuchten Fläche in Krümmungsparametern.*

2. *Eigenschaften der Röhrenflächen.* — Es soll nun nachgewiesen werden, daſs die durch (29) dargestellten Flächen *Röhrenflächen* sind, d. h. daſs sie erzeugt werden durch Bewegung eines Kreises von konstantem Radius, dessen Mittelpunkt sich auf einer Raumkurve bewegt, während seine Ebene stets normal zu der Raumkurve bleibt. Die Gleichung einer solchen Fläche ist leicht direkt aufzustellen.

Es seien

$$x = f(v);\quad y = \varphi(v);\quad z = \psi(v)$$

die Gleichungen der Leitkurve, w der Radius des erzeugenden Kreises, ξ, η, ζ die Winkel, die der von einem Punkte $A(x, y, z)$ der Leitkurve nach einem Punkte $B(X, Y, Z)$ des zugehörigen erzeugenden Kreises gezogene Radius mit den Koordinatenachsen macht, so ist:

$$X - x = w\cos\xi;\quad Y - y = w\cos\eta;\quad Z - z = w\cos\zeta.$$

Bezeichnet man noch mit δ den Winkel, den der Radius AB mit

der durch A gehenden Hauptnormale der Leitkurve bildet, so zeigt eine einfache geometrische Überlegung, daſs

$$\cos\xi = \cos l \cos\delta + \cos\lambda \sin\delta; \quad \cos\eta = \cos m \cos\delta + \cos\mu \sin\delta;$$
$$\cos\zeta = \cos n \cos\delta + \cos\nu \sin\delta$$

ist. Die Gleichungen der Röhrenfläche lauten also in den Parametern v und δ:

$$(29\text{a}) \qquad \begin{cases} X = f(v) + w(\cos l \cos\delta + \cos\lambda \sin\delta); \\ Y = \varphi(v) + w(\cos m \cos\delta + \cos\mu \sin\delta); \\ Z = \psi(v) + w(\cos n \cos\delta + \cos\nu \sin\delta). \end{cases}$$

Die Winkel l, m, n; λ, μ, ν sind hierbei Funktionen von v allein.

Um nun die Übereinstimmung der Gleichungen (29) und (29a) nachzuweisen, sind die ersteren noch etwas umzuformen. Dies geschieht durch Einführung einer *zweiten* Raumkurve R (ohne Index), als deren *Evolute* die oben eingeführte R' anzusehen ist. Bezeichnet man alle auf die zweite Raumkurve R bezüglichen Gröſsen ohne Index, so bestehen die Gleichungen[1]):

$$(30) \qquad \begin{cases} \cos l' = -\cos\alpha; \quad \cos\alpha' = \cos\tau \cos l + \sin\tau \cos\lambda; \\ \cos\lambda' = \cos\tau \cos\lambda - \sin\tau \cos l. \end{cases}$$

Die Gröſse τ ist hierbei die Bogenlänge der Kurve, welche auf der Einheitskugel (in der von Gauſs[2]) eingeführten sphärischen Abbildung) den geometrischen Ort der Bilder der Binormale darstellt, oder die Summe aller, in Bogenmaſs gemessenen, Torsionswinkel $d\tau$ von einem bestimmten Anfangspunkt an; sie möge kurz als „Gesamttorsion" bezeichnet werden. Führt man die Gleichungen (30) in (29) ein, so erhält man:

$$x = -\int \cos\alpha\, dv - w[\sin(u+\tau)\cos\lambda + \cos(u+\tau)\cos l] \text{ u. s. w.}$$

Nehmen wir nun

$$(31) \qquad x = f(v); \quad y = \varphi(v); \quad z = \psi(v)$$

als Gleichungen der neu eingeführten Raumkurve R an, so haben wir, wenn wieder v die Bogenlänge der Kurve bedeutet:

$$\cos\alpha = f'(v); \quad \cos\beta = \varphi'(v); \quad \cos\gamma = \psi'(v).$$

---

1) Vgl. Serret-Harnack, Lehrbuch der Diff. u. Int.-Rechnung, I. Teil. Nr. 295. Die dort auftretende Integrationskonstante q ist $= 0$ gesetzt.

2) Disq. gen. Art. 6.

Dies eingesetzt ergiebt, wenn man die Vorzeichen ändert und die Integration ausführt:

$$(32)\quad \begin{cases} x = f(v) + w[\cos l \ \cos(u+\tau) + \cos\lambda \sin(u+\tau)]; \\ y = \varphi(v) + w[\cos m \cos(u+\tau) + \cos\mu \sin(u+\tau)]; \\ z = \psi(v) + w[\cos n \ \cos(u+\tau) + \cos\nu \sin(u+\tau)]. \end{cases}$$

Diese Gleichungen stimmen nun vollständig mit (29a) überein, nur dafs der dort δ genannte Winkel hier mit $(u+\tau)$ bezeichnet ist. Die *Flächen* $R_1 =$ const. sind also in der That *Röhrenflächen,* und zwar sind sie in (29) und (32) durch Krümmungsparameter dargestellt. Letzteres läfst sich auch nachträglich noch einmal darthun, indem man die sechs Gaufsschen Fundamentalgröfsen für (32) aufstellt. Man findet

$$(33)\quad \begin{cases} E = w^2; \quad F = 0; \quad G = \left[1 - \frac{w}{r}\cos(u+\tau)\right]^2; \\ D = -w; \ D' = 0; \ D'' = \frac{1}{r}\cos(u+\tau)\left[1 - \frac{w}{r}\cos(u+\tau)\right]. \end{cases}$$

Hieraus lassen sich sofort die beiden Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 finden. Es ist:

$$(34)\quad R_1 = -w; \quad R_2 = \frac{r - w\cos(u+\tau)}{\cos(u+\tau)}.$$

Es ist nun geometrisch leicht einzusehen, dafs für die Röhrenflächen das eine System von Krümmungslinien ($v =$ const.) von den erzeugenden Kreisen gebildet wird. Auch analytisch erhält man dies Resultat leicht, indem man in (32) v einen bestimmten Wert v_1 giebt, d. h. einen festen Punkt der Leitkurve mit den Koordinaten

$$x_1 = f(v_1); \quad y_1 = \varphi(v_1); \quad z_1 = \psi(v_1)$$

annimmt; bringt man diese Gröfsen auf die linke Seite, quadriert und addiert, so ergiebt sich:

$$(35)\quad (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = w^2.$$

Multipliziert man die drei Gleichungen mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ und addiert, so erhält man:

$$(36)\quad (x - x_1)\cos\alpha + (y - y_1)\cos\beta + (z - z_1)\cos\gamma = 0.$$

Die Gleichungen (35) und (36) sagen aus, dafs die Entfernung der Punkte x, y, z und $x_1, y_1, z_1 = w$ ist, und dafs ihre Verbindungslinie auf der Kurventangente senkrecht steht, d. h. dafs jeder Punkt x, y, z der Kurve $v = v_1$ auf dem zu x_1, y_1, z_1 gehörigen erzeugenden Kreise liegt. Wir haben also:

1. Satz. *Auf jeder Röhrenfläche wird das eine System von Krümmungslinien von den erzeugenden Kreisen gebildet.*

In Verbindung mit (14) folgt daraus:

2. Satz. *Auf jeder Röhrenfläche ist der eine Hauptkrümmungsradius konstant und zwar gleich dem Radius des erzeugenden Kreises.*

Da ferner die Gleichungen (32) dadurch in (29a) übergeführt werden, dafs $u + \tau = \vartheta$ gesetzt wird, so ist längs jeder Krümmungslinie der Schar $u = \text{const.}$ der Winkel ϑ um eine konstante Gröfse von τ verschieden. Im folgenden sei unter „Krümmungslinien" stets die Schar $u = \text{const.}$ verstanden. Wir haben dann also:

3. Satz. *Auf jeder Röhrenfläche ist der Centriwinkel, den ein von einem Punkte A der Leitkurve nach einem Punkte B des zugehörigen erzeugenden Kreises gezogener Radius mit der Hauptnormale des Punktes A macht, längs einer Krümmungslinie um eine konstante Gröfse von der Gesamttorsion verschieden.*

Noch etwas einfacher läfst sich dieser Satz aussprechen, wenn man den Ort der Schnittpunkte der Hauptnormale mit der Röhrenfläche einführt, der als „Normalenkurve" bezeichnet werden möge. Er lautet dann:

Auf jeder Röhrenfläche ist der Centriwinkel, der zu einem zwischen den Normalenkurven und einer beliebigen Krümmungslinie liegenden Bogen eines erzeugenden Kreises gehört, gleich der Gesamttorsion τ der Leitkurve, diese gemessen von dem Mittelpunkte des erzeugenden Kreises, der durch den Schnittpunkt jener Krümmungslinie mit der Normalenkurve geht.

Die Gleichungen (32) stellen, wenn man auch noch w als veränderlich ansieht, ein *dreifach orthogonales System* vor. Denn es ist, wie man leicht findet:

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} = \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial w} = \sum \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial x}{\partial u} = 0.$$

Dieses dreifach orthogonale System besteht: 1) aus den Röhrenflächen ($w = \text{const.}$), 2) aus den Ebenen der erzeugenden Kreise ($v = \text{const.}$), 3) aus den Flächen $u = \text{const.}$ Die letzteren sind aber, wie man leicht sieht, die abwickelbaren Flächen der Evoluten der Leitkurve R. Denn die Normalen der Röhrenfläche sind ja, was geometrisch evident ist, auch Normalen der Leitkurve. Analytisch erhält man dies Resultat, indem man für die Röhrenfläche die Cosinus der Winkel a, b, c aufstellt, welche die Flächennormale mit den Achsen bildet; es ergiebt sich[1]):

$$\cos a = -\frac{1}{w}[\cos(u+\tau)\cos l + \sin(u+\tau)\cos\lambda];$$

1) Grundformeln, § 1. Gl. (23).

also $\Sigma \cos a \cos \alpha = 0$; d. h. die Flächennormale steht senkrecht auf der Tangente der Leitkurve. Da aber die Gleichung $u =$ const. die Krümmungslinien der Röhrenfläche darstellt und sich längs derselben bekanntlich die konsekutiven Flächennormalen schneiden, so sind die Flächen $u =$ const. abwickelbare Flächen, deren Erzeugende Normalen der Leitkurve sind. Wir haben also:

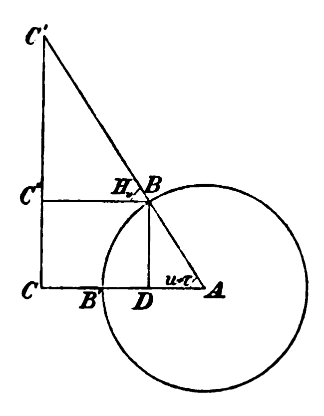
4. **Satz.** *Auf jeder Röhrenfläche werden die Krümmungslinien durch die abwickelbaren Flächen der Evoluten der Leitkurve ausgeschnitten.*

Hieraus läſst sich nachträglich auch Satz 3 geometrisch ableiten. Da $d\tau$ der Winkel zweier konsekutiven Schmiegungsebenen ist, so muſs offenbar eine Normale der Leitkurve, um die ihr unmittelbar vorangehende schneiden zu können, in die Schmiegungsebene der letzteren fallen, d. h. mit ihrer eigenen den Winkel $d\tau$ bilden. Durch Summierung entsteht dann die Gesamttorsion, d. h. der Winkel τ.

Aus Satz 4 folgt unmittelbar:

5. **Satz.** *Für sämtliche, zu der gleichen Leitkurve gehörigen Röhrenflächen stellt die Leitkurve den einen, ihre abwickelbare Polarfläche den andern Mantel der Centrafläche vor.*

Der analytische Ausdruck dieses Satzes ist Gleichung (34). Um die dort stehenden Werte für die Hauptkrümmungsradien geometrisch zu interpretieren, diene nebenstehende Figur.



In derselben sei A ein Punkt der Leitkurve, der um ihn beschriebene Kreis durch B und B' sei der zugehörige erzeugende Kreis, C das Krümmungszentrum der Leitkurve, also $AC = r$, $AB = w$. Da die Figur in der Normalebene der Leitkurve gezeichnet ist, so ist AB eine Normale der Fläche und die in C auf AC errichtete Senkrechte eine Erzeugende der Polarfläche der Leitkurve; auf sie ist von B das Lot BC'' gefällt, ihr Schnittpunkt mit der verlängerten Flächennormale AB heiſse C'. Ferner ist $\angle BAC = u + \tau$, also $AD = w \cos(u + \tau)$. Nun ist:

$$CD = BC' \cos(u + \tau) = r - w \cos(u + \tau); \quad BC' = \frac{r - w \cos(u + \tau)}{\cos(u + \tau)};$$

also nach (34): $BC' = R_2$; d. h. das Krümmungszentrum jedes Punktes der Röhrenfläche liegt auf der Polarfläche der Leitkurve.

Weitere Sätze ergeben sich, wenn man für die Krümmungslinien die Lage und Gröſse des Krümmungs- und Torsionsradius berechnet.

Bezeichnet man dieselben mit r_v und ϱ_v, ferner den Winkel zwischen der Flächennormale und der Hauptnormale der Krümmungslinien mit H_v, so bestehen die Gleichungen[1]):

$$\frac{\cos H_v}{r_v} = \frac{1}{R_2}; \quad \operatorname{tg} H_v = \frac{R_2}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}; \quad \frac{1}{\varrho_v} = \frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial H_v}{\partial v}.$$

Bildet man zunächst $\operatorname{tg} H_v$, so ergiebt sich:

(37) $$\operatorname{tg} H_v = \operatorname{tg}(u + \tau) \quad \text{oder} \quad H_v = u + \tau.$$

Ferner:

(38) $$r_v = R_2 \cos(u + \tau) = r - w \cos(u + \tau);$$

(39) $$\varrho_v = \sqrt{G} : \frac{d\tau}{dv} = \frac{\varrho}{r}[r - w \cos(u + \tau)].$$

Da nun $H_v = u + \tau$ ist, so giebt BC'' (s. Fig.), weil parallel mit AC die Richtung der Hauptnormale der durch B gehenden Krümmungslinie an. Es ist also: $BC'' = DC = AC - AD = r - w \cos(u + \tau) = r_v$, d. h. C'' ist das Krümmungszentrum derselben. Also:

6. Satz. *Fällt man von einem Punkte einer Röhrenfläche das Lot auf die zugehörige Erzeugende der abwickelbaren Polarfläche der Leitkurve, so stellt dieses nach Gröfse und Richtung den Krümmungsradius der durch den betreffenden Punkt gehenden Krümmungslinie, sein Fufspunkt also ihr Krümmungszentrum dar.*

Zusatz. *Der geometrische Ort für die Krümmungszentren aller Krümmungslinien einer Röhrenfläche ist die abwickelbare Polarfläche der Leitkurve.*

Dividiert man Gl. (38) durch Gl. (39), so erhält man:

(40) $$\frac{r_v}{\varrho_v} = \frac{r}{\varrho},$$

also:

7. Satz. *Auf einer Röhrenfläche verhalten sich Krümmungs- und Torsionsradius einer Krümmungslinie wie Krümmungs- und Torsionsradius der Leitkurve in dem entsprechenden Punkte.*

Berechnet man noch den Winkel θ, unter dem die Hauptnormalenkurve $(u + \tau = 0)$ die Krümmungslinien schneidet, so erhält man[2]):

(41) $$\operatorname{tg} \theta = \frac{rw}{\varrho[r - w \cos(u + \tau)]}.$$

---

1) Grundformeln, § 14. Gl. (24) u. (26).

2) Grundformeln § 1, Gl. (8).

Es ist auch leicht, die Punkte der Röhrenfläche zu bestimmen, für welche $R_1 = \pm R_2$ ist. Aus Gleichung (34) folgt für $R_1 = R_2$

$$\frac{r - w\cos(u+\tau)}{\cos(u+\tau)} = -w; \quad \text{oder:} \quad r = 0,$$

d. h. Nabelpunkte der Röhrenfläche treten nur da auf, wo die Leitkurve eine Spitze hat. $R_1 = -R_2$ ergiebt

$$\cos(u+\tau) = \frac{r}{2w},$$

was sich übrigens auch direkt an der Figur ablesen läfst.

Schliefslich kann man noch die parabolische Kurve der Röhrenfläche aufstellen. Die Differentialgleichung der Asymptotenlinien ist:

$$w du^2 - \frac{\cos(u+\tau)}{r}\left[1 - \frac{w}{r}\cos(u+\tau)\right]dv^2 = 0.$$

Da w nicht verschwinden kann, so ist die Bedingung für das Zusammenfallen der beiden Asymptotenrichtungen:

$$\frac{\cos(u+\tau)}{r}\left[1 - \frac{w}{r}\cos(u+\tau)\right] = 0.$$

Diese Gleichung kann auf dreierlei Art befriedigt werden:

1) $\frac{1}{r} = 0$; d. h. der parabolischen Kurve gehören die erzeugenden Kreise an, in deren Zentrum die Leitkurve die Krümmung 0 hat (z. B. bei ebenen Kurven die Wendepunkte).

2) $\cos(u+\tau) = 0$; d. h. der parabolischen Kurve gehört der geometrische Ort der Schnittpunkte an, welche die Binormalen der Leitkurve auf der Röhrenfläche bestimmen (die „Binormalenkurve").

3) $r - w\cos(u+\tau) = 0$, oder $\cos(u+\tau) = \frac{r}{w}$. Dieser Teil ist nur reell, wenn $r < w$, d. h. wenn das Krümmungszentrum der Leitkurve innerhalb der Röhrenfläche fällt. Dann ist (s. Fig.), wenn B ein Punkt der parabolischen Kurve ist, D das Krümmungszentrum der Leitkurve; also *schneidet* die zugehörige Erzeugende ihrer Polarfläche die Röhrenfläche im Punkte B.

Dieser dritte Zweig der parabolischen Kurve ist also *die Schnittkurve der Röhrenfläche mit der abwickelbaren Polarfläche der Leitkurve.* Eine einfache geometrische Überlegung zeigt ferner, dafs in diesem Falle B der Schnittpunkt zweier konsekutiven erzeugenden Kreise ist. Der dritte Zweig der parabolischen Kurve läfst sich also auch definieren als der Ort dieser Schnittpunkte, oder als *die von den erzeugenden Kreisen eingehüllte Kurve.*

Man kann noch nach dem Winkel fragen, den die zusammenfallenden Asymptotenrichtungen mit den verschiedenen Zweigen der parabolischen Kurve machen. Der Winkel ε zweier Kurven $\varphi = c_1$ und $\psi = c_2$ ist für Krümmungsparameter bestimmt durch die Gleichung[1])

$$\cos\varepsilon = \frac{E\varphi_2\psi_2 + G\varphi_1\psi_1}{\sqrt{(E\varphi_2^2 + G\varphi_1^2)(E\psi_2^2 + G\psi_1^2)}}.$$

Bedeutet φ die Asymptotenlinien, so ist: $\varphi_1 = \sqrt{w}$; $\varphi_2 = \pm\sqrt{D''} = 0$, da ja längs der parabolischen Kurve D'' verschwindet.

Für den 1. Zweig derselben $\left(\frac{1}{r} = 0\right)$ ist: $\psi_1 = 0$; $\psi_2 = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dv} = 0$; also: $\cos\varepsilon = 0$; $\varepsilon = 90^0$; d. h. die Asymptotenrichtung steht auf diesem Zweige senkrecht.

Für den 2. Zweig $[\cos(u+\tau) = 0;\ u + \tau = 90^0]$ ist

$$\psi_1 = -\sin(u+\tau) = -1;\quad \psi_2 = -\frac{\sin(u+\tau)}{\varrho} = -\frac{1}{\varrho};\quad \cos\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\frac{w^2}{\varrho^2} + 1}};$$

woraus

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{w}{\varrho};\quad \text{d. h.} \tag{42}$$

8. Satz. *Auf jeder Röhrenfläche wird die Binormalenkurve von den Asymptotenlinien unter einem Winkel getroffen, dessen Tangente gleich dem Verhältnis des Radius der erzeugenden Kreise zum Torsionsradius der Leitkurve ist.*

Für ebene Leitkurven ist $\frac{1}{\varrho} = 0$; in diesem Fall *berühren* also die Asymptotenlinien die Binormalenkurve, d. h. den Schnitt des über der Kurve stehenden Zylinders mit der Röhrenfläche.

Für den 3. Zweig $[r - w\cos(u+\tau) = 0]$ ist:

$$\psi_1 = w\cdot\sin(u+\tau);\quad \psi_2 = \frac{dr}{dv} + \frac{w\sin(u+\tau)}{\varrho};\quad \cos\varepsilon = 1;\quad \varepsilon = 0^0;$$

d. h.

9. Satz. *Die Asymptotenlinien einer Röhrenfläche berühren die Enveloppe der erzeugenden Kreise.*

Reutlingen, den 1. November 1900.

1) Grundformeln, § 17, Gl. (14).

Neue Beziehungen aus dem Gebiete der Binomialkoeffizienten.

Von L. GROSSMANN in Hamburg (Seewarte).

Bei einer Untersuchung über die Änderung der Temperatur von Tag zu Tag wurde für die durch den Zufall gebotene Häufigkeit der Perioden von α auf einander folgenden Tagen anhaltender Erwärmung bei gegebenen A positiven, B negativen interdiurnen Änderungen und C Folgen ohne Temperaturänderung der Ausdruck $(B+C+1)\frac{(B+C)!}{B!\,C!}(A+B+C-\alpha-1)_{A-\alpha}$ abgeleitet. Aus dieser zufälligen Verteilung der Perioden gleichsinniger Temperaturänderungen wurde die Wahrscheinlichkeit dafür abgeleitet, daſs auf eine Erwärmung wieder eine solche folge, und ein zweiter Ausdruck $(A-1):(A+B+C)$ wurde hierfür direkt gewonnen. Setzt man beide Ausdrücke gleich, so ergiebt die Einführung neuer Konstanten die Beziehung:

$$1+2\frac{D}{E}+3\frac{D}{E}\frac{D-1}{E-1}+\cdots+(D+1)\frac{D}{E}\frac{D-1}{E-1}\cdots\frac{1}{E-D+1}=\frac{(E+1)(E+2)}{(E-D+1)(E-D+2)}$$

Hieraus wurde auf das Bestehen der allgemeineren Formel geschlossen:

$$\sum_{n=0}^{D}(n+k-1)_n\frac{D_n}{E_n}=\frac{(E+1)(E+2)\cdots(E+k)}{(E-D+1)\cdots(E-D+k)}=\frac{(E+k)_k}{(E-D+k)_k}.$$

Durch Einführung neuer Gröſsen folgt:

$$\frac{P_k}{Q_k}=\sum_{n=0}^{P-Q}(n+k-1)_n\frac{(P-Q)_n}{(P-k)_n},$$

eine für $P>Q$ und $k=2$ erwiesene Beziehung.

Der Versuch, den Beweis dadurch allgemein zu liefern, daſs die Giltigkeit für $k=\mu+1$ aus der für $k=\mu$ bestehenden hervorgehe, führte zu der Herleitung der allgemeineren Formel

$$(1)\qquad \frac{P_k}{Q_k}=\sum_{n=0}^{P-Q}\frac{(P-k+\lambda-n)_\lambda}{(Q-k+\lambda)_\lambda}(n+k-\lambda-1)_n\frac{(P-Q)_n}{(P-k)_n}$$

für jeden positiven oder negativen ganzzahligen Wert von λ.

Für diese Formel ergiebt sich der Beweis, wenn man entwickelt:

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}=\frac{P-k}{Q-k}\frac{P_k}{Q_k}$$

$$=\sum_{n=0}^{P-Q}\frac{(P-(k+1)+(\lambda+1)-n)_{\lambda+1}}{(Q-(k+1)+(\lambda+1))_{\lambda+1}}(n+(k+1)-(\lambda+1)-1)_n\frac{(P-Q)_n}{(P-(k+1))_n}.$$

Hiernach gilt die Formel (1) für $k+1$ und $\lambda+1$, wenn sie für k und λ gilt; da aber aus der Ableitung von (1) deren Giltigkeit für $\lambda-1$ folgt, falls sie für λ besteht, so folgt, dafs (1) für $k+1$ besteht, falls sie für k richtig ist. Die Richtigkeit ist nach der Ableitung aber für $k=2$ und $\lambda=0$ erwiesen und somit gilt (1) für alle positiven ganzzahligen Werte von k und beliebigen ganzzahligen Werte von λ.

Aus den Relationen $\frac{P_k}{Q_k} = \frac{P_{P-Q}}{(P-k)_{P-Q}} = \frac{(Q-k)_{Q-P}}{Q_{Q-P}}$ leitet man die entsprechenden Formeln:

$$\frac{P_k}{Q_k} = \sum_{n=0}^{Q-P} (-1)^n \frac{(Q+\lambda-n)_\lambda}{(P+\lambda)_\lambda} (k+\lambda)_n \frac{(Q-P)_n}{Q_n} \tag{2}$$

für $Q > P$ und

$$\frac{P_k}{Q_k} = \sum_{n=0}^{k} \frac{(Q+\lambda-n)_\lambda}{(Q-k+\lambda)_\lambda} (n+P-Q-\lambda-1)_n \frac{k_n}{Q_n} \tag{3}$$

für $P \gtrless Q$ ab.

Es läfst sich zeigen, dafs diese 3 Formeln, abgesehen von der Bedingung, dafs über positive Werte von n summiert werden mufs, für alle positiven und negativen ganzzahligen Werte von P, Q, k und λ unabhängig von deren relativer Gröfse bestehen.

Zu allgemeineren Formeln führt die Bedingung:

$$\frac{a(a+\alpha)\dots(a+(k-1)\alpha)}{b(b+\beta)\dots(b+(k-1)\beta)} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k \frac{\left(\frac{a}{\alpha}+k-1\right)_k}{\left(\frac{b}{\beta}+k-1\right)_k}$$

für den Fall, dafs α und β Teiler von a, bzgl. b sind.

Es lassen sich wohl alle Formeln aus dem Gebiet der Binomialkoeffizienten aus diesen Formeln ableiten. Man findet beispielsweise die folgenden:

$$\sum_{n=1}^{\lambda} \frac{A_n}{B_n} = \frac{A}{(B-A+1)}\left(1 - \frac{(A-1)_\lambda}{B_\lambda}\right) \text{ für } \lambda < A,$$

$$\sum_{n=0}^{A} (-1)^n k_n \frac{A_n}{B_n} = \frac{(B-A)_n}{B_k}, \quad \sum_{n=0}^{A} k_n \frac{A_n}{(B+n)_n} = \frac{(A+B+k)_n}{(B+k)_k},$$

$$\sum_{n=0}^{A} (-1)^n \frac{A_n}{(B+n)_n} = \frac{B}{A+B}, \qquad \sum_{n=0}^{A} k_n A_n = (A+k)_k.$$

Hamburg, den 25. März 1901.

Beitrag zur Lehre von den reziproken Gleichungen.

Von F. J. Studnička in Prag.

1. Soll die algebraische Gleichung n-ten Grades

$$f(x) \equiv \sum_{i=0}^{n} A_i x^{n-i} = 0 \tag{1}$$

reziprok sein, so hat sie der allgemeinen Bedingung

$$f(x) \equiv \lambda x^n f\left(\frac{k}{x}\right), \tag{2}$$

zu genügen, wobei λ und k konstant sind; denn aus dieser Bedingung geht vor allem hervor, dafs zu jeder Wurzel derselben x_i sich die Wurzel k/x_i gesellt, von welcher Grundeigenschaft eben die Benennung der Gleichung (1) abgeleitet erscheint.

Gleichzeitig erkennt man daraus, dafs die Anzahl aller Wurzeln, somit auch der Grad der Gleichung (1) durch eine *gerade* Zahl ausgedrückt erscheinen mufs, so dafs man setzen kann $n = 2s$.

Um nun den Wert der Konstante λ zu bestimmen, nehmen wir für die Identität (2) an $x = \sqrt{k}$, worauf aus derselben hervorgeht

$$f(\sqrt{k}) = \lambda k^s f(\sqrt{k}).$$

Daraus läfst sich nun schliefsen:

1. Wenn die Gröfse $\sqrt{k}$ keine Wurzel der Gleichung (1) vorstellt, wenn also $f(\sqrt{k}) \gtrless 0$ ist, so folgt aus der letzten Relation durch Kürzung $1 = \lambda k^s$, woraus sich λ unmittelbar ergiebt.

2. Ist jedoch $\sqrt{k}$ eine Wurzel der Gleichung (1), so mufs sie mindestens *zweimal* und zwar *positiv* wie *negativ* vorkommen, so dafs dann $(x^2 - k)$ oder allgemein $(x^2 - k)^m$ einen Faktor des Polynoms $f(x)$ bildet. In diesem letzteren Falle hat man also

$$f(x) = (x^2 - k)^m \varphi(x),$$

worauf dann die Gleichung $2(s - m)$-ten Grades $\varphi(x) = 0$ reziprok ist

und die Wurzel $\sqrt{k}$ nicht mehr besitzt, was also mit dem ersten Falle übereinstimmt.

Statt der allgemeinen Identität (2) können wir also setzen

$$f(x) \equiv \frac{x^{2s}}{k^s} f\left(\frac{k}{x}\right), \tag{3}$$

wodurch die *reziproken* Gleichungen im weiteren Sinne definiert erscheinen, während im engeren Sinne, wo nämlich $k = 1$ ist, die Bedingung (3) die einfachere Form

$$f(x) \equiv x^{2s} f\left(\frac{1}{x}\right) \tag{4}$$

annimmt und die strikte Reziprozität der Wurzeln andeutet.

Aus derselben Identität (3) folgt auch, daſs die Koeffizienten der reziproken Gleichungen bestimmten Bedingungen genügen. Führt man in dieselbe die in Formel (1) angedeuteten Polynome ein, so erhält man

$$\sum A_{2s-i} x^i \equiv \frac{x^{2s}}{k^s} \sum A_i \frac{k^{2s-i}}{x^{2s-i}} \equiv \sum A_i k^{s-i} x^i,$$

woraus sich ergiebt, daſs allgemein

$$A_{2s-i} = A_i k^{s-i} \tag{5}$$

und speziell, wo $k = 1$ ist,

$$A_{2s-i} = A_i, \tag{6}$$

was auch durch die beiden Formeln

$$\frac{A_{2s-i}}{A_i} = k^{s-i}, \qquad \frac{A_{2s-i}}{A_i} = 1$$

dargestellt werden kann.

Danach sind z. B. die quadratischen Gleichungen sämtlich reziprok, indem aus $x^2 + ax + k = 0$ für die Wurzeln x_1, x_2 unmittelbar folgt

$$x_1 \cdot x_2 = k.$$

2. Weil man bei reziproken Gleichungen die eine Hälfte der Wurzeln durch die andere auszudrücken imstande ist, so muſs die Auflösung einer solchen Gleichung $(2s)$-ten Grades sich zurückführen lassen auf die Auflösung von je einer Gleichung s-ten und 2-ten Grades, wie es unter Anwendung von *rekurrenten* Transformationsformeln auch bisher üblich war. Will man jedoch eine *independente* Darstellung der Koeffizienten der neuen Gleichung s-ten Grades haben, so muſs man einen Schritt weiter gehen und das System der rekurrenten Formeln entsprechend auflösen, was im nachfolgenden durchgeführt erscheint.

Die allgemeine Form der reziproken Gleichungen ist dem Vorangehenden zufolge

(7) $A_0x^{2s}+A_1x^{2s-1}+\cdots+A_sx^s+A_{s-1}kx^{s-1}+\cdots+A_1k^{s-1}x+A_0k^s=0,$

welche leicht auf die Form

$$A_0\left(x^s+\frac{k^s}{x^s}\right)+A_1\left(x^{s-1}+\frac{k^{s-1}}{x^{s-1}}\right)+\cdots+A_{s-1}\left(x+\frac{k}{x}\right)+A_0=0$$

zu bringen ist, so daſs diese Gleichung, wenn

$$x+\frac{k}{x}=y, \tag{8}$$

$$x^m+\frac{k^m}{x^m}=V_m \tag{9}$$

gesetzt wird, woraus unmittelbar folgt

$$V_0=2,\quad V_1=y, \tag{10}$$

sich in die einfachere

$$A_0V_s+A_1V_{s-1}+\cdots+A_{s-1}V_1+A_s=0 \tag{11}$$

verwandelt; hier hat man nur die einzelnen Ausdrücke V_k durch y auszudrücken, um schlieſslich die Gleichung

$$B_0y^s+B_1y^{s-1}+\cdots+B_{s-1}y+B_s=0 \tag{12}$$

zu erhalten, deren Auflösung die Wurzelwerte $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_s$ liefert, sodaſs dann der Gleichung (8) zufolge

$$x^2-y_ix+k=0 \qquad (i=1,2,\cdots,s) \tag{13}$$

sich das Wurzelpaar x_i, x_i' ergiebt, welches der Bedingung $x_i\cdot x_i'=k$ entspricht, wodurch die Reziprozität zum Ausdrucke gelangt.

Es handelt sich hier also nur um die independente Darstellung der B_k durch die A_k. Zu dem Zwecke leiten wir zunächst aus Formel (8) und (9) die rekurrente Relation

$$kV_{n-2}-yV_{n-1}+V_n=0 \tag{14}$$

ab, welche in Verbindung mit den beiden Formeln (10) die Darstellung von V_n durch y liefert. Setzt man nämlich

$$V_n\equiv y^n-a_2ky^{n-2}+a_4k^2y^{n-4}-a_6k^3y^{n-6}+\cdots,$$

$$V_{n+1}\equiv y^{n+1}-a_1ky^{n-1}+a_3k^2y^{n-3}-a_5k^3y^{n-5}+\cdots,$$

so ergiebt sich danach

$$V_{n+2}\equiv y^{n+2}-b_0ky^n+b_2k^2y^{n-2}-b_4k^3y^{n-4}+\cdots,$$

wobei in Betreff der neuen Koeffizienten b_k gilt

$$b_{2i}=a_{2i}+a_{2i+1} \qquad (a_0=1),$$

also eine rekurrente Darstellung erhalten wird. Die independente Auflösung unserer Aufgaben liefern jedoch die linearen Relationen:

$$\begin{aligned}
y - V_1 &= 0,\\
2k - yV_1 + V_2 &= 0,\\
kV_1 - yV_2 + V_3 &= 0,\\
kV_2 - yV_3 + V_4 &= 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
V_n \qquad\qquad + kV_{n-2} - yV_{n-1} &= 0,
\end{aligned}$$

aus welchen die unbekannten

$$V_1,\; V_2,\; V_3, \ldots, V_{n-1}$$

zu eliminieren sind, um V_n zu bestimmen; man erhält zunächst

$$\begin{vmatrix}
y, & -1, & 0, & \cdots, & 0, & 0\\
2k, & -y, & 1, & \cdots, & 0, & 0\\
0, & k, & -y, & \cdots, & 0, & 0\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
0, & 0, & 0, & \cdots, & -y, & 1\\
V_n, & 0, & 0, & \cdots, & k, & -y
\end{vmatrix} = 0.$$

In dieser Determinante ändere man das Vorzeichen bei allen Elementen der 2., 4., 6., ... Kolonne und der 3., 5., 7., ... Zeile, worauf dann durch Auflösung nach V_n erhalten wird

$$V_n = \begin{vmatrix}
y, & 1, & 0, & \ldots, & 0, & 0\\
2k, & y, & 1, & \ldots, & 0, & 0\\
0, & k, & y, & \ldots, & 0, & 0\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
0, & 0, & 0, & \ldots, & y, & 1\\
0, & 0, & 0, & \ldots, & k, & y
\end{vmatrix}. \tag{15}$$

Diese Kettendeterminante zeigt uns also, wie die früher durch a_k ausgedrückten Koeffizienten sich independent hieraus ergeben und überhaupt V_n durch y und k sich darstellen läſst.

Da jedoch die Auswertung von Determinanten höherer Grade umständlich und langwierig erscheint, so ist es namentlich für die Praxis erwünscht, obigen Determinantenausdruck durch die entsprechende Potenzreihe zu ersetzen. Man erhält da, wie ich gezeigt habe,

$$V_n = y^n - \frac{n}{1} k y^{n-2} + \frac{n}{2}(n-3)_1 k^2 y^{n-4} - \frac{n}{3}(n-4)_2 k^3 y^{n-6} + \cdots$$

oder in kürzerer, die Zusammensetzung der Koeffizienten deutlicher zeigenden Form

$$V_n = y^n + \sum_{i=1} (-1)^i \frac{n}{i} (n-i-1)_{i-1} k^i y^{n-2i}, \tag{16}$$

wobei die Summe bei *geraden* n bis $i = \frac{n}{2}$, bei *ungeraden* n bis $i = \frac{n-1}{2}$ zu erstrecken ist.

Mit Hilfe dieser Formel (16) verschaffen wir uns schliefslich unter Benutzung der Polynome (11) und (12) die Relation

$$B_i = A_i + \sum_{h=1} (-1)^h \frac{n+2h-i}{h} (n-i+h-1)_{h-1} k^h A_{i-2h}, \tag{17}$$

wozu noch die ersten zwei Werte $B_0 = A_0$, $B_1 = A_1$ beizufügen sind, so dafs nun der direkte Übergang von der Gleichung (11) zu (12) vermittelt erscheint.

In dem speziellen Falle, wo $k = -1$ ist, die reziproke Gleichung also die Form

$$A_0 x^{2s} + A_1 x^{2s-1} + \cdots + A_s x^s - A_{s-1} x^{s-1} + \cdots + (-1)^s A_s = 0 \tag{18}$$

annimmt, ist die vermittelnde Gleichung

$$C_0 y^s + C_1 y^{s-1} + \cdots + C_{s-1} y + C_s = 0, \tag{19}$$

wo die Koeffizienten bestimmt sind durch die Formel

$$C_i = A_i + \sum_{h=1} \frac{n+2h-i}{h} (n-i+h-1)_{h-1} A_{i-2h}. \tag{20}$$

In dem einfachsten Falle endlich, wo $k = 1$, $A_m = 1$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$, hat die reziproke Gleichung die Form

$$x^{2s} + x^{2s-1} + \cdots + x + 1 = 0,$$

wobei die Auflösung auf dieselbe Weise vorgenommen werden könnte, wo jedoch unter Intervention der Identität

$$x^{2s+1} - 1 \equiv (x-1)(x^{2s} + x^{2s-1} + \cdots + x + 1)$$

sofort erhalten wird

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{2s+1} + i\sin\frac{2k\pi}{2s+1}, \quad x_k' = \cos\frac{2k\pi}{2s+1} - i\sin\frac{2k\pi}{2s+1}. \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, s)$$

Prag, den 15. Januar 1901.

Über die Klassifikation der Kurven und Flächen zweiten Grades.

Von C. Koehler in Heidelberg.

Bei einer beliebigen Kurve oder Fläche zweiten Grades (d. h. zweiter Ordnung oder zweiter Klasse) hängt die Entscheidung darüber, ob sie entartet ist oder nicht, sowie ob sie reell oder imaginär, bezw. geradlinig, nichtgeradlinig oder imaginär ist, also die Einteilung derselben nach ihrer *projektiven* Beschaffenheit lediglich ab vom Werte der Konstanten ihrer Gleichung; sie ist mithin völlig unabhängig von dem Koordinatensystem, auf das wir ihre Gleichung beziehen. Ihre Beschaffenheit im Unendlichen dagegen oder ihre *metrische* Beschaffenheit ist aufser von diesen Konstanten auch abhängig von den Koordinaten der unendlich fernen Geraden, bezw. Ebene, also von dem der Betrachtung zu Grunde liegenden Koordinatensystem. An eine Klassifikation dieser Kurven und Flächen kann man deshalb die Forderung stellen, dafs sie diesen Unterschied scharf hervortreten lasse. Sie mufs dann für die *projektive* und für die *metrische Einteilung* Kriterien geben, die von einander unabhängig sind, und es dürfen die projektiven Kriterien nur die Konstanten der Kurven- oder Flächengleichung, die metrischen Kriterien aber aufserdem nur noch die Koordinaten der unendlich fernen Geraden, bezw. Ebene enthalten.

Die vorliegende Arbeit, die dieser Forderung genügen will, dürfte deshalb vielleicht auch nach den Abhandlungen von Hensel[1]), Brückel und Gundelfinger[2]), sowie nach dem Erscheinen von Killings „Lehrbuch der analytischen Geometrie in homogenen Koordinaten“[3])

1) Hensel: Über die Klassifikation der nicht homogenen quadratischen Formen etc. Journal f. Math. **113**, 303 ff.

2) Brückel: Zusammenstellung der Formeln des Herrn Gundelfinger zum Hauptachsenproblem der Flächen zweiter Ordnung etc. Journal f. Math. **119**, 210 ff.

3) Paderborn 1900 und 1901. In diesem Buche ist zwar die projektive Einteilung von der metrischen streng geschieden; dasselbe giebt aber keine Kriterien, welche die Art der Kurve oder Fläche aus ihrer Gleichung *direkt* zu bestimmen gestatten.

noch einiges Interesse darbieten. Die in ihr enthaltenen *analytisch-geometrischen* Betrachtungen sind einfachster Art. Das Hauptachsenproblem und die Theorie der quadratischen Formen bleiben absichtlich aus dem Spiel. Als bekannt wird nur vorausgesetzt das homogene Koordinatensystem, die sich auf dieses stützende Polarentheorie bis zum Beweis von der Identität der nicht entarteten Kurven, bezw. Flächen zweiter Ordnung und zweiter Klasse, ferner der Zusammenhang, der zwischen der Entartung der Kurve oder Fläche und dem Rang ihrer Determinante besteht, und endlich die elementare Determinantentheorie, zu der auch der Satz gerechnet werden darf, dafs der Rang einer *symmetrischen* Determinante durch das Verschwinden ihrer *Haupt*unterdeterminanten *allein* bestimmt wird, da sein von Herrn Frobenius gegebener Beweis[1]) durchaus elementarer Natur ist. Auf diese geringe Anzahl von Voraussetzungen ist deshalb Wert zu legen, weil es vom pädagogischen und vom systematischen Standpunkt aus wünschenswert ist, die Klassifikation, wie dies auch Herr Gundelfinger thut[2]), möglichst an den Anfang der Theorie der Kurven und Flächen zweiten Grades zu stellen. Ebenso wird die Ausführlichkeit der folgenden Betrachtungen, die sonst vielleicht zu grofs erscheinen könnte, dadurch gerechtfertigt, dafs dieselben nicht nur zur projektiven und metrischen Klassifikation führen, sondern auch die Möglichkeit, ihr die erwünschte Stellung zu geben, erweisen sollen.

Wir beginnen mit einer Übersicht über die im folgenden verwendeten

Bezeichnungen.

In der *Ebene* bedeuten x_1, x_2, x_3 oder x_i die Koordinaten eines Punktes, u_1, u_2, u_3 oder u_i die Koordinaten einer Geraden in einem beliebigen Dreieckskoordinatensystem. N_1, N_2, N_3 sind die Ecken des Koordinaten- oder Fundamentaldreiecks, S_1, S_2, S_3 die ihnen gegenüber liegenden Seiten desselben.

Ein kurz mit y bezeichneter Punkt hat die Koordinaten y_i, eine Gerade v die Koordinaten v_i.

Mit $|yz|$ bezeichnen wir die Verbindungslinie der Punkte y und z, mit (vw) den Schnittpunkt der Geraden v und w. Die Gleichungen $|yz| = v$ und $(vw) = y$ sagen demnach aus, dafs y und z zwei Punkte der Geraden v, bezw. v und w zwei Gerade des Punktes y sind.

---

1) Frobenius: Über das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen. Sitzungsberichte der Berl. Akad. 1894. I, S. 245 f.

2) Gundelfinger: Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte. Leipzig 1895.

Im *Raume* bedeuten x_1, x_2, x_3, x_4 oder x_i die Koordinaten eines Punktes, u_1, u_2, u_3, u_4 oder u_i die Koordinaten einer Ebene in einem beliebigen Tetraederkoordinatensystem, dessen Fundamentaltetraeder die Ecken N_1, N_2, N_3, N_4 und die Seitenebenen S_1, S_2, S_3, S_4 hat.

Der Punkt y hat die Koordinaten y_i, die Ebene v die Koordinaten v_i.

Die Verbindungslinie der Punkte y und z ist $|yz|$, die Schnittlinie der Ebenen v und w ist $|vw|$. Die Verbindungsebene der Punkte y, z, s ist $[yzs]$, der Schnittpunkt der Ebenen v, w, r ist (vwr). Die Gleichungen

$$|yz| = |vw|, \quad [yzs] = v, \quad (vwr) = y$$

bedürfen hiernach keiner weiteren Erklärung.

Von den *unendlich fernen Elementen* des Raumes unterscheiden wir alle übrigen Elemente desselben als „eigentliche" Elemente und nennen die ersteren deshalb auch „uneigentliche" Elemente. Die uneigentliche Gerade einer Ebene bezeichnen wir mit g_∞, ihre Koordinaten mit q_1, q_2, q_3, die uneigentliche Ebene des Raumes mit ε_∞, ihre Koordinaten mit q_1, q_2, q_3, q_4. $\varrho(D)$ ist die Zahl, die den *Rang der Determinante* D angiebt. $(y_i z_k)$ und $(y_i z_k s_l)$ sind abkürzende Bezeichnungen für die Determinanten

$$(y_i z_k) = \begin{vmatrix} y_i & y_k \\ z_i & z_k \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad (y_i z_k s_l) = \begin{vmatrix} y_i & y_k & y_l \\ z_i & z_k & z_l \\ s_i & s_k & s_l \end{vmatrix}.$$

Zu der *quadratischen Form*

$$f(x,x) = \sum a_{ik} x_i x_k \qquad (a_{ik} = a_{ki};\ i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

mit der Determinante

$$A = \sum \pm\, a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = |a_{ik}|$$

gehört

$$F(u,u) = \sum A_{ik} u_i u_k$$

als *adjungierte Form*;

$$f(x, y) = \sum_{i,k} a_{ik} x_i y_k = \sum_i y_i f_i(x) = \sum_i x_i f_i(y)$$

als *bilineare Form*;

$$f_i(x) = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{in} x_n$$

ist also die halbe partielle Ableitung von $f(x,x)$ nach x_i.

Für die durch einmaliges, bezw. mehrmaliges „Rändern" aus A hervorgehenden Determinanten benützen wir der Kürze halber manch-

mal auch die von Herrn Gundelfinger eingeführten Zeichen $\binom{u}{v}$, $\binom{u\,w}{v\,r}$ u. s. f.; es ist also z. B.

$$\binom{u}{v} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot\cdot & a_{1n} & u_1 \\ a_{12} & a_{22} & \cdot\cdot & a_{2n} & u_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdot\cdot & a_{nn} & u_n \\ v_1 & v_2 & \cdot\cdot & v_n & 0 \end{vmatrix}.$$

1. *Hülfsformeln für die Einteilung der Kurven zweiten Grades.* — Die in einem beliebigen Dreieckskoordinatensystem gegebene Gleichung einer Kurve zweiter Ordnung

$$(1) \qquad f(x,x) = \sum a_{ik} x_i x_k = 0 \qquad (a_{ik} = a_{ki};\ i,k = 1,2,3)$$

erhält, wenn man ein neues Koordinatendreieck einführt, dessen Ecken die Koordinaten y_i, z_i, s_i haben, die Form

$$f(y,y)\,x_1^2 + f(z,z)\,x_2^2 + f(s,s)\,x_3^2 + 2f(y,z)\,x_1x_2 + 2f(y,s)\,x_1x_3 + 2f(z,s)\,x_2x_3 = 0.$$

Der Schnitt der Kurve mit einer beliebigen Geraden $v = |yz|$ hat somit in dem auf dieser Geraden durch die Fundamentalpunkte y und z bestimmten Koordinatensystem die Gleichung

$$f(y,y)x_1^2 + f(z,z)x_2^2 + 2f(y,z)x_1x_2 = 0,$$

und durch den Rang und das Vorzeichen der Determinante

$$(2) \qquad D = \begin{vmatrix} f(y,y) & f(y,z) \\ f(y,z) & f(z,z) \end{vmatrix}$$

ist die Beschaffenheit dieses Schnittes bestimmt. Für $\varrho(D) = 0$ schneidet die Gerade v die Kurve, und zwar imaginär oder reell, je nachdem $D >$ oder < 0 ist; für $\varrho(D) = 1$ berührt sie dieselbe, und für $\varrho(D) = 2$ gehört sie ihr ganz an.

Der Rang von D ist somit durch die Lage der Geraden v in Bezug auf die Kurve allein bestimmt; er ist unabhängig von der Lage der Punkte y und z auf dieser Geraden, und wenn $\varrho(D) = 0$ ist, so gilt das Gleiche für das Vorzeichen von D.

Ist nun $F(u,u)$ die adjungierte Form von $f(x,x)$, so besteht durch Vermittelung der Gleichungen $v_i = (y_k z_l)$ $(i,k,l = 1,2,3)$ die Identität[1])

$$(3a) \qquad \begin{vmatrix} f(y,y) & f(y,z) \\ f(y,z) & f(z,z) \end{vmatrix} = F(v,v)$$

1) Gundelfinger: Vorlesungen etc. S. 27.

oder

(3b) $$D = V,$$

wenn wir

$$V = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & -v_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & -v_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & -v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \end{vmatrix}$$

setzen.[1]) *Die Determinanten* D und V sind aber nicht nur einander gleich, sondern sie *haben* auch *immer den gleichen Rang*. Um dies zu zeigen, ersetzen wir zunächst in (3a) $f(y,y)$, $f(z,z)$, $f(y,z)$ durch $F(v,v)$, $F(w,w)$, $F(v,w)$ und erhalten dann, da $A \cdot f(x,x)$ die adjungierte Form von $F(u,u)$ ist, die unter Zuziehung der Gleichungen

(4) $$y_i = (v_k w_l) \qquad (i,\ k,\ l = 1,\ 2,\ 3)$$

bestehende Identität

(5a) $$\begin{vmatrix} F(v,v) & F(v,w) \\ F(v,w) & F(w,w) \end{vmatrix} = Af(y,y),$$

aus der direkt folgt, daſs bei einer nicht entarteten Kurve die beiden durch einen nicht auf ihr liegenden Punkt y gehenden Tangenten imaginär oder reell sind, je nachdem $Af(y,y) >$ oder < 0 ist. Die linke Seite von (5a) kann aber noch auf eine andere Form gebracht werden. Ist $y = (vw)$ ein Kurvenpunkt, so müssen für ihn, da die durch ihn gehende Tangente die Koordinaten $\lambda v_i + \mu w_i$ hat, die fünf Gleichungen

$$f_i(y) - \lambda v_i - \mu w_i = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

$$\sum v_i y_i = 0, \quad \sum w_i y_i = 0$$

zugleich erfüllt sein, und aus ihnen ergiebt sich durch Elimination von y_i, λ, μ

$$\begin{pmatrix} -v & -w \\ v & w \end{pmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung sagt also dasselbe aus wie die Gleichung

$$F(v,v) \cdot F(w,w) - F^2(v,w) = 0,$$

---

1) Gewöhnlich setzt man $F(v,v) = -\begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix}$; es wird sich aber im folgenden als zweckmäſsig erweisen, das negative Vorzeichen in die Determinante aufzunehmen, also $F(v,v) = \begin{pmatrix} -v \\ v \end{pmatrix}$ zu setzen. — Zugleich sei bemerkt, daſs aus Gleichung (3a) unmittelbar folgt: es ist $F(v,v) >$ oder < 0, je nachdem die Gerade v die Kurve in zwei imaginären oder in zwei reellen Punkten schneidet.

und da beide Gleichungen von demselben Grade in den v_i und w_i sind, so können sich ihre linken Seiten nur durch einen Zahlenfaktor unterscheiden, der sich gleich A ergiebt. Man erhält somit

$$\begin{vmatrix} F(v,v) & F(v,w) \\ F(v,w) & F(w,w) \end{vmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} -v & -w \\ v & w \end{pmatrix}$$

und also aus (5a) die unter Zuziehung der Gleichungen (4) bestehende Identität

$$f(y,y) = \begin{pmatrix} -v & -w \\ v & w \end{pmatrix}$$

oder nach (2) und ausführlich geschrieben

$$\text{(5b)} \qquad D_{zz} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & -v_1 & -w_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & -v_2 & -w_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & -v_3 & -w_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 & 0 \\ w_1 & w_2 & w_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Da $\varrho(D)$, wie wir gesehen haben, von der Wahl des Punktes $y = (vw)$ auf der Geraden v unabhängig ist, wählen wir jetzt für w die Gerade mit den Koordinaten $w_k = 1$, $w_i = w_l = 0$ und erhalten so die Gleichung

$$\text{(6)} \qquad D_{zz} = V_{kk} \qquad (k = 1, 2, 3),$$

in der V_{kk} die zu dem Element a_{kk} gehörige Unterdeterminante von V bedeutet.

Ist nun $\varrho(D) = 0$, so ist nach (3b) auch $\varrho(V) = 0$. Ist $\varrho(D) = 1$, so mufs mindestens eine Hauptunterdeterminante von D, also mindestens ein V_{kk} von Null verschieden und somit auch $\varrho(V) = 1$ sein. Ist endlich $\varrho(D) = 2$, so mufs einerseits $V_{kk} = 0$ $(k = 1, 2, 3)$, andrerseits aber auch $V_{44} \equiv A = 0$ sein, weil dieser Fall nur bei einer entarteten Kurve zweiter Ordnung eintreten kann; es ist also dann $\varrho(V)$ mindestens $= 2$. Da aber

$$V_{kk,ll} = v_i^2$$

ist und nicht alle v_i zugleich Null sein können, mufs $\varrho(V) = 2$ sein. Es ist somit immer

$$\text{(7)} \qquad \varrho(D) = \varrho(V) \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Vertauscht man in den Gleichungen dieser Nummer x_i, bezw. y_i, z_i mit u_i, bezw. v_i, w_i, so erhält man die ihnen entsprechenden für die Kurven zweiter Klasse gültigen Formeln.

2. *Hülfsformeln für die Einteilung der Flächen zweiten Grades.* — Es sei

$$f(x,x)=\sum a_{ik}x_i x_k=0 \qquad (a_{ik}=a_{ki};\ i,k=1,2,3,4) \tag{8}$$

die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung in Tetraederkoordinaten, dann hat ihre Schnittkurve mit einer durch die drei Punkte y, z, s bestimmten Ebene v, die auf ein *ebenes* Koordinatensystem mit dem Fundamentaldreieck yzs bezogene Gleichung

$$\begin{aligned} f(y,y)x_1^2+f(z,z)x_2^2+f(s,s)x_3^2+2f(y,z)x_1x_2+2f(y,s)x_1x_3 \\ +2f(z,s)x_2x_3=0. \end{aligned} \tag{9}$$

Die Determinante dieser Schnittkurve ist somit

$$D=\begin{vmatrix} f(y,y) & f(y,z) & f(y,s) \\ f(y,z) & f(z,z) & f(z,s) \\ f(y,s) & f(z,s) & f(s,s) \end{vmatrix}, \tag{10}$$

und da der Rang von D den Grad ihrer Entartung angiebt, so mufs $\varrho(D)$ unabhängig sein von den zur Bestimmung der Ebene v gewählten Punkten y, z, s.

Ist nun die Fläche eine nicht entartete Fläche zweiter Ordnung, so ist v dann und nur dann eine Berührungsebene derselben, wenn die Gleichung $D=0$ für drei beliebige ihrer Punkte erfüllt ist. Andererseits mufs dann aber auch

$$F(v,v)=0$$

sein. Diese beiden Gleichungen sind, wenn man

$$v_1=(y_2z_3s_4),\quad v_2=-(y_1z_3s_4),\quad v_3=(y_1z_2s_4),\quad v_4=-(y_1z_2s_3) \tag{11}$$

setzt, von gleicher Dimension; ihre linken Seiten müssen somit bis auf einen Zahlenfaktor, der sich gleich der Einheit ergiebt, übereinstimmen, d. h. es besteht durch Vermittlung der Gleichungen (11) die Identität

$$\begin{vmatrix} f(y,y) & f(y,z) & f(y,s) \\ f(y,z) & f(z,z) & f(z,s) \\ f(y,s) & f(z,s) & f(s,s) \end{vmatrix}=F(v,v) \tag{12a}$$

oder

$$D=V, \tag{12b}$$

wenn

$$V=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & -v_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & -v_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & -v_3 \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & -v_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 \end{vmatrix}$$

gesetzt wird.

Die Gleichungen

$$f(y,y)f(z,z)-f^2(y,z)=0, \quad \text{bezw.} \quad F(v,v)F(w,w)-F^2(v,w)=0$$

sagen aus, dafs die Gerade $|yz|$, bezw. die Gerade $|vw|$ die Fläche (8) berührt. Ist nun $|yz|=|vw|$, also

$$(13) \quad \begin{aligned}&(v_1w_2):(v_1w_3):(v_1w_4):(v_2w_3):(v_2w_4):(v_3w_4)\\ &=(y_3z_4):(y_4z_2):(y_2z_3):(y_1z_4):(y_3z_1):(y_1z_2),\end{aligned}$$

so ergiebt sich wie oben, dafs unter Zuziehung dieser Gleichungen die Identität besteht

$$(14a) \quad F(v,v)F(w,w)-F^2(v,w)=A[f(y,y)f(z,z)-f^2(y,z)],$$

die durch ganz analoge Betrachtungen, wie sie in Nr. 1 angestellt wurden, die Form erhält:

$$\begin{vmatrix} f(y,y) & f(y,z)\\ f(y,z) & f(z,z)\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}-v & -w\\ v & w\end{pmatrix}$$

oder nach Gleichung (10)

$$(14b) \quad D_{uu}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & -v_1 & -w_1\\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & -v_2 & -w_2\\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & -v_3 & -w_3\\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & -v_4 & -w_4\\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 & 0\\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & 0 & 0\end{vmatrix}.$$

Endlich erhält man, wenn man in (12a) $f(y,y)$ etc. durch $F(v,v)$ etc. ersetzt, die unter Berücksichtigung der Gleichungen

$$y_1=(v_2w_3r_4), \quad y_2=-(v_1w_3r_4), \quad y_3=(v_1w_2r_4), \quad y_4=-(v_1w_2r_3)$$

identische, d. h. für den Schnittpunkt y dreier beliebigen Ebenen v, w, r, gültige Gleichung

$$(15a) \quad \begin{vmatrix} F(v,v) & F(v,w) & F(v,r)\\ F(v,w) & F(w,w) & F(w,r)\\ F(v,r) & F(w,r) & F(r,r)\end{vmatrix}=A^2 f(y,y),$$

die auch auf die Form gebracht werden kann:

$$(15b) \quad D_{zz,zz}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & -v_1 & -w_1 & -r_1\\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & -v_2 & -w_2 & -r_2\\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & -v_3 & -w_3 & -r_3\\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & -v_4 & -w_4 & -r_4\\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 & 0 & 0\\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & 0 & 0 & 0\\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}.$$

Da nun der Rang von D nicht von der Lage der Punkte y, z, s in der Ebene v abhängt, können wir in Gleichung (14b) $w_k = 1$, $w_i = w_l = w_m = 0$ setzen und erhalten dann

(16) $$D_{ss} = V_{kk} \qquad (k=1, 2, 3, 4)$$

und ebenso aus (15b), wenn wir außerdem noch $r_l = 1$, $r_i = r_k = r_m = 0$ setzen,

(17) $$D_{zz,ss} = V_{kk,ll} \qquad (k, l=1, 2, 3, 4).$$

Aus diesen Gleichungen folgt aber genau wie in Nr. **1**, daſs stets

(18) $$\varrho(D) = \varrho(V)$$

und auch

(19) $$\varrho(D_{ss}) = \varrho(V_w)$$

ist, wo V_w die auf der rechten Seite von (14b) stehende Determinante bedeutet.

Wenn man in den Gleichungen dieser Nummer überall die Punktkoordinaten mit den Ebenenkoordinaten vertauscht, so erhält man die ihnen entsprechenden für die Flächen zweiter Klasse gültigen Formeln.[1])

3. *Einteilung der Kurven zweiter Ordnung.* — Um eine solche Kurve, deren Gleichung

(1) $$f(x,x) = \sum a_{ik} x_i x_k = 0 \qquad (a_{ik} = a_{ki};\ i,k=1, 2, 3)$$

sein soll, zunächst *projektiv* einzuteilen, haben wir außer dem Grad ihrer Entartung, der durch den Rang ihrer Determinante A, also durch den Wert von $\varrho(A)$ bestimmt wird, nur noch für $\varrho(A) < 2$ festzustellen, ob die Kurve reell oder imaginär ist. Dazu dient uns die aus der Determinante A und ihren Hauptunterdeterminanten gebildete Reihe $AA_{kk,ll}$, A_{kk}, 1 oder einfacher geschrieben

(R) $$Aa_{ii},\quad A_{kk},\quad 1,$$

in der i und k unter den Zahlen 1, 2, 3 *immer so gewählt werden sollen, daſs ihre beiden ersten Glieder nicht zugleich verschwinden.*

Wir zeigen, daſs eine solche Aufstellung der Reihe (R) immer möglich und die Kurve reell oder imaginär ist, je nachdem diese Reihe Zeichenwechsel aufweist oder nicht.

Ist $\varrho(A) = 1$, so muſs nach dem in der Einleitung zitierten Satze mindestens eine Hauptunterdeterminante A_{kk} von Null verschieden sein,

1) Die Gleichungen von Nr. **1** und Nr. **2** lassen sich ohne Schwierigkeit auch durch rein analytische Betrachtungen herleiten. Der oben zu ihrer Herleitung eingeschlagene analytisch-geometrische Weg schlieſst sich aber enger an denjenigen an, der in der folgenden Untersuchung zur Klassifikation führt, und ist deshalb hier vorzuziehen.

und je nachdem $A_{kk} <$ oder > 0 ist, wird die Seite S_k des Koordinatendreiecks von dem durch (1) in diesem Falle dargestellten Geradenpaar in zwei reellen oder in zwei imaginären Punkten geschnitten, ist dieses selbst also reell oder imaginär.

Ist $\varrho(A) = 0$ und $a_{ii} = 0$, so ist die Ecke N_i des Koordinatendreiecks ein Kurvenpunkt; es mufs also mindestens eine der beiden durch sie gehenden Seiten desselben — es sei die Seite S_k — die Kurve in *zwei verschiedenen reellen* Punkten schneiden und somit sicher $A_{kk} < 0$ sein. Ist aber $\varrho(A) = 0$ und $A_{kk} = 0$, so berührt die Seite S_k die Kurve; es gehen also mindestens durch eine der beiden auf S_k liegenden Ecken des Koordinatendreiecks, d. h. durch N_i *zwei verschiedene reelle* Tangenten, es mufs mithin nach Nr. 1 $Aa_{ii} < 0$ sein. Unsere Überlegung zeigt somit, dafs auch für $\varrho(A) = 0$ die Reihe (R) in der verlangten Weise aufgestellt werden kann. Sie zeigt aber auch, dafs die Kurve für $\varrho(A) = 0$, falls in (R) ein Glied fehlt, immer reell ist, und dafs dann (R) immer einen Zeichenwechsel besitzt. Sie zeigt endlich, dafs, auch wenn in (R) kein Glied fehlt, das Auftreten eines negativen Gliedes, also das Auftreten von Zeichenwechseln genügt, um die Realität der Kurve festzustellen. Ist dagegen $A_{kk} > 0$ und $Aa_{ii} > 0$, so schneidet die Seite S_k des Koordinatendreiecks die Kurve nicht reell, und es gehen durch die auf S_k liegende Ecke N_i keine reellen Tangenten, die Kurve mufs also in diesem Falle imaginär sein.

Wir haben demnach, wenn wir mit $w(A)$ die Anzahl der Zeichenwechsel der geeignet aufgestellten Reihe (R) bezeichnen, für die Kurven zweiter Ordnung folgende *projektive* Einteilung:

Die durch Gleichung (1) gegebene Kurve ist für

1) $\varrho(A) = 0$ und
  α) $w(A) = 0$ ein imaginärer Kegelschnitt[1]),
  β) $w(A) = 1, 2$ ein reeller Kegelschnitt,
2) $\varrho(A) = 1$ und
  α) $w(A) = 0$ ein imaginäres Geradenpaar,
  β) $w(A) = 1$ ein reelles Geradenpaar,
3) $\varrho(A) = 2$ eine (immer reelle) Doppelgerade.

Die *metrische* Einteilung der Kurve ist bedingt durch die *projektive* Beschaffenheit ihres Schnittes mit der unendlich fernen Geraden g_∞. Bedeuten also in

$$D = \begin{vmatrix} f(y,y) & f(y,z) \\ f(y,z) & f(z,z) \end{vmatrix}$$

1) Unter einem Kegelschnitt verstehen wir, wie dies auch sonst vielfach geschieht, immer eine *nicht entartete* Kurve zweiter Ordnung.

y und z zwei *beliebige* Punkte von g_∞, so ist dieser Schnitt nach Nr. **1** für $\varrho(D) = 0$ ein imaginäres oder ein reelles Punktepaar, je nachdem $D >$ oder < 0, für $\varrho(D) = 1$ ein zusammenfallendes Punktepaar, für $\varrho(D) = 2$ endlich gehört g_∞ der Kurve ganz an.

Die metrische Einteilung der Kurve ist somit vollzogen. Es lassen sich aber aus den für sie gefundenen Kriterien noch die Koordinaten der beiden *beliebigen* uneigentlichen Punkte y und z durch die Koordinaten q_i von g_∞ ersetzen. Ist nämlich

$$Q = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & -q_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & -q_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & -q_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 & 0 \end{vmatrix},$$

so folgt aus Nr. **1**, Gleichung (3b) und (7) $D = Q$ und $\varrho(D) = \varrho(Q)$, wir erhalten demnach, wenn wir die Anzahl der Zeichenwechsel der Reihe Q, 1 mit $w(Q)$ bezeichnen, folgende *metrische* Einteilung für die Kurven zweiter Ordnung: Es gehört der Kurve an für

1) $\varrho(Q) = 0$ und
   - α) $w(Q) = 0$ ein imaginäres uneigentliches Punktepaar,
   - β) $w(Q) = 1$ ein reelles uneigentliches Punktepaar,
2) $\varrho(Q) = 1$ ein uneigentlicher Doppelpunkt[1]),
3) $\varrho(Q) = 2$ eine uneigentliche Gerade.

Wie die projektive und die metrische Einteilung über einander greifen, ist aus Tabelle I (S. 45) zu ersehen.[2])

---

1) Dieser Punkt ist zwar im Sinne der Theorie der algebraischen Kurven nur für $\varrho(A) > 0$ ein Doppelpunkt der Kurve. Da er aber *auf der Geraden* g_∞, worauf es hier allein ankommt, auch für $\varrho(A) = 0$ als Doppelpunkt erscheint, so mufs er konsequenter Weise in allen Fällen als Doppelpunkt bezeichnet werden. — Eine ähnliche Bemerkung, die nicht ausgeführt zu werden braucht, wäre bei der metrischen Einteilung der Flächen zweiter Ordnung zu machen.

2) Wenn die Kurve auf ein Koordinatendreieck bezogen ist, dessen Seite $x_3 = 0$ die Gerade g_∞ ist, so gestaltet sich ihre metrische Einteilung insofern viel einfacher, als dann die Betrachtungen von Nr. **1** überflüssig werden. Dann ist nämlich $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$ die Gleichung ihres Schnittes mit g_∞ in dem durch die Fundamentalpunkte $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ auf g_∞ fixierten Koordinatensystem, ihre metrische Einteilung ist also bestimmt durch $\varrho(A_{33})$ und den aus der Reihe A_{33}, 1 zu entnehmenden Wert von $w(A_{33})$. In der Tabelle tritt somit, falls die Kurve durch eine Gleichung in *Kartesischen Koordinaten* gegeben ist, A_{33} an Stelle von Q.

4. *Einteilung der ebenen Schnitte einer Fläche zweiter Ordnung.* — In Nr. 2 haben wir als Gleichung der Kurve, welche eine Ebene $v = [yzs]$ aus der Fläche

$$f(x, x) = \sum a_{ik} x_i x_k = 0 \qquad (a_{ik} = a_{ki};\ i, k = 1, 2, 3, 4) \tag{8}$$

ausschneidet, die auf ein *ebenes* Koordinatensystem bezogene Gleichung (9) gefunden. Die *projektive* Einteilung dieser Kurve ist somit nach Nr. 3 bestimmt durch den Rang der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} f(y, y) & f(y, z) & f(y, s) \\ f(y, z) & f(z, z) & f(z, s) \\ f(y, s) & f(z, s) & f(s, s) \end{vmatrix}$$

und durch die Anzahl der Zeichenwechsel der Reihe

$$(\mathrm{R}') \qquad DD_{zz,ss}, \quad D_{ss}, \quad 1,$$

wobei nur noch zu bemerken ist, dafs hier $\varrho(D)$ auch $= 3$ sein kann, da in Gleichung (9) alle Koeffizienten verschwinden müssen, sobald die Ebene v der Fläche ganz angehört.

Nach Nr. 2 stimmt aber der Rang von D mit dem Rang von

$$V = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & -v_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & -v_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & -v_3 \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & -v_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 \end{vmatrix}$$

überein, und es kann nach den Gleichungen (12b), (16) und (17) die Reihe (R') durch die Reihe

$$(\mathrm{R}'') \qquad VV_{kk,ll}, \quad V_{kk}, \quad 1 \qquad (k, l = 1, 2, 3, 4)$$

vertreten werden. Die *projektive* Einteilung des Schnittes einer beliebigen Ebene v mit der durch (8) gegebenen Fläche zweiter Ordnung ergiebt sich somit einfach aus den Werten von $\varrho(V)$ und $w(V)$.

Die *metrische* Einteilung dieses Schnittes, die selbstverständlich nur dann einen Sinn hat, wenn v eine eigentliche Ebene ist, hängt allein ab von dem Range und dem Vorzeichen der Determinante

$$D_{ss} = \begin{vmatrix} f(y, y) & f(y, z) \\ f(y, z) & f(z, z) \end{vmatrix},$$

wenn in ihr für y und z zwei uneigentliche Punkte der Ebene v genommen werden.

Da aber dann die Gerade $| yz | = | vq |$ die uneigentliche Gerade der Ebene v ist, stimmt nach Nr. 2, Gleichung (14b) und (19) hier D_{s_3} mit der Determinante

$$V_q = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & -v_1 & -q_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & -v_2 & -q_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & -v_3 & -q_3 \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & -v_4 & -q_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 & 0 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

in Wert und Rang überein, die metrische Einteilung der Schnittkurve ist also auch durch $\varrho(V_q)$ und den aus der Reihe

$$V_q, 1$$

zu entnehmenden Wert von $w(V_q)$ gegeben.

Die für unseren Schnitt giltige Tabelle V (S. 49) erhält man somit aus der Tabelle I einfach dadurch, dafs man in dieser A durch V und Q durch V_q ersetzt und ihr eine Kolonne für $\varrho(V) = 3$ hinzufügt.

(Fortsetzung folgt.)

Nachträglicher Zusatz: S. 22 Z. 12 v. o. ist statt „da sein von Herrn Frobenius gegebener Beweis durchaus elementarer Natur ist" zu lesen „da die von Gundelfinger (Journal f. Math. **91** (1881), 229 und von Frobenius (Sitzungsberichte der Berl. Akad. 1894. I. S. 245 f.) gegebenen Beweise dieses Satzes durchaus elementarer Natur sind" und dann Anm. 1) zu streichen.

S. 23 Z. 18 v. o. füge man die Anmerkung hinzu: Den Rang einer Determinante nennen wir r, wenn alle ihre Unterdeterminanten $(r-1)$ter Stufe, diejenigen $r$ter Stufe aber nicht sämtlich verschwinden. Eine nicht verschwindende Determinante hat also den Rang Null; eine verschwindende Determinante, deren Unterdeterminanten erster Stufe nicht sämtlich verschwinden, hat den Rang 1 u. s. w. Unsere Rangzahl ist somit identisch mit Sylvesters „nullity" (Amer. Journ. of Math. **6** (1884), 271) und der von Frobenius (Journ. f. Math. **82** (1877), 290) als Rang einer Determinante definierten Zahl insofern komplementar, als sich seine und unsere Rangzahl zum Grad der Determinante ergänzen.

Heidelberg, 21 Februar 1902.

Physikalische Probleme der Gleichstrommaschine.

Von A. Rotth in Berlin.

Die nahen Beziehungen zwischen Physik und Elektrotechnik lassen eine nähere Begründung überflüssig erscheinen, wenn in diesen Blättern von der Gleichstrommaschine gesprochen werden soll, in der Absicht, das Interesse für einige ihrer physikalischen Probleme von neuem anzuregen. Nach ihrer schnellen Entwickelung in den letzten Jahrzehnten ist die Gleichstrommaschine seit einiger Zeit in den Zustand eingetreten, wo nach allgemeiner Erfahrung umwälzende Änderungen vorläufig nicht zu erwarten sind, und wo das Streben nach ihrer weiteren Verbesserung und nach Erhöhung ihrer Leistungsfähigkeit zu vertiefter Behandlung solcher physikalischen Erscheinungen an ihr leitet, deren Behandlung während der Entwickelung mehr empirisch erledigt werden mufste. Ich beabsichtige nun in folgendem zunächst berichtartig die wesentlichsten Punkte zu besprechen, die auf die Ausgestaltung der jetzigen Gleichstrommaschine von Einflufs sind, und dabei besonders ihre gegenseitige Abhängigkeit hervortreten zu lassen. Der Zweck dieses ersten Teiles soll lediglich sein, eine knappe zusammenhängende Übersicht bekannter Dinge zu geben, etwa in dem Sinne des im „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung VII, 1" wiedergegebenen Vortrages von H. Goerges „Die praktische Berechnung der Dynamomaschinen, insbesondere für Gleichstrom", auf den ich hinweise, da das Folgende mit dem Inhalte jenes Vortrages in gegenseitig ergänzender Beziehung stehend gedacht werden kann. Im Anschlufs an den ersten Teil soll die durch die Ankerrückwirkung entstehende sogenannte Feldverzerrung eingehender betrachtet werden. Ich versuche damit, einen Beitrag zur Behandlung eines der wichtigsten Punkte der Dynamomaschine zu geben, unter Benutzung von Anschauungen, die von den gebräuchlichen teilweise abweichen. Der Zweck der ganzen Arbeit erlaubt die Beschränkung auf die Gleichstrommaschine einfachster Art, deren allgemeine Kenntnis natürlich vorausgesetzt ist.

I.

Bei der Bearbeitung des Entwurfes einer neu zu erbauenden Dynamomaschine verlangter Leistung die einander teilweise widersprechenden technischen und wirtschaftlichen Bedingungen in Einklang zu bringen, erfordert ein mehr oder weniger häufiges Ändern der einzelnen Teile der Maschine. An Rechnungen kommen bei dieser allmählich gestaltenden Thätigkeit vornehmlich zur Anwendung die Berechnung der elektromotorischen Kraft einer Maschine von gegebenen Verhältnissen und die Berechnung der Erregerwicklung auf den Feldmagnetschenkeln.

Die Formel für die E.M.K. einer zweipoligen Dynamomaschine:

$$e\,(\text{Volt}) = nzF\mathfrak{B}\,10^{-8}, \tag{1}$$

worin n die Umdrehungszahl des Ankers in der Sekunde bedeutet, z die Anzahl der induzierten Leiter auf dem Umfange des Ankers, F die dem Anker zugekehrte induzierende Fläche eines Poles in qcm, $\mathfrak{B}$ die Kraftliniendichte im Luftspalt zwischen Polfläche und Anker, beruht auf dem Grundgesetze der Induktion eines Leiters von gewisser Länge, der mit gewisser Geschwindigkeit die Kraftlinien eines magnetischen Feldes von der Dichte $\mathfrak{B}$ senkrecht durchschneidet. Die Länge der einzelnen Leiter erscheint in der Formel vertreten durch die eine Dimension der induzierenden Fläche F, die lineare Geschwindigkeit der Leiter durch die andere Dimension von F und die Umdrehungszahl. Daſs in der Formel nur die eine Polfläche auftritt, hat seinen einfachen Grund in der Parallelschaltung der beiden Ankerhälften durch die stromabnehmenden Bürsten. Bei ungleichmäſsiger Verteilung des Magnetismus im Luftspalte ist unter $\mathfrak{B}$ die mittlere Kraftliniendichte zu verstehen.

Der Formel (1) kann genügt werden durch einen Anker beliebiger Gröſse; bestimmt wird diese erst durch die der geforderten Leistung entsprechende Stromstärke. Im Beginne der Entwickelung der Dynamomaschine war man, in miſsverständlicher Übertragung des Gesetzes der gröſsten Leistung galvanischer Elemente bei gegebenem äuſseren Widerstande, vielfach der Meinung, daſs der Ankerwiderstand der Dynamomaschine eine gewisse erhebliche Gröſse haben müsse. Ein ähnliches Miſsverständnis, bestehend in der Verwechselung der gröſsten Leistung eines Elektromotors nach dem Jacobischen Gesetze mit dem Wirkungsgrade (Nutzeffekte), war noch in den 80er Jahren von Werner Siemens wiederholt richtig zu stellen. In Wirklichkeit schädigt der Ankerwiderstand durch die Stromwärme in den Ankerleitern unter allen Umständen den Wirkungsgrad der Maschine und ist deshalb thunlichst

klein zu halten. Ein kleiner Ankerwiderstand verlangt aber grofsen Querschnitt der Ankerleiter, damit grofsen Anker und grofse Abmessungen der ganzen Maschine, die dann wieder wegen zu hoher Herstellungskosten unwirtschaftlich werden kann. Praktisch hat sich nun, nachdem mehr und mehr der zulässigen Erwärmung der Maschinenteile Beachtung geschenkt ist, als bestimmend für die Abmessungen des Ankers die Bedingung herausgebildet, dafs die Oberfläche des Ankers (und ebenso die der anderen stromführenden Teile) grofs genug sei, um bei der zulässigen Temperaturerhöhung (im allgemeinen etwa 40°) alle durch den Strom, durch Wirbelströme und Hysteresis in den Leitern und im Ankereisen erzeugte Wärme durch Strahlung und Leitung an die Umgebung abführen zu können. Wie grofs dabei die für eine gewisse Wärmemenge erforderliche Oberfläche zu nehmen ist, hängt sehr von der Bauart der Maschine ab. Die Wärme wird hauptsächlich abgeführt durch Leitung an die umgebende Luft, und diese in regelmäfsiger Strömung bei niedriger Temperatur mit den warmen Oberflächen in Berührung zu bringen, wird bei den jetzigen Dynamomaschinen immer sorgfältig berücksichtigt. Wenn nun schon die Mitberücksichtigung der im Ankereisen entstehenden Wärme bei verschiedener Abkühlungsfähigkeit der Oberflächen die Wahl des Leiterquerschnittes erschwert, so wird die Aufgabe durch andere Umstände noch verwickelter. Zunächst ist von der Ankergröfse auch die induzierende Fläche abhängig, da man den von den Feldpolen umfafsten Bogen naturgemäfs so grofs nehmen wird, wie mit andern Bedingungen verträglich. Bei gröfserer induzierender Fläche, also bei gröfserem Kraftflusse $F \cdot \mathfrak{B}$, wird aber der Gleichung (1) mit einer geringeren Zahl Ankerleiter genügt, die infolgedessen einen entsprechend gröfseren Querschnitt haben können. Von dem Ankerdurchmesser hängt wieder sein Verhältnis zur Länge ab, das die Erfahrung wenigstens in weiteren Grenzen dahin festgelegt hat, dafs der gröfsere Anker eine relativ geringere Länge erhält. Aufser der Rücksichtnahme auf verschiedene andere weiterhin behandelte Einflüsse erschweren dann noch kleinere Umstände die Übersicht, so die Art der Isolation der Ankerleiter, das aus mancherlei praktischen Gründen schwankende Verhältnis der nutzbaren, wirklich induzierten Länge eines Leiters zu seiner ganzen Länge. Dieser Hinweis wird zur Genüge zeigen, dafs die einzelnen bestimmenden Gröfsen nicht in einfachen Verhältnissen zu einander stehen. Man ist hier, wie bei vielen andern technischen Aufgaben, immer wieder gern geneigt, eine rationelle Behandlung etwa nach Art des von Newton angegebenen Prinzips der mechanischen und phoronomischen Verwandtschaft zu versuchen, und thatsächlich stellen sich auch die Grund-

elemente des Prinzips, die Anschauung unterstützend, unwillkürlich von selbst ein, aber seine genauere rechnerische Benutzung scheitert immer schon bei den ersten Schritten an der Kompliziertheit der Aufgabe und an dem Einflusse solcher bestimmenden Gröſsen, die rechnerisch überhaupt nicht zu fassen sind. Hinsichtlich der ersten Bestimmung der Ankergröſse für eine gegebene Leistung ist man deshalb ganz auf versuchsweise, der Erfahrung entlehnte Annahmen angewiesen, die bei weiterer Bearbeitung der Aufgabe zu korrigieren sind. Die Erfahrungen sind vielfach in empirischen Formeln für die Ankergröſse zusammengefaſst, die gelegentlich zu Vergleichszwecken auch dienlich sein können, deren Benutzung aber immer die kritische Beachtung ihres Geltungsbereiches und ihrer Herkunft verlangt. Dasselbe gilt von den in verbreiteten Handbüchern enthaltenen Angaben über zulässige Stromdichte in den Ankerleitern, erforderliche Kühlfläche für den Anker und für die Schenkelwicklungen und über andere Verhältnisse, die ihrem Wesen nach so schwankend sind, daſs statt der bestimmten Angaben unbestimmte Betrachtungen der beeinflussenden Faktoren viel erwünschter wäre.

Die vorläufige Bestimmung der Ankergröſse giebt den ersten Anhalt zur Formgebung des Magnetgestelles unter geeigneter Wahl der Kraftliniendichte in den einzelnen Gestellteilen. Die typische Form moderner Gleichstrommaschinen ist vollständig symmetrisch mit gleichmäſsig auf die Schenkel verteilter Erregerwicklung, wie Fig. 1[1]) für eine zweipolige Maschine andeutet. Die zur Herstellung des gesamten magnetischen Kraftflusses $F \cdot \mathfrak{B}$ erforderlichen Ampèrewindungen in der Erregerwicklung sind nun nach der unübertrefflich einfachen, von Rowland, Werner Siemens, Kapp u. a. geschaffenen und in ihrer jetzigen Form von J. Hopkinson gegebenen Methode bestimmbar, der die fruchtbare Anschauung vom magnetischen Widerstande, der magnetomotorischen Kraft und deren Analogien mit den elektrischen Gröſsen zu Grunde liegen. Danach ist für jedes Centimeter Kraftlinienlänge[2]) in den einzelnen hintereinander geschalteten Teilen der magnetischen Kreise der Maschine zur Überwindung des magnetischen Widerstandes eine gewisse Anzahl Ampèrewindungen

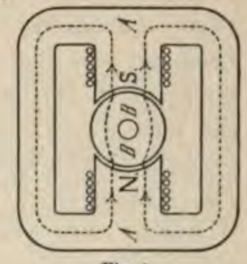


Fig. 1.

1) Die Figuren 1, 2, 4, 6 sind mit freundlicher Erlaubnis des Herrn Goerges seiner eingangs erwähnten Arbeit entnommen.

2) Der einfacheren Ausdrucksweise wegen ist hier wie im folgenden kein Unterschied zwischen „Kraftlinien“ und „Induktionslinien“ gemacht.

aufzuwenden, die von der Kraftliniendichte abhängt, für die Luft aus $0{,}4\pi(ni) = B$ zu berechnen, für die Eisenteile aus experimentell gewonnenen Tabellen oder Kurven zu entnehmen ist. Die Summe der so für die ganze Länge der Kraftlinien im äufseren Rahmen (Joch), in den Schenkeln, in dem Luftspalt und im Anker sich ergebenden Ampèrewindungen, einschliefslich eines erheblichen, noch näher zu besprechenden Zuschlages, ist von den Schenkelwicklungen zu führen. Die Rechnung gilt genau allerdings nur für geschlossene, gleichmäfsig bewickelte Eisenringe, und nicht für die magnetischen Kreise einer Dynamomaschine mit ihren sprungweise veränderlichen magnetischen Widerständen und verhältnismäfsig kurzen Spulen auf den Schenkeln. Aufserdem bereitet die nicht scharfe Begrenzung des magnetischen Feldes an den Polkanten, und die ungleiche Verteilung des Magnetismus unter der Polfläche bei Zahnankern in der Schätzung der wirklichen Gröfse der induzierenden Fläche und des magnetischen Widerstandes im Luftspalte einige Schwierigkeiten. Indessen giebt die Methode bei vorsichtiger Handhabung durchaus befriedigende Resultate und hat, seit etwas mehr als einem Jahrzehnt in allgemeinem Gebrauche, die frühere Unsicherheit der wichtigsten Berechnung der Dynamomaschine gründlich beseitigt. Die rationelle Entwickelung der Gleichstrommaschine ist ihr wesentlich zu verdanken, und selten wohl hat eine gut begründete wissenschaftliche Anschauung einen so handgreiflichen praktischen Nutzen gestiftet.

Vor Eingehen auf weitere Einzelheiten ist an dieser Stelle zweckmäfsig die wirkliche Ausführung der Schenkelwicklungen zu betrachten. Diese verursachen natürlich einen gewissen Verlust an elektrischer Leistung, der den Wirkungsgrad der Maschine herabsetzt. Indessen erfolgt ihre Dimensionierung im allgemeinen weniger mit Rücksicht auf diesen immer nur kleinen Verlust, als vielmehr im Hinblick auf genügende Kühlfläche zur Abführung der entstehenden Stromwärme. Die mafsgebenden Gesichtspunkte lassen sich kurz erläutern unter Annahme einer Nebenschlufsmaschine, bei der also zur Erzeugung der erforderlichen Stromstärke in den Windungen der Erregerwicklungen die volle Klemmenspannung der Maschine zur Verfügung steht. Die sinngemäfse Anwendung der Gesichtspunkte auf Reihenschlufsmaschinen bedarf dann keiner weiteren Erklärung.

In der vorläufig festgelegten Form der Maschine ist nach Schätzung ein gewisser Wickelraum von meist rechteckigem Querschnitte für die Erregerwindungen vorgesehen. Bei gegebener Klemmenspannung der Maschine handelt es sich zunächst um Bestimmung des passenden Drahtdurchmessers. Denkt man sich die Wicklung mit Draht von

gewissem Querschnitte ausgeführt, womit also bei bestimmtem Wickelraume auch die Windungszahl und der Widerstand der Wicklung gegeben ist, so entstehen die geforderten Ampèrewindungen bei einer bestimmten Spannung an den Spulenenden. Wenn man dabei ferner die Windungszahl verkleinert, aber unter Festhalten der mittleren Länge für die verbleibenden Windungen, so sinkt in demselben Verhältnisse der Widerstand der Wicklung und umgekehrt steigt die Stromstärke, die Ampèrewindungszahl bleibt damit erhalten. Sind demnach allgemein mittlere Windungslänge und Spannung gegeben, so entspricht einer gewissen Ampèrewindungszahl $(A-W)$ ein bestimmter von der Drahtwindungszahl unabhängiger Drahtquerschnitt. Die einfache Formel für diesen:

$$q = \frac{(A-W) \cdot l \cdot r}{e} \tag{2}$$

(worin q in qmm, die mittlere Windungslänge l in m, e in Volt ausgedrückt ist, während r den Widerstand von 1 m bei 1 qmm bedeutet) ist dadurch ohne weiteres verständlich. Dagegen ist die Drahtwindungszahl und damit der Wickelraum maſsgebend für den Wattverlust in den Spulen und für deren Kühlung; denn der geringeren Drahtwindungszahl entspricht eine höhere Stromstärke, und der Wattverlust steigt quadratisch mit dieser. Bezeichnet man mit n die Windungszahl einer Spule, mit i die Stromstärke, mit c einen Koeffizienten, der das Verhältnis des Wickelraumquerschnittes zu der Summe der in ihm enthaltenen Leiterquerschnitte ausdrückt, so kann die Formel (2) geschrieben werden

$$cqn = c\,\frac{(in)^2 \cdot l \cdot r}{ei}. \tag{3}$$

Darin ist aber cqn der Querschnitt des Wickelraumes, in die Ampèrewindungszahl, ei der Wattverlust. Da nun das Kupfergewicht dem Wickelraum proportional ist, so steigt es bei gleichem Wattverluste quadratisch mit der Ampèrewindungszahl. Es läſst sich weiter leicht zeigen, daſs, immer unter Annahme der gleichen mittleren Windungslänge, wobei also der Wickelraum nur in der Höhe parallel zur Schenkelaxe vergröſsert werden kann, bei gleicher Abkühlungsfläche für 1 Watt das Kupfergewicht der Ampèrewindungszahl einfach proportional ist. Die Schenkellänge beeinfluſst aber die Gröſse der ganzen Maschine, also die für Schenkel und Joch aufzuwendenden Ampèrewindungen, so daſs die Gewinnung einer gröſseren Spulenoberfläche unter den angegebenen Bedingungen wieder eine Steigerung der Ampèrewindungen im ganzen zur Folge hat. Eine nähere systematische Verfolgung dieser Verhältnisse ist schon deshalb zwecklos, weil die Dicke

der Isolation auf den Drähten kein festes Verhältnis zu dem Durchmesser hat, vielmehr aus praktischen Gründen sich stark und dabei ungleichmäfsig ändert. Ähnliches gilt von der Betrachtung des Einflusses der mittleren Windungslänge, über den hier nur beispielsweise bemerkt sein mag, dafs bei Ersatz gufseiserner viereckiger Magnetschenkel, wie sie in der Skizze, Fig. 1, angenommen sind, durch solche von magnetisch besser leitendem Stahlgufs und rundem Querschnitte mit angemessenen Verbreiterungen für die induzierende Fläche, unter sonst gleichen Umständen eine Kupferersparnis von mehr als 30% erzielt werden kann. Die wenigen Angaben und die Betrachtung ausgeführter Maschinen genügen aber auch zu der Einsicht, in wie hohem Grade Gröfse, Gewicht und Preis der Maschine von der Schenkelwicklung abhängt. Eine thunlichst niedrige Ampèrewindungszahl für die Erregung zu erhalten, ist deshalb eine der wichtigsten Sorgen beim Entwurfe einer Dynamomaschine.

Bei der oben verlassenen Bestimmung der Ampèrewindungen auf den Schenkeln war schon erwähnt, dafs die so gefundene Zahl noch durch einen erheblichen Zuschlag ergänzt werden müsse, richtiger gesagt durch mehrere Zuschläge, die gröfstenteils mehr durch Schätzung und Vergleich mit ausgeführten Maschinen, als durch Rechnung gefunden werden können.

Die sprungweise Änderung des magnetischen Widerstandes, besonders an den Luftspalten zwischen Schenkel und Anker veranlafst ein teilweises Ausgleichen der magnetischen Druckdifferenz auf Nebenwegen, statt durch den Anker hindurch, namentlich den Übergang von Kraftlinien unmittelbar von Pol zu Pol, die zwecklos vom Joch und von den Schenkeln zu führen sind. Die Weglänge der Kraftlinien ist dabei allerdings beträchtlich, ebenso aber auch der Querschnitt der magnetischen Nebenschliefsung durch die Luft. Aus der Analogie der Verteilung magnetischer Strömung in Zweigleitungen mit dem Ohmschen Gesetze ist nun leicht zu erkennen, dafs ein um so gröfserer Teil des gesamten Kraftflusses durch die Nebenschliefsungen gehen wird, je gröfser verhältnismäfsig der Widerstand in den Luftspalten zwischen Anker und Schenkel ist. Nun sind aus Gründen der Regulierung der Maschine, auf die hier nicht eingegangen werden soll, bei Maschinen gebräuchlicher Art zweckmäfsig die für die Luftspalten zu verwendenden Ampèrewindungen ungefähr gleich den Ampèrewindungen für den übrigen magnetischen Kreis zu machen. Ein kleiner Luftspalt verringert also nicht nur die unmittelbar für ihn erforderliche Erregung, sondern auch die Streuung, die Erregung für Joch und Schenkel, mittelbar auch die Querschnitte dieser Teile und, mit Rücksicht auf das über

die Schenkelwicklungen Gesagte, Gröfse und Gewicht der ganzen Maschine in so hohem Grade, dafs man im Hinblicke auf die nachfolgenden, seiner zu weit gehenden Verkleinerung entgegenstehenden Gründe, die Bemühungen zur Herstellung einer guten und wirtschaftlichen Dynamomaschine im wesentlichen für die richtige Bemessung des Luftspaltes aufzuwenden hat.

Die früher gebräuchlichen glatten Anker ergaben wegen des Raumbedarfes der Leiter auf dem Umfange von selbst einen im magnetischen Sinne grofsen Luftspalt. Diesen verkleinern zu können, war ein gewichtiger Grund für die Aufnahme des Zahnankers (Fig. 2), den man sich aus dem glatten entstanden denken kann zunächst durch Vergröfserung des Luftspaltes, Zusammenziehen der vorher dicht gereihten Leiter zu Gruppen mit Zwischenräumen und Ausfüllung dieser Zwischenräume durch Eisenkeile, die in der praktischen Ausführung als aus dem Ankerkern hervorragende Zähne erscheinen. Zu dem magnetischen Widerstande des eigentlichen Luftspaltes ist dann noch der Widerstand der Zähne zu rechnen, der je nach den Umständen einen gröfseren oder kleineren Teil von jenem beträgt, während der ganze Widerstand der Absicht gemäfs kleiner genommen wird als der Widerstand des Luftspaltes bei glattem Anker mit gleichem Gesamtquerschnitte der Leiter. Die Berechnung des magnetischen Widerstandes zwischen Schenkel und Anker ist, wie früher schon gesagt, beim Zahnanker etwas unsicher, da natürlich auch die Nuten zwischen den Zähnen Kraftlinien führen, deren Betrag bei hoher magnetischer Dichte in den Zähnen nicht unerheblich ist, und da ferner im eigentlichen Luftspalte die magnetische Dichte vom Zahn zur Nut und umgekehrt wechselt. Eine genaue Behandlung der so entstehenden Kraftlinienverteilung ist bis jetzt nicht durchgeführt, bereitet auch wegen der eigentümlichen magnetischen Eigenschaften des Eisens besondere Schwierigkeiten, ist aber keineswegs als überflüssig anzusehen. Denn aufser der doch immerhin wünschenswerten genaueren Berechnung des magnetischen Widerstandes würde die Kenntnis der wirklichen Kraftlinienverteilung im Zahnanker einen Schlufs über die Wirbelstromverluste in den Leitern ermöglichen, die in den Nuten doch nicht vollständig magnetisch geschirmt sind. Aufserdem mufs sich die ungleiche Verteilung der

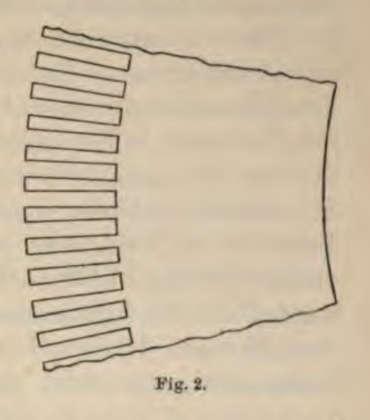


Fig. 2.

Kraftlinien im Luftspalte auf eine gewisse Tiefe in das Eisen des Schenkels hinein erstrecken und dort durch Wirbelströme und Hysteresis Verluste verursachen, die sich durch Erhitzung des Poleisens kundgeben. Thatsächlich hat der neuerdings vielfach durchgeführte Ersatz der massiven Pole durch solche nach Art der Anker aus dünnen Eisenblechen mit isolierenden Zwischenlagen hergestellte eine Verringerung der Verluste durch die Wirbelströme ergeben. Über die Gröfse der Hysteresisverluste gehen die Ansichten aber weit auseinander, über die Ausdehnung der wechselnden magnetischen Dichte im Poleisen in der Nähe des Luftspaltes fehlt noch jede klare Vorstellung. Diese Frage hängt übrigens nahe zusammen mit der weiterhin eingehend behandelten sogenannten Feldverzerrung.

Zu den besprochenen, die Verhältnisse der Maschine schon bei stromlosem Anker beeinflussenden Erscheinungen treten nun noch die durch den stromgebenden Anker veranlafsten, die teilweise wieder mit dem Luftspalte in Wechselwirkung stehen. Der Widerstand des Ankers und der Übergangswiderstand der Bürsten veranlassen einen mit der Stromstärke steigenden Abfall der Klemmenspannung, der durch stärkere Induktion der Ankerleiter ausgeglichen werden mufs. Bei dem immer verhältnismäfsig kleinen Ankerwiderstande ist der Einflufs dieses Umstandes auf die Schenkelerregung im allgemeinen nicht grofs und bedarf hier nur der Erwähnung. Viel einflufsreicher aber sind die Erscheinungen, die unter der Bezeichnung „Ankerrückwirkung“ zusammengefafst werden und die an Hand der schematischen Skizze Fig. 3 zunächst im Zusammenhange kurz erläutert sein mögen. Die Leiter auf dem Umfange des Trommelankers führen bei der durch Pfeil angegebenen Drehrichtung und der bezeichneten Polarität der Feldmagnete Strom in den durch Kreuz und Punkt angedeuteten Richtungen, wobei der letztere (Pfeilspitze) die Richtung vom Papier zum Beschauer bedeutet. Der Wechsel der Stromrichtung in den Leitern beim Übergange aus dem magnetischen Felde des einen Poles in das des anderen darf sich nun bekanntlich erst vollziehen, nachdem die gerade durch die Bürsten kurz geschlossene Windung bereits in die Nähe des anderen Poles gekommen ist, damit während des Kurzschlusses die der Selbstinduktion des Leiters entsprechende magnetische Energie ohne Funkenbildung am Kommutator durch die Einwirkung der an-

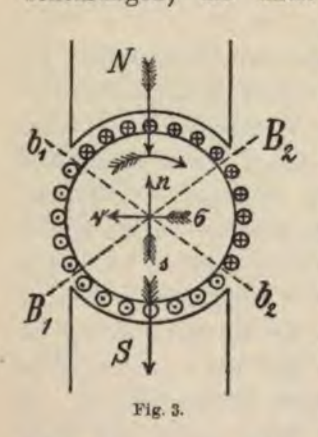
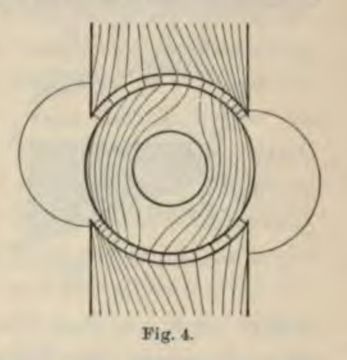


Fig. 3.

laufenden Polspitze in Energie gleicher Gröfse mit entgegengesetztem Zeichen verwandelt wird. Die Bürsten sind also (bei einem Generator) im Sinne der Drehrichtung etwa in die Stellung $b_1 b_2$ vorzuschieben. Denkt man sich dazu die symmetrische Gerade $B_1 B_2$ an den andern beiden Polspitzen vorbeigezogen, so enthält die Zone $b_1 B_1$ bezw. $B_2 b_2$ auf beiden Seiten des Ankers Leiter, die wenig oder garnicht von den Polen beeinflufst sind. Die Ampèrewindungen dieser Leiter suchen aber den Anker in der Richtung ns zu magnetisieren, entgegengesetzt der Richtung NS der Feldpole, und diese auf Entmagnetisierung des magnetischen Kreises wirkenden Ampèrewindungen müssen wieder durch einen mit der Stromstärke des Ankers steigenden Zuschlag zu der Felderregung ausgeglichen werden. Durch die sogenannte Sehnenwicklung des Trommelankers läfst sich übrigens erreichen, dafs die Leiter innerhalb der Zone $b_1 B_1$ bezw. $B_2 b_2$ Strom abwechselnder Richtung führen, die entmagnetisierenden Ampèrewindungen auf dem Anker damit wesentlich herabgesetzt werden. Gegen diese natürlich nur grobe, aber anschauliche Vorstellung dürfte wenig einzuwenden sein. Viel schwieriger aber ist die Wirkung der Ampèrewindungen auf dem Anker zu bestimmen, die durch die Leiter zwischen $b_1 B_2$ bezw. $B_1 b_2$ unter den Polen erzeugt werden. Diese Windungen suchen den Anker in der Richtung $\nu\sigma$ zu magnetisieren, senkrecht zur Richtung des magnetischen Feldes zwischen Anker und Schenkeln; das Zusammenwirken beider Felder ergiebt eine Verzerrung der bei stromlosem Anker symmetrisch zu der Schenkelachse verlaufenden Kraftlinien, sodafs deren Dichte an der im Sinne der Drehung vorderen Polkante geschwächt wird, an der anderen dagegen verstärkt (Fig. 4). Dabei wird infolge der mit steigender Magnetisierung des Eisens sinkenden Permeabilität der magnetische Widerstand des Kreises in der Umgegend des Luftspaltes erhöht, gleichzeitig damit die Streuung, und zur Erhaltung der normalen Spannung der Maschine wird eine beträchtliche weitere Vermehrung der Erregerwindungen notwendig. Aus nahe liegenden Gründen hat die Feldverzerrung in den davon betroffenen Eisenteilen auch eine Vergröfserung der Verluste zur Folge; vor allem aber ist die sichere Stromwendung davon abhängig, da ja der Magnetismus der Polkante, unter deren Einflufs sich die Wendung zu vollziehen hat, nach einem gewissen Gesetze mit steigender Ankerstromstärke schwächer wird. Bei der Unsicherheit, die der Theorie der Stromwendung trotz der


Fig. 4.

in vieler Hinsicht klärenden Arbeiten von Kapp, Arnold, Fischer-Hinnen u. a. immer noch anhaftet, ist bis jetzt nicht anzugeben, welche magnetische Dichte an der wendenden Polkante vorhanden sein muſs, um unter bestimmten Umständen noch funkenfreie Stromwendung zu erzielen. Da man darin im wesentlichen noch auf vergleichende Erfahrungen an ausgeführten Maschinen angewiesen ist, so hat die Bestimmung der Kraftlinienverteilung bei stromgebendem Anker bisher im allgemeinen nicht die eingehende Beachtung gefunden, die wegen des Zusammenhanges mit der Stromwendung und aus anderen Gründen erwünscht ist, um die Theorie der Gleichstrommaschine allmählich zu vervollkommnen. Die folgenden Beiträge dazu werden Anlaſs geben, auch auf andere, noch nicht berührte Punkte einzugehen.

II.

Zur näheren Bestimmung der durch die stromführenden Ankerleiter unter den Polen verursachten ungleichförmigen Verteilung der Kraftlinien zwischen Schenkel und Anker hat Herr Kapp folgenden Weg eingeschlagen.[1]) Man denke sich einen Teil der Ankeroberfläche mit der zugehörigen Polfläche in eine Ebene abgewickelt (Fig. 5) und zwischen beiden die stromführenden Leiter zu einer Stromschicht vereinigt, sodaſs auf jedes Centimeter des Ankerumfanges die Stromstärke i (in Amp.) entfällt. Jeder Stromfaden sucht um sich ein zirkulares magnetisches Feld zu erzeugen, das mit zweimaliger Durchbrechung des Luftspaltes von der Breite d halb im Feldpole, halb im Anker verläuft. Kapp nimmt nun an, daſs der magnetische Widerstand des Eisens sehr klein ist gegen den Widerstand des doppelten Luftspaltes, daſs also die ganze Kraftwirkung eines Stromfadens von der Breite dx in dem Luftspalte konzentriert wird. Da die Arbeit des Einheitspoles beim einmaligen Umkreisen des Stromfadens $0{,}4\,\pi i dx$ ist, so wird in

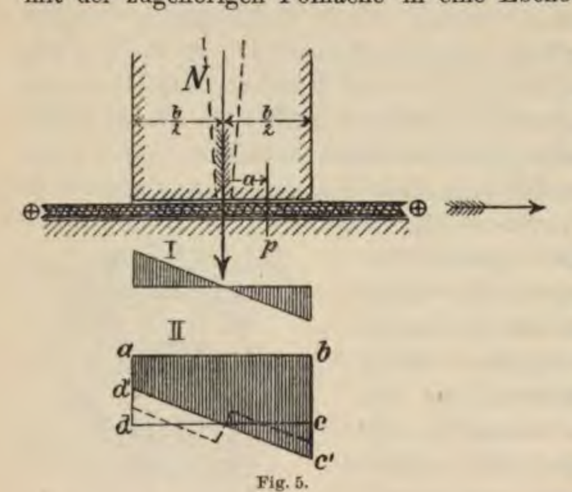


Fig. 5.

1) Kapp, Dynamomaschine, 1899, S. 208 ff.

einem Punkte des Luftspaltes, der wenigstens so weit von ihm abliegt, um die zur Stromschicht senkrechten Kraftlinien innerhalb des Luftspaltes als Gerade ansehen zu können, die von dem Stromfaden erzeugte Kraftliniendichte $dB = \frac{0,4\pi i dx}{2d}$. Unter Vernachlässigung der stärker gekrümmten oder garnicht durch das Eisen sich schliefsenden Kraftlinien in nächster Nähe des Stromfadens ist die Wirkung aller Stromfäden auf einen Punkt p im Abstande a von der Mittellinie zu summieren, wobei im Sinne der Voraussetzung nur die unter dem Pole selbst liegenden Stromfäden zu berücksichtigen sind. Wenn dabei die Richtung der Kraftlinien von oben nach unten als positiv angesehen wird, so entsteht unter Beachtung, dafs bei den in der Figur angedeuteten Verhältnissen die Stromfäden links von p in positivem, die rechts von p in negativem Sinne auf ihn wirken:

$$B = \int_{-\left(\frac{b}{2}+a\right)}^{-\frac{b}{2}+a} \frac{0,4\pi i dx}{2d} = \frac{0,4\pi i}{d} \cdot a. \tag{4}$$

Wie schon aus Symmetriegründen folgt, ist die Gesamtwirkung der Stromschicht auf einen Punkt in der Mittelebene gleich Null, während für die Polkanten rechts und links der Wert bezw. zu $\pm \frac{0,4\pi i}{d} \cdot \frac{b}{2}$ wird. In graphischer Darstellung giebt danach Fig. 5 I die magnetische Wirkung der Stromschicht für sich, und wenn in II das Rechteck $abcd$ die gleichmäfsige Kraftlinienverteilung zwischen Pol und stromlosem Anker bedeutet, so erhält man durch Addition der Werte aus I zu denen in II in dem Trapez $abc'd'$ die Darstellung der Verteilung bei stromführendem Anker. Selbstverständlich würden in Wirklichkeit wegen der nicht scharfen Begrenzung der magnetischen Felder die Figuren sanfte Übergänge der verschiedenen Zustände zeigen. Damit würden also magnetische Schwächung und Verstärkung der Polkanten proportional der Ankerstromstärke sein, und die in der Praxis übliche Regel näher begründet, dafs zur Erhaltung genügender magnetischer Dichte an der wendenden Polkante die Ampèrewindungen auf den Schenkeln, genauer die zur Überwindung des magnetischen Widerstandes des Luftspaltes erforderlichen, im Verhältnisse zu den Ampèrewindungen auf dem Anker nicht unter ein gewisses Mafs heruntergehen dürfen.

Diese wohl allgemein angenommene Bestimmung der Feldverzerrung soll natürlich die Erscheinungen nur angenähert wiedergeben. Es fragt sich aber, ob die Annäherung grofs genug ist, ob die vereinfachenden

Annahmen noch zulässig sind. Bei Zahnankern kommt zu dem Widerstande des eigentlichen Luftspaltes noch der Widerstand der Zähne hinzu, der bei ausgeführten Maschinen sehr verschieden ist, kaum unter 15% des ganzen Widerstandes sinkt, aber auch mehr als die Hälfte davon beträgt. Bei so hohen Werten des Zahnwiderstandes kann die Einführung eines äquivalenten Luftspaltes wegen der veränderlichen Permeabilität des Eisens die Anwendbarkeit der Formel (4) kaum noch genügend sichern. Es mufs ferner zweifelhaft erscheinen, ob der Widerstand im Eisen des Schenkels und des Ankers so klein ist, wie die Ableitung der Formel voraussetzte. Die von dem Ankerstrome in der Umgebung des Luftspaltes erzeugten magnetischen Kreise würden sich bei nicht erregter Maschine schematisch etwa nach Figur 6 gestalten. Bei dem durch die Polspitzen gehenden Kreise ist ersichtlich der im Eisen verlaufende Teil so grofs, dafs wenigstens eine grobe Schätzung des Verhältnisses zwischen Eisenwiderstand und Luftwiderstand angeregt wird. Für eine neuere Maschine ergab sich beispielsweise, dafs unter Annahme gufseiserner Schenkel bei nicht erregter Maschine und gröfster beim Gebrauche noch zulässiger Ankerstromstärke das fragliche Verhältnis etwa 1:2 sein dürfte. So roh nun auch dies Ermittelungsverfahren hier sein mag, so macht es doch die Zulässigkeit der Annahme unbedeutenden Eisenwiderstandes mindestens zweifelhaft. Und dabei bleibt noch, wie hier schon betont werden mag, die Frage offen, ob nicht etwa bei erregter Maschine der fragliche Eisenwiderstand gröfser ist. Die aus Formel (4) für die Polspitzen sich ergebenden Werte würden dann bedeutend zu grofs ausfallen. Das legen auch Versuchsergebnisse guter Maschinen von verhältnismäfsig hoher Leistungsfähigkeit nahe. Wenn auch sicher die Stromwendung nicht allein von der magnetischen Dichte der Polkante abhängt, sondern auch von der bis jetzt noch nicht zu bestimmenden Form des magnetischen Feldes an der Wendestelle, so ist doch nicht wahrscheinlich, dafs die Stromwendung ohne Bürstenverschiebung noch befriedigend bis zu Ankerstromstärken erfolgen könnte, bei denen nach Formel (4) die Polkante bis auf einen kleinen Teil des Anfangswertes geschwächt sein würde. Bemerkt sei noch, dafs die Ableitung der Formel auch keinen Anhalt zur Beurteilung giebt, wie weit die Feldverzerrung sich in das Schenkeleisen hinein erstreckt. Unbefriedigend endlich erscheint vor allem bei der benutzten Anschauung der Umstand, dafs sie keine Erklärung für das hindernde oder fördernde Drehmoment

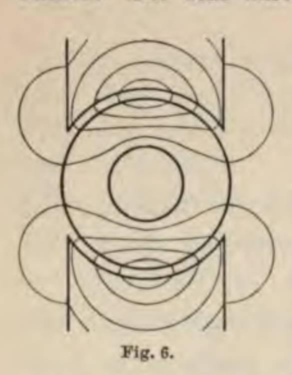


Fig. 6.

am Generator oder Motor giebt, da alle vom Anker ausgehenden Kräfte senkrecht zur Stromschicht stehen, also durch den Mittelpunkt des Ankers gehen, während doch die Erläuterung der Feldverzerrung die des Drehmomentes mit enthalten müſste.

Zur Gewinnung einer anderen Vorstellung über das Wesen der Ankerrückwirkung sei zunächst auf die elementaren magnetischen Erscheinungen bei stromdurchflossenen Leitern eingegangen. Ein einzelner, genügend langer gerader Stromfaden bildet in magnetisch homogenem Mittel ein zirkulares Feld um sich, dessen Intensität im Abstande a für Luft durch $\frac{2i}{a}$ gegeben ist. Zwei einander nahe gerückte Stromfäden werden teils von gemeinschaftlichen Kraftlinien umschlungen, teils einzeln von zwischen ihnen durchgehenden Kraftlinien, die beim Näherrücken der Stromfäden mehr und mehr verschwinden. Eine ebene Stromschicht von geringer Dicke und gleichmäſsiger Stromdichte kann aus dicht aneinander gereihten Stromfäden zusammengesetzt gedacht werden. In der Mitte der Stromschicht (Fig. 7) verschwinden wieder aus Symmetriegründen alle Kraftkomponenten senkrecht zur Stromschicht, und wenn diese unbegrenzt nach beiden Seiten verbreitert gedacht wird, so sind sämtliche Kraftlinien ihr parallel, da jeder Faden in endlicher Entfernung als Mitte angesehen werden kann. Für einen Punkt p der seitlich begrenzten Stromschicht ergeben sich die zu ihr senkrechten Kraftkomponenten nach Fig. 7, wenn a den Abstand des Punktes p und x den eines Stromfadens von der Mitte der Stromschicht bedeutet, unter Berücksichtigung der entgegengesetzt wirkenden Kräfte der Stromfäden rechts und links von p aus:

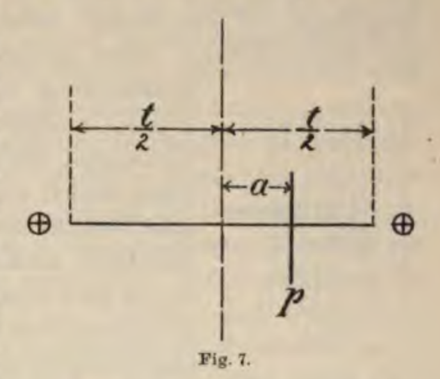


Fig. 7.

$$\mathfrak{B} = \int_{-\frac{b}{2}}^{a} \frac{0{,}2\, i\, dx}{a-x} - \int_{a}^{\frac{b}{2}} \frac{0{,}2\, i\, dx}{x-a} = \lg n \frac{\frac{b}{2}+a}{\frac{b}{2}-a},$$

wenn i in Ampère eingeführt wird. Die aus dieser Formel sich ergebenden Werte sind im Vergleich zu den bei Dynamomaschinen zu beachtenden magnetischen Kräften so klein, daſs praktisch auch bei begrenzten breiteren Stromschichten die Kraftlinien als im wesentlichen parallel zur Schicht verlaufend angesehen werden können.

Ein senkrecht zum Stromfaden gerichtetes magnetisches Feld übt nun auf jenen einen senkrecht zu beiden gerichteten Druck aus (Fig. 8), dessen Entstehung gewöhnlich so erläutert wird, dafs die den Feldkraftlinien parallelen Komponenten der Stromkraftlinien, wie sie kurz unterschieden werden mögen, auf der einen Seite des Stromfadens eine Verstärkung, auf der anderen eine Schwächung des Feldes herbeiführen. Die dichteren Kraftlinien sollen dann den Leiter nach den weniger dichten hin zu verschieben suchen. Diese Erklärung auf die begrenzte Stromschicht in senkrecht zu ihrer Breitenausdehnung gerichtetem Felde auszudehnen, würde schwierig sein, auf die unbegrenzte überhaupt nicht möglich. Aber auch für den Stromfaden erscheint die Erklärung nicht logisch. Hält man an der Anschauungsweise der Kraftlinientheorie fest, so können nur Kraftlinien auf Kraftlinien wirken, nicht aber Kraftlinien auf Stromfäden, wenn man auch den letzteren Ausdruck der Bequemlichkeit halber gelegentlich wählen mag. Nun fällt die Kraftwirkung eines Stromfadens auf einen äufseren Punkt, unähnlich allen sonst bekannten Kraftwirkungen, nicht in die Richtung der Verbindungslinien beider, sondern senkrecht dazu. Folgerichtiger mufs deshalb erscheinen, nicht die den Feldkraftlinien parallelen, sondern die zu ihnen senkrechten Komponenten der Stromkraftlinien als unmittelbare Ursache des Druckes auf den Stromfaden anzusehen, wobei übrigens gleichzeitig die oben vorausgesetzte feldverändernde Wirkung der parallelen Komponenten beibehalten werden kann. Sich kreuzende Kraftlinien zur Erläuterung einer magnetischen Erscheinung darzustellen, ist zwar im allgemeinen nicht üblich, aber auch nicht widersinnig, denn die Kräfte verschiedener Herkunft auf denselben Punkt können nach Befinden entweder einzeln oder geometrisch vereinigt betrachtet werden. Mit wenigstens demselben Rechte, wie nach der ersten Erklärungsweise, kann deshalb die Thatsache des Druckes eines magnetischen Feldes auf den Stromfaden in der Weise beschrieben werden, dafs beim Sehen in der Richtung des Feldes und des Stromes die zum Felde senkrechten Stromkraftlinien vor dem Leiter zusammendrückend, hinter dem Leiter zusammenziehend auf die Feldkraftlinien wirken, deren gegenwirkender Querdruck die vom Felde auf den Stromfaden ausgeübte Kraft darstellt. Für den Stromfaden ist es praktisch unerheblich, wie man sich die Wechselwirkung zwischen ihm und dem äufseren Felde vorstellt, bei der zur Richtung des letzteren senkrechten Stromschicht dagegen ist die zweite Vorstellungsart jedenfalls fafslicher und giebt auch bei seitlich unbegrenzter Schicht eine unmittelbare Er-

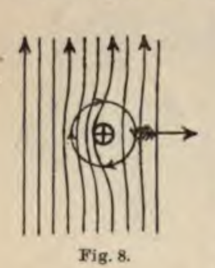


Fig. 8.

klärung der Verschiebungskraft quer zu den Feldkraftlinien. Diese als Träger der Verschiebungskraft müssen daher nach der entgegengesetzten Richtung und entgegen ihrem Querdrucke zusammengeschoben werden. Nun können aber die Feldkraftlinien selbst wieder aufgefaſst werden als Stromkraftlinien eines an geeigneter Stelle anzunehmenden Stromsystems. Wendet man deshalb rückwärts die obige Vorstellung unter Festhalten derselben Richtungsbeziehungen an zur Erkennung der Wirkung des supponierten Stromsystemes auf die von der Stromschicht ausgehenden Kraftlinien, so zeigt sich, daſs die Kraftlinien der Stromschicht ihrerseits durch die Feldkraftlinien auf beiden Seiten der Stromschicht von dieser abgerückt werden.[1]) Beim Übergange von der Stromschicht im homogenen magnetischen Mittel zu den Verhältnissen in der Dynamomaschine, wo der Raum teilweise durch das gut leitende Eisen ausgefüllt wird, ist zu beachten, daſs der Verlauf der von der Stromschicht des Ankers, wie sie zunächst wieder angenommen wird, ausgehenden Kraftlinien durch die Schenkel wesentlich verändert wird. Während beim frei liegenden, mit Strom versehenen Anker die äuſseren Kraftlinien, von breiteren Durchbruchstellen in der Nähe des neutralen Durchmessers abgesehen, die Schicht zu beiden Seiten des Ankers im wesentlichen parallel begleiten werden, bewirkt die Gegenwart der vorläufig nicht erregten Schenkel in der zusammengesetzten Maschine ein Zusammenschrumpfen der sie durchquerenden Ankerkraftlinien, da deren Querdruck im Eisen verringert ist. Infolge dessen werden, um rein anschaulich zu reden, die Durchbruchstellen der Kraftlinien in der Stromschicht sich näher an und teilweise unter die Pole ziehen (vgl. Fig. 6). Auf diese, auch in der Elektrostatik betrachteten und dort wegen der nur kleinen Werte der Dielektrizitätskonstanten bequemer übersichtlichen Erscheinungen braucht hier nicht näher eingegangen zu werden. Dabei werden die der Stromschicht parallelen Kraftkomponenten teils im Luftspalte, teils im Schenkeleisen verlaufen. Die Herstellung des induzierenden Schenkelfeldes wird dann ferner bewirken, daſs die Dichte der genannten Komponenten abnimmt, daſs damit also ein Teil der vorher im Luftspalte verlaufenden in den Schenkel eintritt. Die Dichtenänderung der Feldkraftlinien im Schenkel kann dann aber nicht mehr durch eine Gerade dargestellt sein, sondern muſs sich ähnlich wie die Änderung des Luftdruckes mit der Höhe ergeben (Fig. 9), während eine einzelne Stromkraftlinie etwa nach der

1) Dieses Ergebnis würde im Wesen übereinstimmen mit dem von Werner von Siemens gefolgerten über die Wirkung magnetisierender Kräfte verschiedener Richtungen. (Vergl. Monatsberichte der Berliner Akad. d. Wissensch. v. 23. Juni 1881 und 23. Okt. 1884).

Kurve *s* geformt sein würde, und die Verteilung der letzteren Kraftlinien auf Luftspalt und Schenkel müſste derart sein, daſs in beiden die Feldkraftlinien ohne schroffe Richtungsänderungen zusammengedrückt werden. Der Verlauf der ganzen Feldverzerrung erscheint damit allerdings viel verwickelter als nach der Kappschen Anschauung und vorläufig der genaueren Bestimmung unzugänglich; andererseits aber schlieſst die hier gegebene Betrachtung unmittelbar die Erklärung des Drehmomentes ein. Beiläufig mag noch bemerkt sein, daſs diese Betrachtungsweise auch in der Anwendung auf die Unipolarmaschine sehr bequem erscheint, und daſs sich manche andere Erscheinungen zwanglos damit übersehen lassen.

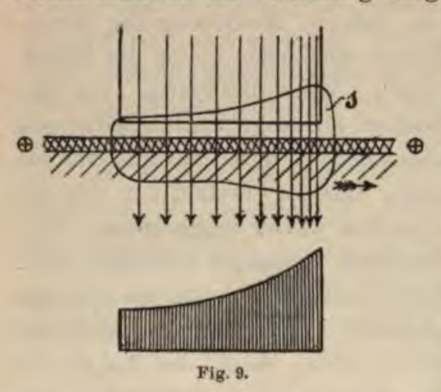
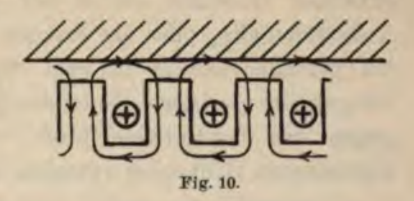


Fig. 9.

Die Erscheinungen beim Zahnanker dürften die praktische Berechtigung der benutzten Vorstellung unterstützen. Es war zu schlieſsen und ist von Mordey durch Versuche bestätigt, daſs die Ankerleiter in den Nuten keinen nennenswerten magnetischen Druck im Schenkelfelde erfahren, so lange die magnetische Induktion in den Zähnen nicht groſs ist, und die übrigen Verhältnisse derart sind, daſs durch die Nuten nur wenig Kraftlinien gehen. Die Leiter sind durch die Zähne magnetisch geschirmt, und die Kräfte greifen hauptsächlich an diesen an. Es ist nun oft darüber gesprochen, wodurch denn in diesem Falle das Drehmoment zu erklären ist, das unter sonst gleichen Bedingungen durchaus dasselbe ist, als wenn es von einer über die Zähne gelegten Stromschicht gleicher Gesamtstromstärke hervorgebracht wäre. Dobrowolsky[1]) betrachtet zur Behebung des Zweifels nicht die Leiter in einer einzelnen Nut, sondern die vollständige zugehörige Ankerspule und den von ihr eingeschlossenen veränderlichen Kraftfluſs. Die daraus gezogene Erklärung kann genügen oder nicht, je nach dem augenblicklichen Zwecke; die eigentliche Schwierigkeit ist aber nur umgangen. Denn die Leiter einer Nut würden unter Vermittlung der Zähne einen magnetischen Druck auf die Feldkraftlinien auch dann ausüben, wenn sie nicht Teile einer Ankerspule wären. H. du Bois[2]) erklärt dagegen die Erscheinung durch die Darlegung, daſs ein zirkular

1) Elektrotechn. Ztschr. 1897. S. 429.
2) Elektrotechn. Ztschr. 1897. S. 502.

magnetisiertes Rohr im magnetischen Felde denselben Druck erfährt, wie ein magnetisch äquivalenter Stromleiter. Die Zahnanker kann man sich danach als eine Aneinanderreihung kleinerer magnetischer Kreise am Ankerumfange denken (Fig. 10). Bei den üblichen Verhältnissen der Zahnhöhe zur Zahnbreite und Nutenbreite, wie sie der Wirklichkeit entsprechender die Figur 2 zeigt, liegt aber die Vorstellung noch näher, daſs sich nicht selbständige magnetische Kreise um jede Nut ausbilden, sondern daſs sich die entgegengesetzten Kraftlinien in jedem Zahne gröſstenteils aufheben und als wirksam wellenförmig von Zahn zu Zahn, innerhalb und auſserhalb des Ankers, teils im Luftspalte, teils im Poleisen verlaufende Kraftlinien verbleiben, die das Drehmoment wieder durch Kreuzen mit den Feldkraftlinien zu erzeugen hätten. Vielleicht übrigens könnte folgender Vergleich zwischen den Erscheinungen beim glatten und beim Zahnanker zu weiteren Aufschlüssen führen. Beim ersteren scheint es der Anschauung mehr zu entsprechen, wenn man die Stromkraftlinien zum Teil tief im Poleisen verlaufend sich vorstellt (Fig. 6), während die kleinen magnetischen Kreise des Zahnankers viel weniger tief eindringen könnten. Ersetzt man aber wie oben die Leiter in den Nuten des Zahnankers durch eine über die Zähne gelegte Stromschicht, dann darf in der magnetischen Verteilung nichts Wesentliches geändert werden, und vorläufig würde dieser Vergleich zu der Annahme führen, daſs die Quermagnetisierung des Poleisens sich überhaupt nicht sehr weit vom Luftspalt entfernt.


Fig. 10.

Die vorstehend entwickelten Betrachtungen gehen kaum über bloſse Andeutungen hinaus. Ihr Zweck würde erfüllt sein, wenn sie neue Anregungen zum Eingehen auf die im einzelnen ebenso komplizierten wie interessanten magnetischen Erscheinungen der Dynamomaschine gäben. Der praktische Nutzen würde dabei zunächst ganz gleichgiltig sein; er stellt sich von selbst ein, sobald es gelingt, weiterreichende physikalische Deutungen zu finden. Indessen mögen noch als Beispiele der Anwendung zwei praktische Fälle kurz behandelt werden.

Zur Verminderung der Feldverzerrung ist mehrfach vorgeschlagen, die Schenkel mit Spalten längs der Feldkraftlinien und in der Ebene der Ankerachse zu versehen, sodaſs beispielsweise jeder Schenkel aus zwei parallelen, durch den Spalt getrennten Teilen bestehen würde, dessen Breite etwa ein Mehrfaches des Luftspaltes zwischen Schenkel und Anker betragen sollte, wie in Figur 5 punktiert angedeutet. Aus

der Auffassung, auf die sich diese Figur bezieht, und aus der zugehörigen Formel 4 würde auch folgen, daſs dann die Feldverzerrung nicht mehr durch das Trapez $abc'd'$ in II dargestellt wäre, sondern durch die unten von der gezackten, punktierten Linie begrenzte Fläche, daſs also die Abnahme und Zunahme des Magnetismus an den Polkanten ungefähr auf die Hälfte der früheren Werte sinken würden. Erfahrungsgemäſs ist der Erfolg dieser Maſsnahmen aber sehr gering, auch wenn durch den Spalt das Maschinengestell vollständig getrennt ist, und wohl nur bei sehr starker Verbreiterung des Spaltes nach oben, wie bei gewissen älteren Maschinentypen durchführbar, von merklichem Nutzen. Der Grund dafür ist nach der andern Anschauungsweise leicht anzugeben. Nach dieser verlaufen die wirksamen Stromkraftkomponenten teils im Ankerluftspalte, teils parallel dazu im Poleisen. Die ersteren werden durch den Spalt im Schenkel garnicht beeinfluſst, die andern finden schon im Poleisen verhältnismäſsig groſsen Widerstand. Denn entweder verlaufen sie in der Mehrzahl dicht gedrängt nahe dem Ankerluftspalte, oder sie dringen tiefer in das Poleisen ein und finden bei geringer Dichte in dem von Feldkraftlinien nicht durchzogenen Längsspalte geringen Widerstand, der in beiden Fällen unerheblich ist gegen den Gesamtwiderstand. — Bei Beurteilung der Wirkung von sogenannten Hilfspolen zwischen den Feldpolen, wie sie von Swinburne u. a. vorgeschlagen sind[1]), und die, vom Hauptstrome erregt, nur zur Stromwendung in der neutralen Zone dienen sollen, entsteht leicht die Vorstellung, daſs die Magnetisierung des Ankers durch die Leiter in der Zone $b_1 B_2$ bezw. $B_1 b_2$ in der Richtung $v\sigma$ (Fig. 3) den Hilfspolen voll entgegen wirke. Bei nicht in die Maschine eingebautem Anker würde das auch annähernd zutreffen. Beachtet man aber z. B. beim Zahnanker Fig. 10, daſs die Leiter in den Nuten zur Erzeugung des Drehmomentes Kraftlinien parallel zum Ankerluftspalte herstellen müssen, so erscheint die magnetisierende Wirkung der Leiter dadurch kompensiert, und gegen die Hilfspole wirkend würden nur die nicht unter den Feldpolen liegenden Leiter zu betrachten sein. Die nähere Begründung kann mit Hilfe des früher Dargelegten leicht durchgeführt werden.

Da im vorstehenden die Veranschaulichung durch Kraftlinien ausgiebig benutzt wurde, und da über die zulässigen Grenzen in der Anwendung dieses Hilfsmittels sehr verschiedene Ansichten herrschen, so möge zum Schlusse noch eine Bemerkung darüber gestattet sein. Die gelegentlich wiederkehrende Mahnung, in der Anwendung der

1) Vergl. u. a. Kapp, Dynamomaschinen, 1899. S. 226.

Kraftlinien vorsichtig zu sein und sie nicht für etwas Reales zu nehmen, gehört nur in ein Schulbuch. Niemand hat in ihnen, von Faraday an, mehr gesehen, als grobsinnliche Vorstellungen von Kräftesystemen, mechanische Bilder, die sich, wie die mechanischen Modelle, in den einfachsten Formen unvermeidlich von selbst einstellen, sobald man in der Erklärung der Erscheinuugen soweit als möglich auf die letzten Einzelheiten eingehen will. Die ganze Physik und ebenso die Chemie arbeitet mit solchen Kräftebildern, die aus physiologisch-psychologischen Gründen unentbehrlich sind. Wie weit man in der Ausgestaltung der Bilder und Modelle gehen soll, ist lediglich eine Frage der Zweckmäfsigkeit. Glaubt man mit ihrer Hilfe beobachtete Erscheinungen versinnlichen, oder auf noch nicht beobachtete schliefsen zu können, die nachherige exakte Kontrolle vertragen, so ist die weitest gehende Benutzung der Hilfsmittel gerechtfertigt. Sie von vornherein irgendwie beschränken zu wollen, wäre nur dem erlaubt, der gleichzeitig wirksamere zu bieten vermöchte.

Berlin, 1. Dezember 1901.

Construction géométrographique des axes d'une ellipse dont on connaît, en grandeur et en position, deux diamètres conjugués;

Par M. L. Ripert à Paris.

La construction géométrographique connue du problème: *Placer les axes d'une ellipse, connaissant en grandeur et en position deux diamètres conjugués*, a pour coefficient de simplicité 41 (E. Lemoine, Archiv, 1901, p. 339).

Voici une construction, que je n'ai vue indiquée nulle part, bien qu'elle ne soit pas sans intérêt géométrique, et qui abaisse ce coefficient à 31. Elle repose sur le théorème de Frégier généralisé que, pour l'application actuelle, j'énoncerai ainsi: *La corde interceptée par deux diamètres conjugués d'une conique sur un cercle de centre arbitraire A passant par le centre O de la conique, passe par un point fixe F.* Par suite, *le diamètre AF coupe le cercle en deux points M et N situés sur les axes.*

Construction géométrographique. — Soient AA', BB' les deux diamètres conjugués donnés qui se coupent en O. Je décris le cercle $A(AO)(2C_1+C_3)$[1], puis le cercle $B(AO)(C_1+C_3)$. La pointe restant en B, je prends la longueur $BO(C_1)$, et je trace les cercles $A(BO)$ et $A'(BO)(2C_1+2C_3)$ qui coupent $B(AO)$ en D et E. Je trace OD et OE $(4R_1+2R_2)$, qui sont deux diamètres conjugués. Les droites AA', BB', OD, OE coupent le cercle $A(AO)$ en α, β, δ, ε. Je trace $\alpha\beta$ et $\delta\varepsilon(4R_1+2R_2)$ qui se coupent en F, puis $AF(2R_1+R_2)$ qui coupe $A(AO)$ en M et N. Je trace enfin OM et $ON(4R_1+2R_2)$, qui sont les axes demandés.

$Op: (14R_1+7R_2+6C_1+4C_3)$; $S: 31$; $E: 20$; 7 droites, 4 cercles.

Paris, 20. septembre 1901.

---

1) Il ne faut pas commencer par prendre la longueur $AO(2C_1)$. Cela ferait l'économie d'un C_1; mais il faudrait ensuite prendre un point arbitraire A_1 et décrire un cercle $A_1(AO)(C_1+C_3)$; le symbole serait, en somme, augmenté d'une unité.

Rezensionen.

R. Fricke. Kurzgefaſste Vorlesungen über verschiedene Gebiete der höheren Mathematik mit Berücksichtigung der Anwendungen. Analytisch-funktionentheoretischer Teil. Leipzig, B. G. Teubner. 1900. IX + 520 Seiten.

Vorliegendes Werk ist offenbar aus Spezialvorlesungen über höhere Teile der Mathematik entstanden, welche der Verfasser an der technischen Hochschule zu Braunschweig gehalten hat. Demgemäſs verbreiten sie sich über sehr verschiedenartige Disziplinen, die keinen oder nur lockeren Zusammenhang mit einander haben. Hervorgegangen aus dem Bestreben, vorgeschrittenere Schüler mit modernen Problemen der reinen und angewandten Mathematik vertraut zu machen, verfolgen sie vor allem das Ziel, durch Vielseitigkeit der Methoden und Zusammendrängung des Stoffes eine gute Anregung und Vorbereitung für das Studium der Spezialwerke zu werden, während sie auf Vollständigkeit und Systematik Verzicht leisten. In diesem Sinne wollen sie verstanden sein, und so können sie auch als eine angenehme und schätzenswerte Bereicherung unserer jetzt so schnell aufschieſsenden deutschen Lehrbuch-Litteratur mit Freuden begrüſst werden.

Die ersten beiden Kapitel geben eine Theorie der Fourierschen Reihen und daran anschlieſsend die Hauptsätze über Kugel- und Cylinderfunktionen. Die Lehre von den Fourierschen Reihen wird ganz nach Dirichlet erledigt; da sonst überall moderne Fortschritte berücksichtigt sind, so wäre es wohl wünschenswert gewesen, wenn die neueren Untersuchungen über das Dirichletsche Integral, welche die früheren nicht bloſs verschärfen, sondern auch vereinfachen, nicht ganz mit Stillschweigen übergangen wären. Von den nächsten drei Kapiteln bietet das erste eine Darlegung der Fundamentalsätze der Funktionentheorie nach Cauchy und Weierstraſs mit Einschluſs der Weierstraſsschen Produktentwickelung ganzer transcendenter Funktionen, das mittlere eine Theorie der elliptischen Funktionen, das letzte eine Reihe von Anwendungen dieser Theorie auf mechanische und geometrische Probleme dar. Namentlich das Kapitel über elliptische Funktionen giebt auf knappstem Raume eine überaus einfache und ziemlich weitgehende Ausführung dieser weitschichtigen Theorie, welche für viele Zwecke vollkommen ausreichen wird. Ein folgender Abschnitt befaſst sich mit der Theorie der linearen Differentialgleichungen und gipfelt in einer einführenden Behandlung der Fälle, in denen die Umkehrung der Schwarzschen Dreiecksfunktion eindeutig ist. Das letzte und siebente Kapitel endlich giebt eine Einleitung in die Theorie der Differentialgleichungen erster Ordnung, der gewöhnlichen sowohl wie der partiellen.

Die Darstellung ist überall, auch in den schwierigeren Teilen, durch Einfachheit und Leichtigkeit ausgezeichnet. Eine Bemerkung des Verfassers in der Vorrede läfst erwarten, dafs er eine analoge Behandlung algebraischer und geometrischer Disziplinen der Öffentlichkeit übergeben werde.

Heidelberg. G. Landsberg.

C. Runge. Praxis der Gleichungen. Sammlung Schubert. XIV. Leipzig, Göschen, 1900. 196 S. 8°.

Das klar und anregend geschriebene Werkchen wird Praktikern wie Mathematikern gleich willkommen sein.

Der erste Abschnitt beginnt mit Betrachtungen über die Genauigkeit des Rechnens mit abgekürzten Zahlen und behandelt sodann die Auflösung der linearen Gleichungen. Bekanntlich haben sich die Determinanten für die numerische Rechnung als nicht sehr praktische Instrumente bewährt; es kommt daher hauptsächlich die schrittweise fortschreitende Elimination der Unbekannten in Betracht. Besondere Beachtung finden die bei der Methode der kleinsten Quadrate erscheinenden Gleichungssysteme, deren Bildung aus den Fehlergleichungen an Beispielen erläutert wird; vielleicht wäre vielen Lesern anstatt der an sich interessanten auf die Spektrallinien bezüglichen Interpolationsaufgabe eine einfache Ausgleichungsaufgabe aus der Geodäsie willkommener gewesen.

Der zweite und dritte Abschnitt behandeln nicht lineare Gleichungen allgemeinster Natur; zunächst wird gezeigt, wie auf graphischem oder tabellarischem Wege die ersten Annäherungswerte der Unbekannten gewonnen werden können; sodann wird die Grundanschauung der Infinitesimalrechnung benutzt, nach welcher jede Funktion in engen Grenzen annähernd als lineare Funktion der Änderungen ihrer Argumente erscheint. Neben der klassischen Newtonschen Methode, die für eine und mehrere Unbekannte entwickelt wird, ist besonders die Methode der Iteration interessant, in welcher der Mathematiker mit Vergnügen das Verfahren wieder erkennt, dessen sich Weierstrafs bediente, um die Umkehrung der analytischen Funktionen abzuleiten, und das auch aus den Untersuchungen des Hrn. Schröder bekannt ist. Dieser bei der numerischen Auflösung der Gleichungen mit langer Zeit gebräuchliche Algorithmus wird auf seine Konvergenz hin untersucht und auf die Umkehrung von Reihen angewandt; daneben finden sich interessante Beispiele, z. B. über nautische Ortsbestimmung, die sich auch sehr zur Belebung einer Vorlesung über Differentialrechnung eignen würden.

Der letzte Abschnitt beschränkt sich auf algebraische Gleichungen, und entwickelt praktisch brauchbare Methoden zur Berechnung der Werte ganzer Funktionen und zur Interpolation. Sodann werden die Cartesische Regel und die Methoden von Fourier zur Trennung und Bestimmung der reellen Wurzeln, die spezielle Theorie der trinomischen Gleichungen mit Benutzung trigonometrischer und hyperbolischer Funktionen und die Gräffesche Methode für reelle und komplexe Wurzeln entwickelt. Den Schlufs bildet eine ausführliche theoretische und praktische Erörterung des Sturmschen Satzes, der von Fanatikern der Anwendung schon gelegentlich in die theoretische Rumpelkammer verwiesen war.

Nicht ganz zutreffend erscheint der Titel; das Büchlein enthält er-

freulich viel Theorie und zeigt, obwohl es geringe Vorkenntnisse erfordert, überall, daſs rationelles numerisches Rechnen nur da möglich ist, wo man die strengen Methoden der modernen Analysis beherrscht.

Berlin. A. Kneser.

Rudolf Sturm. Elemente der darstellenden Geometrie. Zweite umgearb. u. erweiterte Auflage. Mit 61 Figuren im Texte u. 7 lithogr. Tafeln. Leipzig 1900. B. G. Teubner. 8⁰. IV + 157 S.

Vorliegendes Werk ist das erste, das die Aufgabe erfüllen soll, vorzugsweise den Universität-Studierenden als Lehrbuch der darstellenden Geometrie zu dienen. Seit einigen Jahren anerkennen bekanntlich auch die Universitäten Deutschlands und Österreichs immer mehr den Nutzen dieser Disziplin, die einen so groſsen Einfluſs auf die Entwickelung der modernen Geometrie ausgeübt hat. Die neue Prüfungsordnung für die Kandidaten des höheren Lehramtes in Preuſsen wird der Wichtigkeit dieses Gegenstandes nicht genügend gerecht, indem sie eine besondere Lehrbefähigung für „angewandte Mathematik" (darst. Geometrie, techn. Mechanik, Geodäsie) vorsieht; die darstellende Geometrie müſste vielmehr, wie der Verfasser des vorliegenden Werkes in der Vorrede mit Recht betont, für jeden Studierenden der Mathematik, insbesondere für die künftigen Lehrer dieses Faches, „ein unerläſslicher und grundlegender Teil seines geometrischen Studiums sein."

Gegenüber der ersten Auflage (Leipzig 1874) weist das Werk in seiner neuen Gestalt zwei wichtige Veränderungen auf. Einmal sind alle prinzipiell wichtigen Figuren in den Text gedruckt, was die Lesbarkeit sehr erleichtert; dann sind 4 Abschnitte (S. 121—157) über Perspektive, schräge Parallelprojektion, Axonometrie, Schatten und Beleuchtung neu hinzugekommen.

Der Hauptteil des Buches (120 S.) ist auch in der neuen Gestalt, pädagogisch richtig, der orthogonalen Projektion gewidmet. Hinsichtlich der Beschränkung auf geradlinige und ebenflächige Gebilde, die auch der Verfasser nicht streng befolgt hat, indem er gelegentlich die Darstellung des Kreises in orthogonaler und zentraler, ja sogar (Nr. 151, 152) der Kugel in schiefer Projektion und in Nr. 129 die Durchdringung von Kegeln und Cylindern bespricht, werden viele anderer Meinung sein. Denn gerade bei der Darstellung krummliniger und krummflächiger Gebilde tritt der Nutzen früher behandelter Aufgaben, ja der der darstellenden Geometrie überhaupt, oft erst sichtbar hervor.

Der Stoff eines zur ersten Einführung in einen Wissenszweig dienenden Lehrbuches läſst sich im allgemeinen wenig variieren. Ich will demnach auch von dem vorliegenden Buche keine Inhaltsübersicht geben, sondern nur solche Abschnitte hervorheben, deren Behandlung von der in anderen Lehrbüchern gebräuchlichen erheblich abweicht. Dem Buche eigentümlich ist insbesondere, daſs, nach einer kurzen Besprechung der allgemeinen Eigenschaften der Zentralprojektion, im I. Abschnitt (26 S.) die orthogonale Darstellung auf *einer einzigen* Projektionsebene abgehandelt wird, wobei sich die Sätze über Projektionen von Strecken, Winkeln, ebenen Figuren (Kreisen) und Spuren von Geraden und Ebenen ergeben, sowie die Umlegung von Geraden und Ebenen, die Eigenschaft der Affinität ebener Figuren besprochen werden. Vielleicht hätte der Hr. Verfasser diesen pädagogisch und wissen-

schaftlich zu empfehlenden Lehrgang auch unmittelbar praktisch verwendbar gestalten können, indem er die kotierte Projektion angeschlossen hätte. Der Abschnitt schliefst mit einer hübschen Darlegung der perspektivischen Raumansicht und ihres, an zahlreichen Beispielen erläuterten, Wertes für die Unterordnung spezieller Sätze unter allgemeinere.

Mehr als manche anderen Autoren legt der Verfasser Gewicht auf die „Einführung weiterer Projektionsebenen"; denn er widmet dieser so wichtigen Konstruktionsmethode den ganzen V. Abschnitt (10 S.).

Lehrer der darstellenden Geometrie dürften besonderen Gefallen daran finden, was der Verfasser in Nr. 107 an Regeln über die Sichtbarkeit von Ecken und Kanten eines konvexen Polyeders in seinen Projektionen und in Nr. 124 an Kriterien für die Art der Durchdringungsfigur zweier Pyramiden zusammenstellt. Ferner seien die in den ersten Nummern des III. Abschnittes angestellten Betrachtungen über die Mannigfaltigkeit der Raumelemente und anschliefsend ihre Abzählung, wenn sie gegebene Bedingungen erfüllen sollen, der Beachtung empfohlen.

Das Buch zeichnet sich durch wissenschaftlich strenge Beweisführung aus. Besondere geometrische Vorkenntnisse werden nicht vorausgesetzt. Auf die projektive Geometrie näher einzugehen, hat der Verfasser weise vermieden, sondern sich damit begnügt, die wiederholt auftretenden Verwandtschaften der Affinität und Kollineation, an die bekannten Aufgaben anknüpfend, eingehend zu erläutern, auch gelegentlich auf das Dualitätsprinzip hinzuweisen. Nur bei der Lösung der Aufgabe (Nr. 153), den durch 2 Punkte einer Kugel legbaren gröfsten Kreis in schiefer Projektion zu zeichnen, geht er über die gesteckten Grenzen hinaus. Die Zeichnungen sowohl im Text als auf den Tafeln sind klar und deutlich. An sinnstörenden Druckfehlern habe ich nur einen auf S. 63, Zeile 18 v. o. bemerkt, wo es „*drei*" statt „*vier*" heifsen mufs.

Selbstverständlich findet ein Beurteiler in jedem eigenartigen Werke Dinge, die er anders wünschte. So z. B. hätte ich bei der Darstellung des regulären Dodekaeders und Ikosaeders (Nr. 108, 109) die Rechnung ganz vermieden und nur unmittelbar geometrisch anschauliche Eigenschaften benutzt. Auch in den Nr. 155 u. 156 (Orthogonale Axonometrie) erscheint mir die Rechnung überflüssig und die Annahme der (den Verkürzungsverhältnissen proportionalen) Zahlen p, q, r als nicht zu grofse ganze Zahlen von problematischem Werte, da beim Zeichnen rationale Streckenverhältnisse keinen besonderen Vorteil gewähren. In Nr. 160 wird jeder Anfänger den Hinweis darauf vermissen, wie der Fundamentalsatz der Axonometrie in der angeführten (Reyeschen) Form mit der Axonometrie überhaupt zusammenhängt. Die in Nr. 134, S. 122 ausgesprochene und auch in anderen Werken sich findende Behauptung, in der Perspektive müsse die Augdistanz gleich der deutlichen Sehweite sein, bedarf jedenfalls einer Einschränkung; denn ein verkleinertes perspektivisches Bild erscheint niemandem verzerrt.

Doch damit soll der Wert dieses Werkes, das schon nach der ersten Auflage ins Italienische übersetzt wurde, nicht im geringsten herabgemindert werden. Ich glaube vielmehr, dafs es in seiner mehr wissenschaftlichen als praktisch technischen Form dem neuen Zwecke, Universität-Studierenden statt Technikern als Lehrbuch zu dienen, noch viel besser als dem früheren dienen wird.

Königsberg i./Pr., den 1. April 1901. E. Müller.

Ernesto Pascal. Repertorium der höheren Mathematik (Definitionen, Formeln, Theoreme, Litteratur). Deutsche Ausgabe von A. Schepp. Analysis und Geometrie. I. Teil: Die Analysis. Leipzig, B. G. Teubner. 1900. XII + 638 S. 8⁰. In Leinw. geb. M. 10.—.

Verfasser, der bereits ein Lehrbuch der Determinanten, der Analysis und der Variationsrechnung herausgegeben, hat das Wagnis unternommen, ein Repertorium der höheren Mathematik zu schaffen. Der vorliegende erste Band enthält die Analysis, während der zweite Band (italienisch 1900 erschienen) die Geometrie behandelt. Bei dem ungeheuren Umfange, den die mathematische Wissenschaft heute angenommen hat, ist es für einen Einzelnen schlechterdings unmöglich, alle Gebiete gleichmäfsig zu beherrschen. Verfasser sagt selber in der Einleitung: „Das Buch hat den Zweck, auf einem möglichst kleinen Raum die wichtigsten Theorien der neueren Mathematik zu vereinigen, von jeder Theorie nur so viel zu bringen, als nötig ist, damit der Leser sich in ihr orientieren könne und auf die Bücher zu verweisen, in welchen er Ausführlicheres finden kann. — Man würde sich daher irren, wenn man der Ansicht wäre, wir hätten eine Encyklopädie der Mathematik schreiben wollen; für eine solche Arbeit würden weder unsere Kräfte ausgereicht haben, noch hätte der verhältnismäfsig geringe Umfang dieses Buches genügt. Wir haben weiter nichts als ein bescheidenes Repertorium abfassen wollen, welches, wie wir glauben, den Studierenden der Mathematik Dienste zu leisten im Stande ist.“. — Wenn man diesen Umstand gebührend berücksichtigt, so mufs gesagt werden, dafs Verfasser sich recht gut aus der Affaire gezogen hat. Besonders ist anzuerkennen, dafs überall da, wo die Behandlung des Stoffes nicht tief genug eindringt, weil Verfasser auf dem betreffenden Gebiete weniger bewandert ist (z. B. in der Theorie der Differentialgleichungen), wenigstens die Litteraturangaben gerechten Ansprüchen genügen und so jenen Mangel einigermafsen ersetzen können. — „Die Anordnung des Stoffes ist bei jeder Theorie fast immer dieselbe; zuerst werden die Definitionen und Grundbegriffe der Theorie gegeben, alsdann die Theoreme und Formeln ohne Beweis aufgestellt, welche die Verbindung zwischen den durch die vorhergehenden Definitionen eingeführten Dingen oder Gröfsen bilden, und schliefslich ein kurzer Hinweis auf die Litteratur über die betreffende Theorie gebracht.“ — Am besten weggekommen ist wohl das 12. Kapitel, in welchem die Invariantentheorie der algebraischen Formen behandelt wird; dankenswert ist das 18. Kapitel: „Spezielle Funktionen“, ferner die Zusammenstellung der Formeln für die elliptischen Funktionen sowie der verschiedenen Probleme der Variationsrechnung. Am schwächsten ist das Kapitel über Differentialgleichungen geraten, welches noch vollständig auf dem veralteten Standpunkt steht und von neueren Entwickelungen so gut wie garnichts bringt; hier ist auch die Litteraturangabe nicht vollständig genug: die Arbeiten von Hamburger und Painlevé z. B. durften nicht fehlen; die Theorie der singulären Integrale und der linearen Differentialgleichungen ist ganz unzureichend. In der Zahlentheorie fehlt die Bestimmung der Klassenzahl der binären quadratischen Formen.

Sehr nützlich ist das vollständige Sach- und Namenregister, welches den Leser schnell in den Stand setzt, das Gewünschte zu finden. Die Übersetzung ist ausgezeichnet, die Ausstattung gut, das Format handlich. Alles in allem kann das Buch jedem empfohlen werden, der sich

über ein ihm ferner liegendes Gebiet der Mathematik zu orientieren wünscht.

Charlottenburg. G. Wallenberg.

Ernesto Pascal. Die Determinanten. Eine Darstellung ihrer Theorie und Anwendungen mit Rücksicht auf die Gesamtheit der neuesten Forschungen. Berechtigte deutsche Ausgabe von Dr. Hermann Leitzmann. A. u. d. T.: B. G. Teubner's Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Mathematischen Wissenschaften mit Einschlufs ihrer Anwendungen. III. Band [XVI u. 266 S.] gr. 8. 1900. In Leinwand geb. n. ℳ 10.—

Dieser dritte Band der Teubnerschen Sammlung von Lehrbüchern der mathematischen Wissenschaften, der eine ausgezeichnete deutsche Bearbeitung des Pascalschen Lehrbuches der Determinanten bringt, wird vielen willkommen sein, sowohl demjenigen, der sich mit diesem wichtigen Werkzeug mathematischer Forschung erst vertraut machen will, als auch dem, der dem Gebiete ein weiteres Studium widmen will. Denn der erste Teil des Buches giebt nach einer kurzen historischen Einleitung, von der Jacobischen Definition der Determinante als Summe von $n!$ Produkten aus je n Faktoren ausgehend, eine auch jedem Anfänger leicht verständliche Ableitung der fundamentalen Eigenschaften der Determinanten, lehrt darauf die Bildung der Determinanten aus ihren Minoren, die Multiplikation zweier Determinanten, die Darstellung der Minoren der Produktdeterminante als Produkt zweier rechteckigen Matrices und die wichtigsten Beziehungen einer Determinante zu ihrer Reziproken. — Im zweiten, bei weitem umfangreicheren Teil wird dann aufserordentlich klar und übersichtlich der weitere Ausbau dargestellt, den die Theorie der Determinanten bis in die neueste Zeit hinein gefunden hat. Um nur einiges aus dem reichen Inhalte anzuführen, seien die Abschnitte über symmetrische und halbsymmetrische Determinanten erwähnt, ferner die sich anschliefsenden über die Pfaffsche Funktion, die Hankelschen und die cyklischen Determinanten; die Untersuchung der Determinanten, die aus sämtlichen Unterdeterminanten einer bestimmten Ordnung gebildet sind, die also eine Verallgemeinerung der reziproken Determinanten darstellen; die Erweiterung des Laplaceschen Satzes von Netto über die Zerlegung der Determinanten in eine Summe von Produkten aus Unterdeterminanten; die Sätze über komponierte Determinanten von Kronecker, Sylvester, Picquet u. a., die Besprechung einer grofsen Zahl spezieller Determinanten, der orthogonalen Determinanten, der Konvergenz unendlicher Determinanten, der kubischen Determinanten u. s. w. In den letzten Abschnitten des Buches sind die Anwendungen der Determinanten auf lineare Gleichungen (Resultante und Diskriminante), ferner die Jacobische und die Hessesche Funktionaldeterminante ausführlich behandelt.

Überall sind die Sätze klar ausgesprochen und mit möglichst einfachen Beweisen versehen, so dafs auch weniger Geübte das Buch leicht studieren können. Einem jeden Abschnitt ist ein ausführlicher Litteraturbericht beigegeben, äufserst wertvoll für jeden, der sich schnell und bequem über das unterrichten will, was bisher auf einem bestimmten Gebiete geleistet ist. Die Auffindung eines solchen Teilgebietes ist aufserdem durch ein genaues Sachregister am Ende des Buches erleichtert.

Die Vollständigkeit, mit der der genannte Stoff bis zu den Forschungen der letzten Jahre zusammengetragen und bearbeitet ist, sowie die ausführlichen Litteraturnachweise rechtfertigen das Erscheinen des Buches neben den wertvollen vorhandenen Büchern über Determinanten, besonders dem wohl immer noch am meisten geschätzten Baltzerschen. Das letztere ist durch das Pascalsche keineswegs überflüssig geworden, sondern beide ergänzen sich. Sowohl der Anfänger wird Baltzer gern zu Rate ziehen, da dieser die fundamentalen Eigenschaften der Determinanten in gröfserer Breite darstellt und durch viele Beispiele erläutert; als auch wer sich über geometrische Anwendungen genauer unterrichten will, wird das Baltzersche Buch zur Hand nehmen, da die Darstellung der Anwendungen nicht im Plane von Pascal lag. Nichtdestoweniger kann man auch bei ihm überall aus den Notizen über die einschlägige Litteratur ersehen, bei welchen Untersuchungen auf dem Gebiete der Geometrie, Algebra oder Analysis die betreffenden theoretischen Sätze gefunden wurden, oder bei welchen ihre Anwendung in Frage kommt.

Grofs-Lichterfelde. EDM. SCHULZE.

H. A. Lorentz. Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung und der Anfangsgründe der analytischen Geometrie mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Studierenden der Naturwissenschaften bearbeitet. Unter Mitwirkung des Verfassers übersetzt von G. C. Schmidt, Mit 118 Figuren. Leipzig 1900. Joh. Ambros. Barth. VII, 476 S.

Das holländische Original ist 1883 erschienen. Wir bemerken dieses von vornherein, weil daraus hervorgeht, dafs gewisse Ähnlichkeiten mit Lambs Infinitesimalkalkul von 1897 (vergl. Bd. 43 der Zeitschrift f. Math. u. Phys., Hist. litter. Abtlg. S. 204—205) keinesfalls darauf beruhen können, dafs Hr. Lorentz unter dem Einflusse des später veröffentlichten Werkes stand. In der That müssten wir, wenn wir Vergleiche im einzelnen anstellen wollten, recht vieles aus dem Lorentzschen Buche nennen, was uns im Lambschen Werke bemerkenswert erschien. Die Stellung der Lehre vom Taylorschen Satze hinter der Lehre von den bestimmten Integralen, die Auffindung von Maximal- und Minimalwerten ohne Kenntnis des Taylorschen Satzes, die besondere Betonung des integrierenden Faktors in dem Kapitel von den Differentialgleichungen, die Auswahl von für den Physiker und für den Chemiker besonders interessanten Übungsbeispielen sind beiden Schriften gemeinsam, wenn auch nicht in dem Grade, dafs von einem einfachen Übernehmen der entsprechenden Stücke die Rede sein könnte. Auch anderes glauben wir aus dem Lorentzschen Buche hervorheben zu sollen: eine etwa den vierten Teil des Ganzen in Anspruch nehmende Einleitung über Trigonometrie und analytische Geometrie, die Erörterung des Integrationsweges (S. 291 flg.), ein ganzes Kapitel über Fouriersche Reihen. Komplexe Gröfsen treten erstmals bei der Integration der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung (S. 418) auf, wo sie die Zusammenfassung von Exponentialgröfsen mit trigonometrischen Funktionen ermöglichen sollen. Herr Lorentz definiert sie in rein formaler Weise, so dafs die Bedeutung $i=\sqrt{-1}$ als Folge einer Übereinkunft erscheint. Unsere Leser erkennen aus diesen wenigen Andeutungen, dafs das neu erschienene Buch reich an Eigentümlichkeiten

ist und die Zahl der guten Werke über die Infinitesimalrechnung abermals vermehrt hat. Das am Schlusse angehängte Register ist leider allzuunvollständig, als daſs es seinen Zweck erfüllen könnte.

Heidelberg. M. Cantor.

Augustin Louis Cauchy. Bestimmte Integrale zwischen imaginären Grenzen (1825), herausgegeben von P. Stäckel. Leipzig 1900, Engelmann. (Ostwald's Klassiker Nr. 112.)

Wenn auch Gauſs schon im Dezember 1811 volle Klarheit über den Sinn und den Wert eines bestimmten Integrals zwischen imaginären Grenzen besaſs, so blieb doch die Thatsache bis zur Veröffentlichung seines Briefwechsels mit Bessel vollständig unbekannt. Mit Recht gilt daher Cauchys Aufsatz von 1825 als derjenige, von welchem an die neue Lehre an die Öffentlichkeit trat. Hr. Stäckel hat seiner Übersetzung eine Übersicht von Cauchys bewegtem Leben und Litteraturnachweise beigefügt, welche sich sehr nützlich erweisen, da Cauchy selbst in dieser Beziehung sich sehr kurz zu fassen liebte und, wenn er Vorgänger nannte, es bei der Namensnennung belieſs, ohne zu sagen, wo die betreffende Arbeit veröffentlicht sei.

Heidelberg. M. Cantor.

N. H. Abel. Über eine besondere Klasse algebraisch auflösbarer Gleichungen (1829), herausgegeben von Alfred Loewy. Leipzig 1900, Engelmann. 50 S. (Ostwald's Klassiker Nr. 111.)

Nachdem Abel 1826 die Unmöglichkeit der algebraischen Auflösung der allgemeinen Gleichung n^{ten} Grades, sofern $n > 4$, erkannt und bewiesen hatte, zeigte er 1829, daſs es zahlreiche Gleichungen höheren Grades giebt, denen algebraische Auflösbarkeit zukommt, die später sogenannten Abelschen Gleichungen. Die in französischer Sprache geschriebene Abhandlung ist von Herrn Loewy übersetzt und mit Anmerkungen versehen worden. Letztere betreffen insbesondere die Ergänzungen, welche Abels Ergebnisse durch Galois, dann namentlich durch Kronecker erhalten haben.

Heidelberg. M. Cantor.

Rodolphe Guimarães. Les mathématiques en Portugal au XIXe Siècle. Aperçu historique et bibliographique. Coïmbra, 1900. Imprimerie de l'université. 167 pag.

In einer kurzen Übersicht schildert der Verfasser, wie an einen rasch vorübergehenden durch Pedro Nunes herbeigeführten Höhezustand der portugiesischen Mathematik im XVI. Jahrhundert ein tiefes Sinken derselben sich anknüpfte. An der Universität Coïmbra wirkten Jesuiten, welche nur elementarste Kenntnisse lehrten, und erst 1772 hob sich dieser Unterricht wieder in Folge einer Neuordnung der Universität. Zwei Namen treten hier hevor, welche, wie es scheint, verdienen, auch auſserhalb ihrer Heimat gekannt zu sein: Monteiro da Rocha und Anastacio da Cunha. Den Hauptbestandteil des schön ausgestatteten Buches bilden aber die mit sehr knapp gehaltenen Inhaltsangaben verbundenen Titel aller mathematischen Schriften und Aufsätze, welche von 1800 bis 1899 in Portugal gedruckt worden sind.

Heidelberg. M. Cantor.

Rudolf Böger. Ebene Geometrie der Lage. Mit 142 Figuren. Leipzig 1900, J. Göschen. 5 M. 289 S.

Das vorliegende Buch ist der 7. Band der Sammlung Schubert. Der Titel entspricht dem Inhalte nicht ganz, denn dieser beschränkt sich im wesentlichen auf die Theorie der Kegelschnitte. Im ersten Teile werden sie direkt, im zweiten unter der Form des Polarsystems (Polarfeldes) behandelt. Der Verfasser will sich im allgemeinen an v. Staudt und Reye anschliefsen. Er ändert ihnen gegenüber die Reihenfolge in der Weise, dafs er die perspektivische Verwandtschaft an die Spitze des Buches stellt. Das Imaginäre wird ganz umgangen, indem der Begriff des Wurfes etwas allgemeiner gefafst wird als bei v. Staudt. 4 Punkte A, B, C, D werden in 2 Paare geordnet. Der Inbegriff von 2 solchen Paaren wird als Wurf definiert. Die 4 Punkte bilden also 3 Würfe: AB, CD; AC, BD und AD, BC. Unter ihnen heifst der zweite, bei welchem sich die Paare trennen, elliptisch. Die 2 übrigen heifsen hyperbolisch. Von Doppelelementen (Ordnungselementen) wird nur im letzeren Falle gesprochen. Der Verfasser findet das Imaginäre nicht nur unnötig sondern geradezu schädlich; „denn es kann, weil ihm keine Vorstellung entspricht, nur verwirrend wirken. Das Wort imaginär sollte daher aus der Geometrie der Lage verschwinden". Wir können uns dieser — wir möchten sagen realistischen — Ansicht nicht anschliefsen. Die Geometrie arbeitet mit definierten Begriffen, welche zum Teil in der Erscheinungswelt Analogien haben, zum Teil nicht. Einer der letzteren Begriffe ist das Imaginäre. Er erweist sich als sehr praktisch, giebt den Gesetzen einen allgemeinen Gültigkeitsbereich, und gerade, wenn es sich um Anschauung handelt, verwirrt er nicht, sondern er gestattet eine scharfe Scheidung zwischen dem, was vorstellbar ist, und dem, was nur definiert ist. Warum sollten wir also diesem Begriffe aus dem Wege gehen? Reye nennt es geradezu ein Verdienst von v. Staudt[1]), dafs er das Imaginäre in die Geometrie der Lage eingeführt hat, und wir möchten ihm voll und ganz beistimmen. Der Verfasser verzichtet für den Hauptlehrgang auf jede Rechnung und auf planimetrische Hilfsmittel. Damit schliefst er alle metrischen Beziehungen aus. „Weil aber — sagt er — durch Übung und Unterricht Gleichheit und Parallelität wichtige Hilfsmittel für unser Anschauungsvermögen geworden sind", so werden die planimetrischen Folgerungen in besonderen — durch Sterne hervorgehobenen Abschnitten — behandelt. Es ist dies eine Art Kompromifs zwischen einem theoretischen Standpunkte und den praktischen Bedürfnissen; denn gerade für diese — für das Konstruieren — sind die metrischen Beziehungen von grofsem Werte. Reye behandelt sie stets sehr eingehend und schliefst sie samt dem Doppelverhältnis ohne weiteres in sein System ein.

Um das Unendlichferne zu vermeiden, führt der Verfasser für jede Gerade einen uneigentlichen Punkt ein. Uns liegt es näher, einen unendlich fernen Punkt zu definieren, als von einem Punkte zu reden, der eigentlich kein Punkt ist.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen gehen wir näher auf den Inhalt des Buches ein und bemerken, dafs der Stoff nach dem Prinzip der Dualität angeordnet ist. Wir beschränken uns daher bei der Inhaltsangabe auf die

1) Reye: Geometrie der Lage, 4. Aufl. S. 204.

eine Hälfte und betonen besonders die Abweichungen des Verfassers vom gewöhnlichen Sprachgebrauche.

Der Verfasser erklärt zuerst perspektivische Gebilde, leitet die harmonische Gruppe mit Hilfe des vollständigen Vierecks ab und geht hierauf zur projektivischen Verwandtschaft über. Das Erzeugnis von 2 projektivischen Büscheln wird als „krummes Grundgebilde" definiert. Die Konstruktion von Kegelschnitten, der Satz von Pascal und spezielle Fälle schliefsen sich dieser Erklärung an. Dann wird die Involution definiert. Das vertauschbare (nach Reye doppelte) Entsprechen nennt der Verfasser ein zweifaches. Projektivität und Involution werden auf den Kegelschnitt übertragen. Der Verfasser redet von „krummen Würfen, krummen Involutionen, krummen Strahlenbüscheln" und kommt so zur Theorie von Pol und Polare. Die Polinvolution auf einer Geraden nennt er konjugierte Involution (konjugiert sind doch nur die Paare). Im Zusammenhange mit dieser Involution werden die Geraden als elliptische und hyberbolische unterschieden. Wir glauben, die Anschauung wird durch diese Worte weniger gefördert, als wenn wir von Geraden reden, welche den Kegelschnitt reell und imaginär — d. h. nicht — schneiden.

Zum Schlusse des ersten Abschnittes werden unter Stern eine Reihe metrischer Relationen behandelt — Durchmesser, Brennpunkte, Krümmungskreise — welche sich zum Teile an besondere Involutionen knüpfen. Dabei werden die Namen: zirkulare (Rechtwinkel) Involution, fokale Involution, diagonale Involution eingeführt. Die fokale Involution ist diejenige, welche die Brennpunkte zu Doppelpunkten hat. Die diagonale Involution geht von 2 Involutionen g^2, h^2 auf g, h aus. Dem Schnittpunkte U der Geraden g, h sollen die resp. Punkte G, H entsprechen. Ihre Verbindungslinie sei u. Schneidet dann eine beliebige Gerade a aus g, h ein Punktepaar x, y, so werde ihr die Gerade a_1 zugeordnet, welche die Punkte x_1, y_1 verbindet. Die Geradenpaare aa_1 schneiden aus u Paare einer neuen Involution, welche diagonale Involution genannt wird. Auf der Geraden a wird durch das Paar x, y und durch die Schnittpunkte A_1 A mit a_1 und u eine weitere Involution bestimmt, welche Hauptinvolution heifst. Bei der Punktinvolution wird der entsprechende Punkt zum unendlich fernen Punkte „Fluchtpunkt" genannt (sonst in der Litteratur Mittelpunkt). Die Polare des Brennpunktes heifst Richtlinie (sonst Direktrix).

Der zweite Teil des Buches über das Polarfeld beginnt mit neuen Namen. 2 krumme Punktinvolutionen heifsen resultierend, wenn ihre Zentra (Pole) konjugierte Punkte sind. Zu irgend 2 Involutionen mit den Zentren Q, R gehört eine dritte Involution, welche zu beiden resultierend ist. Ihr Zentrum ist der Pol der Geraden QR. Alle Involutionen, deren Zentra auf dieser Geraden liegen, haben dieselbe resultierende Involution und heifsen komponierende Involutionen. Jede resultierende zu einer konjugierten Involution heifst zum Kegelschnitt adjungiert. Die Reihen, welche eine Gerade aus 2 projektivischen Büscheln schneidet, werden „konjugierte Projektivitäten" genannt.

Nach diesen und einigen weiteren unwesentlichen Definitionen bespricht der Verfasser die kollineare und reciproke Verwandtschaft, sowie den involutorischen Fall, welcher als „Polarfeld zweiter Ordnung" eingeführt wird. (Polare Felder bei Reye.) Dasselbe wird in verschiedener Weise

bestimmt und die Ordnungskurve wird hervorgehoben. Dann werden Büschel von Polarfeldern betrachtet. Bekanntlich gehen die Polaren eines Punktes P in Bezug auf alle Felder durch einen festen Punkt P_1. Solche (doppelt konjugierte) Punkte werden absolut konjugiert genannt, und es wird der Kegelschnitt konstruiert, welcher einer Geraden entspricht. Ferner wird eine projektivische, resp. involutorische Verwandtschaft zwischen einer geraden und einer krummen Punktreihe in folgender Weise hergestellt: Aus einem Punkte A eines Kegelschnittes wird eine gerade Reihe auf den Kegelschnitt projiziert. Die entstehende krumme Reihe wird sodann aus einem Punkte A der Geraden auf den Kegelschnitt zurückprojiziert. Dadurch wird eine Korrespondenz zwischen den Punkten des Kegelschnittes und der Geraden festgelegt. Diese Beziehung heifst Involution dritter Ordnung. Schliefslich wird ein Paar einer Polinvolution durch eine neue — die adjungierte Involution — ersetzt, welche dieses Paar zu Doppelpunkten hat. Dadurch wird es möglich, ohne Einführung des Imaginären das Polarfeld in allgemeinster Form durch 5 adjungierte Involutionen zu bestimmen. Diese Aufgabe hat der Verfasser vor Jahren in einer Abhandlung gelehrt[1]), und man erkennt leicht, dafs aus derselben das vorliegende Buch herausgewachsen ist. Dies mag wohl der Grund sein, warum es nach unserer Meinung nicht ganz einem Lehrbuche entspricht, welches nach dem Prospekte der Schubertschen Sammlung „den Bedürfnissen des Praktikers Rechnung tragen und auch für den Nichtfachmann verständlich sein soll". Besonders nach konstruktiver Seite hin wird der Praktiker weniger finden als in anderen bekannten Lehrbüchern.

Wir machen noch auf einige Einzelheiten aufmerksam, welche uns aufgefallen sind. Abgesehen von manchen neuen Wortbildungen für Dinge, welche sich längst unter gut gewählten Namen in der Litteratur eingelebt haben, finden wir es störend, stets schlechtweg von einer krummen Linie, einer Kurve zu reden, wo es sich nur um Kegelschnitte handelt. Mifsverstanden kann wohl auch Satz 35 werden. Die 2 Punktreihen werden zu einer dritten perspektivisch gemacht, bleiben aber projektivisch. Im übrigen ist die Sprache des Buches eine klare und dasselbe ist vorzüglich ausgestattet.

Zürich. CHR. BEYEL.

Rudolf Böger. Elemente der Geometrie der Lage, für den Schulunterricht bearbeitet. Mit 33 Fig. Leipzig. G. J. Göschen 1900. 62 S. 90 Pfg.

Der Verfasser findet — wohl mit Recht — dafs in dem Unterricht der oberen Klassen die Geometrie hinter der Arithmetik zurücktritt. Er will diesem Übelstande mit dem vorliegenden Büchlein abhelfen. Dasselbe ist ein geschickt zusammengestellter Auszug aus der „ebenen Geometrie der Lage", welche der Verfasser in der „Sammlung Schubert" herausgab Es behandelt harmonische Elemente, die projektivische Verwandtschaft und ihre Anwendung auf „krumme Grundgebilde" d. h. auf die Kegelschnitte. In einem Anhange werden eine Anzahl (120) von Aufgaben und Lehrsätzen zusammengestellt.

---

1) Böger: Über Büschel und Netze von ebenen Polarsystemen zweiter Ordnung. Hamburg 1886.

Das Büchlein wird seinen Zweck besonders dann gut erfüllen, wenn der Lehrer das Hauptgewicht auf konstruktive Übungen legt, denn diese werden gewöhnlich gegenüber den numerischen Rechnungen vernachlässigt.

Zürich. CHRISTIAN BEYEL.

W. Ahrens. Mathematische Unterhaltungen und Spiele. Leipzig, 1901, B. G. Teubner. 8⁰. VIII + 428 S.

In der neueren deutschen mathematischen Litteratur findet man verhältnismäfsig wenige Bücher und Abhandlungen, die sich mit den in vielen Beziehungen interessanten Problemen beschäftigen, auf die man durch verschiedene Spiele und Unterhaltungen geführt wird. Es ist daher das Erscheinen des obigen Buches mit Freude zu begrüfsen umsomehr, als es den äufserst reichhaltigen Stoff in knapper und klarer Darstellung bietet, die ebenso dem Laien verständlich sein wird wie sie den Mathematiker fesselt; es stellt sich das Buch den trefflichen Schubertschen „Mathematischen Mufsestunden“ ergänzend zur Seite.

Aus dem reichen Inhalte möchte ich als besonders interessant hervorheben die ausführliche Behandlung der verschiedenen Brettspiele, den Abschnitt über magische Quadrate, die Probleme aus der Analysis situs und das Farbenkarten-Problem. Besonders erwähnt zu werden verdient der übersichtlich angeordnete, umfangreiche litterarische Index, der über 300 einschlägige Abhandlungen und Bücher aufführt.

Berlin. P. SCHAFHEITLIN.

B. Weinstein. Thermodynamik und Kinetik der Körper. Erster Band: Allgemeine Thermodynamik und Kinetik und Theorie der idealen und wirklichen Gase und Dämpfe. F. Vieweg und Sohn. Braunschweig 1900. XVIII u. 484 S. 8⁰.

Das mit ungewöhnlichem Fleifs und Scharfsinn geschriebene Buch enthält viel des Interessanten und Originellen, als Lehrbuch der Thermodynamik aber ist es nicht zu betrachten. Ungewöhnlich ist die Anordnung und die Darstellung, ebenso die Auswahl der mit Vorliebe behandelten Probleme.

In der Anordnung fällt das Durcheinanderarbeiten der Thermodynamik und der Kinetik auf. So werden die beiden Hauptsätze der mechanischen Wärmetheorie erst thermodynamisch, unmittelbar darauf aus kinetischen Hypothesen abgeleitet. Ganz durchführen hat der Verfasser den Versuch der parallelen Anwendung thermodynamischer und kinetischer Methoden nicht können. Die grundsätzliche Verschiedenheit beider nötigt zu einer Sonderung, welche auch schon deshalb erwünscht ist, weil der Grad der Erkenntnis, welchen beide gewähren, durchaus verschieden ist.

Was die Darstellung betrifft, so tritt in ihr das Bestreben hervor, den dargebotenen Stoff nicht blofs plausibel zu machen, sondern die benutzten Methoden mit eindringender Kritik auf ihren Wert und ihre Strenge zu prüfen, ihre Grenzen und Mängel festzustellen und die Punkte aufzusuchen, an denen sie abänderungsbedürftig oder -fähig sind. In dieser Kritik besteht meines Erachtens der Hauptvorzug und Hauptreiz des Buches, welches gerade dadurch auch den Leser zur Kritik anregt. Ohne dieser Anregung hier weiter

zu folgen, möchte ich nur auf die Herleitung des Maxwellschen Verteilungsgesetzes hinweisen. Die Annahme des Verfassers, dafs die Abweichungen der drei Geschwindigkeitskomponenten vom Mittel unabhängig von einander sind, scheint mir ebensowenig gestattet, wie die ursprünglich von Maxwell gemachte Annahme, dafs die Geschwindigkeitskomponenten selbst unabhängig von einander sind.

Unter den behandelten Problemen nimmt den bevorzugtesten Platz die Zustandsgleichung ein, mit welcher sich der Verfasser mehrfach in eigenen Untersuchungen beschäftigt hat. Im dritten Kapitel werden die allgemeinsten Zustandsgleichungen der Körper aus dem Virialsatz abgeleitet und zwar unter zwei Voraussetzungen, einmal unter der Annahme einer kontinuierlichen Substanz, das zweite Mal für molekulare Beschaffenheit, wobei die Rechnung jedesmal für den Fall durchgeführt wird, dafs nur Fernkräfte wirken, und für den Fall, dafs bei den Zusammenstöfsen auch Druckkräfte auftreten, welche von den Fernkräften verschieden sind. In diesen Ableitungen steckt eine ungeheure Arbeit, deren Früchte für die physikalische Erkenntnis vorläufig noch recht bescheiden sind. Das geht besonders aus dem letzten Kapitel des Buches hervor, in welchem unter aufserordentlich sorgfältiger Benutzung des vorliegenden Beobachtungsmaterials der Versuch gemacht wird, die Resultate der Theorie mit der Erfahrung an wirklichen Gasen zu vergleichen. Es ist zu hoffen, dafs die physikalische Bedeutung der Untersuchungen des Verfassers, welche eine Verallgemeinerung der Überlegungen von van der Waals, Clausius u. a. darstellen, in Zukunft klarer hervortreten möge. Vielleicht trägt das vorliegende Buch dazu bei, ausgedehnte experimentelle Untersuchungen über die Zustandsgleichung der Körper anzuregen, für welche der Verfasser im Vorwort die Hilfe des Staates, speziell der physikalisch-technischen Reichsanstalt anruft.

Zum Schlufs eine kurze Inhaltsangabe:

I. *Wärme und Wärmeerscheinungen.* (Begriffsbestimmungen und Definitionen.)

II. *Die Grundlagen der Wärmelehre.* (Die beiden Hauptsätze der Thermodynamik, thermodynamisch und kinetisch betrachtet.)

III. *Die Zustandsgleichung der Körper, insbesondere der Gase und Flüssigkeiten.* (Bedeutung der Zustandsgleichungen und ihre Herleitung.)

IV. *Gleichungen und Darstellungen der Thermodynamik.* (Spezifische und latente Wärmen, Entropie, Energie etc., adiabatische, isothermische etc. Vorgänge, graphische Darstellungen.)

V. *Zustandsgleichung und Kinetik der idealen Gase.* (Gasgesetze und Grundlagen der kinetischen Gastheorie für ideale Gase.)

VI. *Thermisches Verhalten der idealen Gase.* (Thermodynamik der idealen Gase, chemische Umsetzungen in Gasen.)

VII. *Bewegung, Reibung und Wärmeleitung in idealen Gasen. Maxwells Theorie der Gase.* (Besonders hervorzuheben ist die Kritik der Maxwellschen Theorie.)

VIII. *Die wirklichen Gase.* (Zustandsgleichungen nach van der Waals, Clausius etc. verglichen mit der Erfahrung, kritischer Zustand der Gase und Flüssigkeiten, Verdampfung und Verflüssigung.)

Berlin. E. Pringsheim.

F. Kohlrausch. Lehrbuch der praktischen Physik. Neunte umgearbeitete Auflage des Leitfadens der praktischen Physik. XXVII u. 610 S. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner. 1901.

Aus dem Unterricht im physikalischen Praktikum hervorgegangen und zunächst wesentlich für die Zwecke dieses Unterrichts bestimmt, hat der altbewährte Leitfaden des Verfassers mit jeder neuen Auflage an Umfang und Inhalt zugenommen und ist über seinen ursprünglichen Zweck hinausgewachsen. Daher hat der Verfasser neuerdings für die Zwecke des elementaren Praktikums einen „kleinen Leitfaden" erscheinen lassen, während das vorliegende „Lehrbuch" ein Repertorium darstellt, welches niemand, der eine Aufgabe der messenden Physik zu behandeln hat, ohne Erfolg um Rat fragen wird. Unter den verschiedenen dem gleichen Zwecke dienenden Methoden wird man sich leicht die für den vorliegenden Fall geeignetste heraussuchen können. Die überall beigefügten Litteraturnachweise erleichtern dem tiefer Eindringenden die Auffindung der Quellen.

Gegenüber der 8. Auflage sind eine Anzahl wichtiger Kapitel neu hinzugekommen, so das Kapitel: „Hertzsche Wellen" bearbeitet von Arons, „Geifslersche Röhren, Kathodenstrahlen", u. a. Aber auch da, wo der eigentliche Lehrstoff sich nicht wesentlich geändert hat, spürt man überall in Veränderungen der Anordnung und Darstellung die Sorgfalt und Gründlichkeit der Neubearbeitung.

Bei dem wohlbegründeten Ruf absoluter Zuverlässigkeit, den sich der Leitfaden erworben hat, ist man gewöhnt, alles, was im Kohlrausch steht, als unbedingt richtig zu betrachten. Daher sei es gestattet, darauf hinzuweisen, dafs auf S. 316 die Plancksche Gleichung für die schwarze Strahlung als allgemein giltig hingestellt wird, obwohl dies noch nicht mit Sicherheit erwiesen ist.

Auch die aufserordentlich wertvollen dem Buche beigefügten Tabellen sind vermehrt und umgearbeitet worden. So sind alle Zahlen einheitlich auf eine Zimmertemperatur von 18^0 bezogen worden.

Auch in seiner neuen Gestalt wird das Buch bleiben, was es schon Generationen von Lernenden und Lehrenden gewesen ist, ein treuer und zuverlässiger Berater, der nicht im Bücherschrank, wohl aber auf dem Schreibtisch und auf dem Experimentiertisch des Physikers zu finden ist.

Berlin. E. Pringsheim.

J. J. Thomson. Les décharges électriques dans les gaz. Ouvrage traduit de l'anglais avec des notes par Louis Barbillion et une préface par Ch. Ed. Guillaume. Paris. XVI u. 172 S. Gauthier-Villars. 1900.

Das Thomsonsche Buch ist aus einer Reihe von Vorträgen entstanden und macht nicht den Anspruch, ein systematisch gegliedertes, den Stoff erschöpfendes Lehrbuch zu sein. Und das Gebiet, mit welchem es sich beschäftigt, ist gerade jetzt in einer so grundlegenden Umwälzung begriffen, dafs es verfrüht wäre, ein Lehrbuch über Gasentladungen zu schreiben. Ohne aber ein Lehrbuch zu sein, wird das Werk jedem, der mit den nötigen Vorkenntnissen herantritt, eine reiche Quelle der Belehrung werden. Haben doch gerade der Verfasser und seine Schüler am thätigsten und erfolgreichsten sich bemüht, durch quantitative Folgerungen die Hypothese von

der Materialität der Kathodenstrahlen zu prüfen und auszubauen, und dadurch in hervorragender Weise an der Begründung der Elektronentheorie mitgewirkt, welche in raschem Siegeslauf die physikalische Welt erobert hat. Und sollte auch — was nicht ganz ausgeschlossen erscheint — dieser Siegeslauf ein ebenso rasches Ende finden, immer werden die von dem Verfasser gefundenen und in diesem Buche dargestellten Thatsachen eine bleibende Bedeutung behalten, und immer werden seine Arbeiten ein schönes Beispiel dafür liefern, wie die konsequente Anwendung einer Hypothese zur Entdeckung neuer Thatsachen führt.

Seit dem Erscheinen des englischen Originals haben die in dem Buche behandelten Fragen teils durch den Verfasser selbst, teils durch andere wichtige Fortschritte gemacht, so daſs das Buch nicht im Stande ist, dem Leser einen guten Überblick über den jetzigen Stand der Wissenschaft zu geben. Aber als Einführung in den Gedankenzug, welcher den Verfasser und die Mitstrebenden zu so schönen Erfolgen geführt hat, kann es auch jetzt noch jedem Leser empfohlen werden.

Von den 3 Hauptkapiteln des Buches: „I Elektrische Entladungen in Gasen. II Lichtelektrische Wirkungen. III Kathodenstrahlen“ nimmt das letzte das Hauptinteresse in Anspruch. In einigen beigefügten Noten ergänzt der Übersetzer in wertvoller Weise die historische Darstellung und führt sie bis auf die neueste Zeit fort. Die Vorrede von Guillaume beschäftigt sich wesentlich mit den Radiumstrahlen. Interessant ist eine hier mitgeteilte Hypothese von Villard, welcher die Konstanz des Verhältnisses zwischen elektrischer Ladung und Masse der die Kathodenstrahlen bildenden hypothetischen Teilchen dadurch zu erklären sucht, daſs in allen Vakuumröhren, welches Gas man auch einzuschlieſsen sich bemüht hat, stets das gleiche Element vorhanden ist, etwa Wasserstoff, der durch Zersetzung des den Wänden anhaftenden Wassers entsteht.

Berlin. E. Pringsheim.

E. Cahen. Éléments de la théorie des nombres. Paris, Gauthier-Villars. 1900. VIII + 403 Seiten.

Die vorliegende Einführung in die Zahlentheorie motiviert ihr Erscheinen mit dem ausdrücklichen Hinweise darauf, daſs in Frankreich kein modernes Lehrbuch dieses Wissenschaftszweiges existiere, während in Deutschland eine ganze Anzahl von Compendien dem Lernenden zur Verfügung stehen. Unter diesen Umständen kann die nachfolgende Besprechung sich der Hauptsache nach darauf beschränken, die Umgrenzung des Stoffes darzulegen und auf diejenigen Einzelheiten hinzuweisen, in denen das Buch über andere elementare Darstellungen der Zahlentheorie hinausgeht. Vergleichen wir es mit dem wohlbekannten Lehrbuche von Dirichlet-Dedekind, das hier nur in seinem ersten ursprünglichen Teile in Betracht kommt, so giebt es insofern weniger, als die transcendente Bestimmung der Klassenzahl binärer quadratischer Formen ausgeschlossen ist; dafür bietet es andererseits in den elementaren Teilen der Zahlentheorie eine gröſsere Menge von Einzelheiten, stellt den Gegenstand in behaglicher Breite dar und giebt eine Fülle von Zahlenbeispielen, um auch den mathematischen Amateur für dieses reizvolle Gebiet der Mathematik zu gewinnen.

Der Inhalt des Buches ist in sechs Kapitel gegliedert, denen sich eine Anzahl Noten über spezielle Zahlenprobleme, die in keinem direkten Zusammenhange mit dem Hauptgegenstande stehen, und mehrere Zahlentabellen anschliessen. Von diesen sechs Kapiteln sind die ersten beiden den Elementen mit Einschlufs der regulären Kettenbruchentwickelungen rationaler Brüche, die mittleren zwei den Kongruenzen und dem quadratischen Reziprozitätsgesetze, die letzten zwei den Irrationalzahlen und den binären quadratischen Formen gewidmet. Die Theorie der quadratischen Formen ist vollkommen im Rahmen der Gaufs-Dirichletschen Anschauungen behandelt, nur die Beweise sind gelegentlich noch vereinfacht, und z. B. ist die sonst ziemlich weitläufige Theorie der indefiniten Formen dadurch, dafs die Theorie der periodischen Kettenbrüche in dem Kapitel über Irrationalzahlen vorausgeschickt ist, in eine überaus übersichtliche und klare Gestalt gebracht worden. Aber vielleicht wäre es eben darum angebracht gewesen, den engen Zusammenhang zwischen quadratischen Formen und algebraischen Zahlen noch klarer dadurch hervortreten zu lassen, dafs eine vollständige Theorie der quadratischen Zahlkörper mit aufgenommen und die beiden Äquivalenzprobleme mit einander zur Deckung gebracht worden wären. Dem modernen Stande der Forschung und vor allem auch den Anwendungen, welche die Zahlentheorie in der Funktionslehre gefunden hat, entspricht es durchaus, gewisse Grundbegriffe der Körpertheorie auch für die Elemente zu gewinnen, und diesem Bedürfnisse kommt ja auch das vorangehende Kapitel erfreulicher Weise dadurch entgegen, dafs es, abweichend von älteren Auffassungen des Stoffgebietes der Zahlentheorie, eine ausführliche Darlegung des Begriffes der Irrationalzahl (nach Dedekind) und gewisser Eigenschaften der algebraischen Zahlen bringt. Dieses Kapitel ist in jeder Hinsicht das interessanteste; besonders sei auf die schöne, dem Verfasser eigentümliche Herleitung des Satzes von Liouville über die Existenz transcendenter Zahlen verwiesen.

Die Darstellung ist überall präzis und elegant. Nur einige wenige Inkorrektheiten sind dem Referenten bei der Lektüre begegnet. Der Satz, der Nr. 95 ist gewifs richtig und geometrisch evident; aber die arithmetische Beweisführung ist unrichtig. Bei der Behandlung der Kongruenzen nach einem Primzahlmodul wird der Fall mehrfacher Wurzeln ausdrücklich berücksichtigt und das Theorem der Nr. 135 wird allgemein ausgesprochen, aber nur für einfache Wurzeln bewiesen; im Falle mehrfacher Wurzeln ist es auch richtig, bedarf aber eines besonderen und etwas anders verlaufenden Beweises.

Heidelberg. G. Landsberg.

E. Bardey's Arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik vorzugsweise für Realschulen, höhere Bürgerschulen und verwandte Anstalten neu bearbeitet und mit einer Logarithmentafel versehen von Dr. H. Hartenstein. 3. Aufl. Leipzig, B. G. Teubner. 1900. Geb. M. 2.—.

Auf Grund einer Anregung in der Versammlung sächsischer Realschullehrer vom Jahre 1895 hat Herr Hartenstein die bekannte Bardeysche Aufgabensammlung für die besonderen Zwecke sechsklassiger Realschulen

umgearbeitet. Dabei sind nicht nur die Kapitel fortgelassen worden, welche über das Pensum der Realschulen hinausgehen, es sind auch viele Aufgaben durch andere ersetzt; es ist eine Tabelle der fünfstelligen Briggischen Logarithmen der Zahlen von 1—10 000 und der sechsstelligen Logarithmen der Zahlen von 10 000 bis 10 809 beigefügt, und die theoretischen Vorbemerkungen zu den einzelnen Paragraphen haben eine zweckmäfsige Umformung erfahren. Daher ist es erklärlich, dafs in wenigen Jahren das Buch schon zum dritten Male aufgelegt werden mufste.

Berlin. C. Färber.

E. Bardey's Aufgabensammlung, methodisch geordnet, mehr als 8000 Aufgaben enthaltend über alle Teile der Elementar-Arithmetik, vorzugsweise für Gymnasien, Realgymnasien und Ober-Realschulen. Neue Ausgabe nach der 24. Auflage bearbeitet von F. Pietzker und O. Presler. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1900. VII und 376 S. geb. 3,20 M.

E. Bardey's Arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik, vorzugsweise für Realschulen, Progymnasien und Realprogymnasien. Neue Ausgabe nach der 10. Auflage bearbeitet von F. Pietzker und O. Presler. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1901. VI und 314 S. geb. 2,60 M.

Der manchen Universitäten gemachte Vorwurf, dafs sie dem angehenden Mathematiker fast ausschliefslich abstrakte Mathematik bieten und die Aufgaben, die das Leben stellt, vernachlässigen, ist deshalb vielleicht nicht ganz ungerechtfertigt, weil der so vorgebildete Lehrer leicht in den Fehler verfällt, die praktische Seite im Unterricht an den mittleren Schulen verkümmern und so den kräftigsten Hebel für das Interesse und Verständnis der Schüler unbenutzt zu lassen.

Diesem Zustande wollen die vorliegenden beiden Schulbücher nach Kräften engegenzuwirken versuchen.

Im Interesse einer stetigen Fortentwickelung der Lehrmethode und des Lehrstoffes ist es mit Freuden zu begrüfsen, dafs die Verfasser sich an die mit so anerkannten Vorzügen versehenen Lehrbücher von Bardey möglichst eng angelehnt haben. Noch ist es der alte „Bardey“, aber ein neuer frischer Geist weht bereits hindurch, bald verständiger gruppierend, bald die wichtigen Momente deutlicher und schärfer markierend, hier durch Form oder Inhalt fast wertlose Aufgaben ausmerzend, dort im Sinne einer gesunden Konzentration Aufgaben aus den verschiedensten Unterrichtszweigen einschiebend.

Im Gegensatz zu früher finden wir jetzt zeitgemäfse Aufgaben aus der Wärmelehre und der Elektrizitätslehre, der Optik und der Mechanik, über Tragfähigkeit und Steigkraft, über Geschwindigkeit und Weg der Radfahrer, der Wurfgeschosse und der Planeten, aus der Flottengeschichte und über Kriegschiffe; mehr als früher sind Aufgaben aus der Erdkunde und Astronomie, der Planimetrie und Stereometrie entnommen. Bei weitem die meisten Aufgaben sind allerdings geblieben oder haben nur Änderungen in den Zahlen oder erforderlichenfalls im Text erhalten. So war es früher wohl nicht ganz korrekt (Lehrb., XXVIII 42), dafs g die Beschleunigung heifst, und die Herleitung von $g/2$ war nicht klar; die Neubearbeitung hat hier wie an so manchen anderen Stellen die bessernde Hand mit gröfstmöglicher Schonung

angelegt. Verschiedentlich hat logischer Zwang zu anderer Anordnung und stufenmäfsige Reihenfolge zur Einfügung neuer Aufgaben geführt. Der mit der 4. Auflage eingeschaltete Teil über die Proportionen begann bisher mit einer Reihe von Fragen, die nicht beantwortet und darum für den Schüler wertlos waren. Auch hier wurde wie bei den anderen theoretischen Einleitungen stark geändert und gebessert.

Das für Nichtvollanstalten bestimmte Lehrbuch hat mehrere nicht lehrplanmäfsige Abschnitte glücklicherweise endlich verloren. Was sollte z. B. die Berechnung der Logarithmen durch Reihen in diesem Buche? In der für Vollanstalten bestimmten Aufgabensammlung hat dieser Abschnitt dagegen eine willkommene Bereicherung erfahren durch die Entwickelung auch der anderen in der Schule vorkommenden transzendenten Funktionen in Reihen. Das Wesen der Lebensversicherung ist — zum ersten Male in einem Lehrbuche — in gröfster Ausführlichkeit in Abschnitt XXXIII klar und gründlich erörtert worden.

Beide Schulbücher lassen sich ganz gut neben den alten gebrauchen; doch ist von der Einsicht der Herren Fachlehrer zu hoffen, dafs bald, den Forderungen der Gegenwart entsprechend, die immer lauter Einlafs in die Schulen begehren, *nur* noch diese Neubearbeitungen in Gebrauch genommen werden, zumal zu dem Übergange eine behördliche Genehmigung nicht erforderlich erscheint.

Quedlinburg. HABENICHT.

Ignaz G. Wallentin. Grundzüge der Naturlehre für die unteren Klassen der Realschule. 2. Auflage. Wien, A. Pichlers W^we^ & Sohn. 1900.

Ignaz G. Wallentin. Lehrbuch der Physik für die oberen Klassen der Mittelschulen und verwandte Lehranstalten. 9. Auflage. Ausgabe für Realschulen. Wien, A. Pichlers W^we^ & Sohn. 1900.

Die Grundzüge geben in elementarer Darstellung die wichtigsten Erklärungen und Versuche aus der Mechanik, Wärme und Elektrizität; hieran schliefsen sich die Kapitel über Bewegung der Körper, Schall und Licht. Einige wichtige Abschnitte, wie z. B. die Dampfmaschinen, ebenso wie die Dynamomaschinen erscheinen dem Referenten etwas zu kurz behandelt (die letzteren sind mit vier Zeilen abgethan), während der Stofs elastischer und unelastischer Körper eher hätte abgekürzt werden oder fortbleiben können. Nicht immer sind die Erklärungen leicht verständlich, z. B. S. 37 „Wir nennen die gleichen Volumsänderungen der letzteren entsprechenden Temperaturänderungen gleich". Manche Angaben sind geeignet, Mifsverständnisse hervorzurufen, wenn z. B. S. 52 u. 53 gesagt wird: „Die Höhe der Wolken schätzt Humboldt in den Äquatorialgegenden auf 3000 Meter; bei uns gehen sie an regnerischen Tagen bis 600 Meter abwärts"; oder wenn es auf derselben Seite heifst: „Durch Anpflanzen von Wäldern wird der Regen befördert. Orte (sic), die das Loos der Entwaldung getroffen hat, haben selten Regen und sind daher unfruchtbar." Geradezu falsch ist es, wenn auf S. 96 als Beispiel für den Satz: „Je spitziger und kantiger die das Medium durchschneidende Fläche der Körper ist, desto kleiner der Widerstand", „spitziges Brustbein der Vögel" aufgeführt wird.

Die Figuren sind gut; jedoch ist nicht ersichtlich, weshalb in Fig. 127 der Horizont als gerade Linie eingezeichnet ist. Der Druck ist deutlich, die Orthographie die in Österreich übliche.

Beachtenswerter erscheint dem Referenten das Lehrbuch der Physik, das in ausführlicherer Weise die hauptsächlichsten Kapitel der Physik in meist korrekter Ausdrucksweise behandelt. Die Grundlehren der Astronomie sind in einem besonderen Kapitel eingeschaltet. Recht wertvoll erscheint die Zusammenstellung von ungefähr 300 Aufgaben am Schlusse des Buches, die nach den verschiedenen Abschnitten geordnet, in jedem einzelnen von den leichteren zu schwierigeren fortschreiten und sich eng an das im Buche Besprochene anschliefsen.

Berlin. A. Blümel.

Ignaz G. Wallentin. Grundzüge der Naturlehre für die unteren Klassen der Gymnasien. Fünfte Auflage. 1899. 188 Seiten.

Ignaz G. Wallentin. Lehrbuch der Physik. Ausgabe für Gymnasien. Zwölfte Auflage. 1900. 300 Seiten. Wien, A. Pichlers Wwe & Sohn.

Zweck und Ziel sind durch den Titel gekennzeichnet. Die Bücher enthalten in angemessenem Umfange die Grundlehren der Physik, Chemie und mathematischen Geographie. Von der üblichen Anordnung des Stoffes weichen sie nur in einigen Äufserlichkeiten ab, so durch das Auftreten des chemischen Teiles an ziemlich unerwarteten Stellen, ohne erkennbaren inneren Grund, also wohl nur der Folge im Schulplan zuliebe.

Naturwissenschaftliche Schulbücher kritisch zu betrachten, bietet die jetzige stärkere Betonung des naturwissenschaftlichen Unterrichts allen Anlafs. Denn wer die Früchte dieses Unterrichtes an den früheren Schülern nach längerem Verlassen der Schule zu erkennen bemüht ist, wird zweifeln müssen, ob des alten Schellbach offenherzige Bemerkungen über den Gegenstand schon einigen Wandel geschaffen haben.

Die Schule kann und will nicht aus jedem Schüler einen kleinen Physiker machen, sie soll ihn aber mit einiger Kenntnis der grundlegenden Erscheinungen ausrüsten und in das Wesen des naturwissenschaftlichen Denkens einzuführen suchen, damit bei der Mehrzahl der Schüler Verständnis für diese Seite des geistigen Lebens entwickelt werde, und ein kleinerer Teil für spätere Fachstudien Anregung und Vorbereitung finde. Ein Schulbuch hat sich deshalb weitgehende Beschränkung aufzuerlegen; aber es wird als Kennzeichen eines geschickten Pädagogen gelten müssen, wenn er es versteht, anregende Ausblicke über die eng gezogenen Grenzen hinaus zu eröffnen, um so auch dem komischen Wahne so mancher früheren Realschüler, „die Physik“ oder „die Chemie“ auf der Schule „gehabt“ zu haben, wirksam entgegen zu arbeiten.

Das vorliegende Buch — wir können uns in der Besprechung auf das gröfsere der beiden beschränken — gehört nun zweifellos zu den besseren Erzeugnissen seiner Richtung, macht aber doch keinen vollständig befriedigenden Eindruck. Es trägt vor allem den Stoff zu abgerissen und zu sehr zurechtgemacht vor, nicht in natürlicher Entwickelung, unter der nicht schlechtweg die historische Entwickelung verstanden zu werden braucht.

Kranken an demselben Übelstande auch noch die meisten mathematischen Lehrbücher, so sind wir doch, besonders durch die Arbeiten Machs, auf dem Gebiete der Physik jetzt schon an Besseres gewöhnt. Auch fehlen fast ganz Hinweise auf die physikalischen Erscheinungen, soweit sie sich nicht nur an den Apparaten des physikalischen Kabinets zeigen, und im Zusammenhange damit steht, daſs auf die Erläuterungen der Gesetze durch möglichst einfache Vorrichtungen wenig Wert gelegt ist. Wie anregend z. B. wirkt es auf den Schüler, wenn er die Stoſsgesetze sich durch leichte Versuche mit Geldstücken auf einer glatten Tischfläche selbst vorführen kann!

Es werde noch auf einige Einzelheiten aus verschiedenen Teilen des Buches eingegangen.

Die Ableitung der Pendelformel bereitet erfahrungsgemäſs dem Schüler erhebliche Schwierigkeiten. Der Verfasser leitet nach vorläufiger Diskussion der Bewegungserscheinungen des Pendels diese Formel ab durch die eingeschobene Behandlung der harmonischen Schwingung und nachfolgende Anwendung auf das Pendel, mit der üblichen Beschränkung auf kleine Amplituden. Noch besser dürfte es sein, die harmonische Schwingung und die mechanischen Bedingungen ihres Zustandekommens überhaupt voranzustellen, da sich auf diese Weise besonders unter Zuhilfenahme graphischer Darstellungen die harmonische Schwingung einfacher und klarer ergiebt, als durch Betrachtung der Pendelbewegung unter besonderen Annahmen. — In der Wärmelehre ferner dürfte jetzt auch in einem Elementarbuche der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie nicht fehlen, dessen physikalischer Inhalt sich mit Hilfe mechanischer Analogien recht wohl auch Schülern klar machen läſst und schon zur Vermeidung irrtümlicher Auffassung des ersten Hauptsatzes vorgetragen werden sollte. — In den Kapiteln über Magnetismus und Elektrizität würden einige Beispiele zur Versinnlichung der Gröſse der auftretenden Kräfte recht nützlich gewesen sein, ebenso ein stärkeres Hervortreten der Äquivalenz von Magneten und Kreisströmen. Damit würde auch die unzeitgemäſse Unterscheidung von Magneto-Induktion und Volta-Induktion leicht vermieden werden können.

Im Anschlusse an die letzten Bemerkungen möchte Referent eine ihm von befreundeter Seite gewordene Anregung wiedergeben, ob es nämlich für Elementarbücher nicht zweckmäſsig sei, die strömende Elektrizität vor der statischen zu behandeln. Die Erscheinungen der ersteren sind sozusagen ruhiger und im allgemeinen von dem Anfänger leichter zu verstehen; durch Hinzufügung des Begriffes der elektrischen Ladung ist auch ein Übergang zur statischen Elektrizität zu gewinnen, der den Zusammenhang der Erscheinungen hervortreten läſst.

Berlin. A. Rotth (Oberingenieur).

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze.

42. Es seien

$$f \equiv a_{11}x_1^2 + 2\,b_{12}x_1x_2 + \cdots + b_{44}x_4^2 = 0, \tag{1}$$

$$\varphi \equiv b_{11}x_1^2 + 2\,b_{12}x_1x_2 + \cdots + b_{44}x_4^2 = 0 \tag{2}$$

irgend 2 Flächen zweiter Ordnung in Tetraederkoordinaten; überdies mögen nicht alle Flächen des Büschels

$$\varkappa f + \lambda\varphi \equiv c_{11}x_1^2 + 2\,c_{12}x_1x_2 + \cdots + c_{44}x_4^2 = 0 \tag{3}$$

in Kegel oder Ebenenpaare ausarten. Alsdann wird die Determinante

$$\Sigma \pm (c_{11}c_{22}c_{33}c_{44}) \equiv G(\varkappa, \lambda) \tag{4}$$

nicht für alle Werte $\frac{\varkappa}{\lambda}$ verschwinden. Setzt man

$$\frac{\partial G(\varkappa, \lambda)}{\partial c_{\alpha\beta}} = C_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4), \tag{4a}$$

so repräsentiert bekanntlich die Gleichung:

$$F(\varkappa, \lambda) \equiv C_{11}u_1^2 + 2\,C_{12}u_1u_2 + \cdots + C_{44}u_4^2 = 0 \tag{5}$$

die Fläche (3) in Ebenenkoordinaten u_i. Es fragt sich, wie viel Flächenpaare

$$\varkappa_1 f + \lambda_1\varphi = 0 \quad \text{und} \quad \varkappa_2 f + \lambda_2\varphi = 0$$

im Büschel (3) existieren, so dafs die beiden Flächenpaare

$$\begin{cases} F(\varkappa_2, \lambda_2) = 0, & \varkappa_1 f + \lambda_1\varphi = 0 \quad \text{und} \\ F(\varkappa_1, \lambda_1) = 0, & \varkappa_2 f + \lambda_2\varphi = 0 \end{cases} \tag{6}$$

gleichzeitig apolar liegen oder, in algebraischer Fassung, dafs

$$\begin{cases} \varkappa_1 \dfrac{\partial G(\varkappa_2, \lambda_2)}{\partial \varkappa_2} + \lambda_1 \dfrac{\partial G(\varkappa_2, \lambda_2)}{\partial \lambda_2} = 0, \\ \varkappa_2 \dfrac{\partial G(\varkappa_1, \lambda_1)}{\partial \varkappa_1} + \lambda_2 \dfrac{\partial G(\varkappa_1, \lambda_1)}{\partial \lambda_1} = 0. \end{cases} \tag{6a}$$

Man zeigt leicht, daſs es *drei* Flächenpaare (6) giebt, deren Parameter $\frac{\varkappa}{\lambda}$ aus der Gleichung sechsten Grades $T(\varkappa, \lambda) = 0$ berechnet werden, wobei

$$(7)\quad \begin{cases} T(\varkappa, \lambda) = \frac{1}{16}\left\{\frac{\partial G(\varkappa,\lambda)}{\partial \varkappa}\frac{\partial H(\varkappa,\lambda)}{\partial \lambda} - \frac{\partial G(\varkappa,\lambda)}{\partial \varkappa}\frac{\partial H(\varkappa,\lambda)}{\partial \lambda}\right\}, \\ H(\varkappa, \lambda) = \frac{1}{144}\left\{\frac{\partial^2 G(\varkappa,\lambda)}{\partial \varkappa^2}\frac{\partial^2 G(\varkappa,\lambda)}{\partial \lambda^2} - \left(\frac{\partial^2 G(\varkappa,\lambda)}{\partial \varkappa\,\partial \lambda}\right)^2\right\}. \end{cases}$$

Bedeutet in der That $g(x_1, x_2)$ irgend eine binäre Form von x_1, x_2, und sucht man ein Wertepaar $\frac{\xi_1}{\xi_2}$ und $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ den beiden Gleichungen

$$(8)\qquad \xi_1 g'(\eta_1) + \xi_2 g'(\eta_2) = 0, \quad \eta_1 g'(\xi_1) + \eta_2 g'(\xi_2) = 0$$

gemäſs zu bestimmen, so erhält man aus

$$\xi_1 : \xi_2 = g'(\eta_2) : -g'(\eta_1)$$

und aus der zweiten Relation in (8) für $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ die Gleichung

$$(9)\begin{cases} \frac{\partial^{n-1} g}{\partial \eta_1^{n-1}}(g'(\eta_2))^{n-1} - \binom{n-1}{1}\frac{\partial^{n-1} g}{\partial \eta_1^{n-2}\,\partial \eta_2}(g'(\eta_2))^{n-2}\,g'(\eta_1) \\ +\binom{n-1}{2}\frac{\partial^{n-1} g}{\partial \eta_1^{n-3}\,\partial \eta_2^2}(g'(\eta_2))^{n-3}(g'(\eta_1))^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{\partial^{n-1} g}{\partial \eta_2^{n-1}}(g'(\eta_1))^{n-1} = 0. \end{cases}$$

Nach der Theorie der assoziierten Kovarianten[1]) ist die linke Seite in (9) das Produkt aus $f(\eta_1, \eta_2)$ in eine Kovariante vom Grade $(n-1)(n-2)$, welche allein als (eigentliche) Lösung des Problems gelten kann.

Für einen Kegelschnittbüschel $\varkappa f + \lambda\varphi = 0$ ist von mir bereits früher (Zeitschrift für Math. u. Phys. **20**, 153 ff.) gezeigt worden, daſs nur zwei C_2

$$\varkappa_1 f + \lambda_1\varphi = 0, \quad \varkappa_2 f + \lambda_2\varphi = 0$$

existieren, welche *gleichzeitig* apolar zu einander liegen. Dieselben sind bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \varkappa^2}\frac{\partial^2 G}{\partial \lambda^2} - \left(\frac{\partial^2 G}{\partial \varkappa\,\partial \lambda}\right)^2 = 0.$$

In den Fällen $n = 5$ bis $n = 9$ kann man die Ausrechnung nachsehen bei Clebsch, Binäre Formen, pag. 337. Der Fall $n = 6$ ist durch seine Anwendungen auf die Lehre von den Komplexen 2. Ordnung besonders interessant.

Darmstadt, den 7. Mai 1901. S. Gundelfinger.

---

1) Über das Geschichtliche vergleiche man meine Arbeit: Über binäre Formen im Journ. für Math. **74**, 87—91. Daselbst ist auch zum ersten Male das einfachste System von *Rekursionsformeln* zur Darstellung der assoziierten Kovarianten durch die fundamentalen Kovarianten gegeben. Diese Formeln sind später ohne Angabe der schon vorliegenden Quelle in die Theorie der binären Formen von Clebsch übergegangen.

43. Ein bekannter Elementarsatz der Zahlenlehre sagt aus, daſs das Produkt von n konsekutiven ganzen Zahlen $a(a+1)\cdots(a+n-1)$ stets durch $n!$ teilbar ist. Es sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen aufzustellen, unter denen bereits das Produkt von $n-1$ konsekutiven ganzen Zahlen $(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)$ durch $n!$ teilbar wird.

Königsberg i. Pr. W. Fr. Meyer.

---

44. Es seien $a_1, a_2, \cdots, a_{\varphi(n)}$ die $\varphi(n)$, zu einer natürlichen Zahl $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$ teilerfremden Zahlen $< n$, und es bedeute μ das kleinste gemeinsame Vielfache der Differenzen $p_1 - 1, p_2 - 1, \cdots, p_n - 1$. Dann soll bewiesen werden, daſs irgend eine ganze symmetrische (homogene) Funktion der a vom Grade g immer dann durch n teilbar ist, wenn g nicht durch μ teilbar ist. Im besonderen ist die g^{te} Potenzsumme der a sicher nicht durch n teilbar, wenn g teilbar durch μ ist.

(Verallgemeinerung eines Satzes von Herrn K. Hensel, dieses Archiv (3) **1**, 319).

Königsberg i. Pr. W. Fr. Meyer.

---

45. Gegeben seien in einer Ebene fünf Punkte 1, 2, . ., 5, durch die ein (nicht zerfallender) Kegelschnitt K bestimmt werde. Man zerlege die fünf Punkte auf irgend eine Weise in ein Dreieck, etwa (1, 2, 3), und ein Punktepaar (4, 5).

Dann existiert ein einziges Viereck (A, B, C, D) derart, daſs einmal sein Kardinaldreieck durch (1, 2, 3) gebildet wird, und überdies das Punktepaar (4, 5) bezüglich des Vierecks (A, B, C, D) [d. i. bezüglich des Kegelschnittbüschels (A, B, C, D)] konjugiert ist.

Von den vier durch A, B, C, D gebildeten Dreiecken greife man eines, etwa (A, B, C) heraus. Dann giebt es vier Kegelschnitte durch 4, 5, die dem Dreieck (A, B, C) einbeschrieben sind; *diese berühren alle den Kegelschnitt K.* Solcher K berührenden Kegelschnitte, die allein durch die Figur der fünf Punkte 1, 2, . . ., 5 bestimmt sind, giebt es also *im ganzen 160.* (Verallgemeinerung eines bekannten Feuerbachschen Dreieckssatzes).

Königsberg i. Pr. W. Fr. Meyer.

---

46. J'ai doné le premier, je crois (Journ. de Math. spéciales de M. de Longchamps février 1889), le téorème suivant qui m'a servi de point de départ pour la téorie des triangles multiortologiques. *Si deus triangles ABC, $A'B'C'$ sont doublement ortologiques par permutation circulaire, ils le sont triplement.* Ce téorème pourait s'énoncer *en général* ainsi. *Si les perpendiculaires abaissées de A, B, C sur $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ sont concourantes ainsi que les perpendiculaires abaissées de A, B, C sur $C'A'$, $A'B'$, $B'C'$, les deus triangles ABC, $A'B'C'$ sont triortologiques par permutation circulaires.* Je propose d'expliquer pourquoi, si $A'B'C'$ dégénère dans le triangle aplati formé par les pieds des perpendiculaires abaissées de A, B, C sur une droite quelconque, le téorème n'a plus lieu et que seules les perpendiculaires abaissées de A', B', C' sur BC, CA, AB sont concourantes.

Paris. E. Lemoine.

47. Der Inhalt des Körpers, welcher aus einer Regelfläche durch zwei parallele Ebenen geschnitten wird, läſst sich durch die *Prismatoidformel* berechnen. Bezeichnet man mit h den Abstand jener beiden Ebenen, mit g und G die Zahlen der in ihnen befindlichen Grundflächen des Körpers, endlich mit D die Zahl seines Mittelschnittes [d. i. des Schnittes in der durch den Mittelpunkt von h parallel zu g und G gelegten Ebene], so ist der Inhalt des Körpers

$$\frac{h}{3}\left(\frac{g+G}{2}+2D\right).$$

Um diesen Satz zu beweisen, denke man sich den Anfangspunkt der Koordinaten in eine der beiden Grundflächen, z. B. g, und die x-Achse in die darin auf derselben senkrecht stehende Gerade verlegt. Die Gleichungen der Regelfläche sind

$$x=\alpha u,\ y=Y+\beta u,\ z=Z+\gamma u,$$

worin $Y, Z, \alpha, \beta, \gamma$ Funktionen eines Parameters t sind, und zwar die beiden ersteren Zahlen die Koordinaten eines beliebigen Punktes des Randes von g, die drei letzteren die Richtungskosinus des durch ihn gehenden Strahles bedeuten. Für den Inhalt des zur Abszisse x gehörigen Querschnittes der Regelfläche findet man mit Hilfe der allgemeinen Formel für den Inhalt einer ebenen Fläche den Ausdruck

$$Q(x)=Ax^2+Bx+C,$$

worin A, B, C Konstante bedeuten, welche sich bekanntlich durch g, G, D und h darstellen lassen.

Innsbruck. O. Stolz.

B. Lösungen.

Auszug aus einem Schreiben an Herrn E. Jahnke.

Zu **12** (I, 363). — Eine vollständige Lösung der ersten Kneserschen Aufgabe im ersten Band des Archivs liegt auch in Gleichung (12) auf S. 454 meiner Ausgabe von Hesses Raumgeometrie 1876. Sobald nämlich die x_k den Gleichungen

$$\Sigma y_i^{(1)} x_i=0,\ \ \Sigma y_i^{(2)} x_i=0,\ \ \Sigma y_i^{(3)} x_i=0,\ \ldots$$

genügen, gilt Gleichung (12^a) l. c.

Die Beantwortung der zweiten Aufgabe dürfte durch folgende Betrachtung gegeben sein.

Es sei

$$\varphi\equiv\sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa\lambda}x_\varkappa x_\lambda; \qquad (\varkappa,\lambda=1,2,\ldots,n)$$

$$f\equiv\varphi+2x_{n+1}v_x+2x_{n+2}w_x+\cdots+2x_{n+\varrho}t_x\text{[1]})$$

---

1) Um Verwechselungen zu vermeiden, habe ich das ν in meinem ersten Schreiben (diese Zeitschrift 2, 216) durch ϱ ersetzt.

Dann ist die quadratische Form der x_p $(p=1,2,\ldots,n+\varrho)$ $(n>r>\varrho)$

$$
\text{(I)}\qquad \psi \equiv \begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1r} & v_1 & w_1 & \cdots & t_1 & \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{r1} & \cdots & a_{rr} & v_r & w_r & \cdots & t_r & \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_r} \\
v_1 & \cdots & v_r & 0 & 0 & \cdots & 0 & v_x \\
w_1 & \cdots & w_r & 0 & 0 & \cdots & . & w_x \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
t_1 & \cdots & t_r & 0 & 0 & \cdots & . & t_x \\
\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_r} & v_x & w_x & \cdots & t_x & f
\end{vmatrix}
$$

nur von den Variabeln $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ abhängig; wie man sofort sieht, wenn man in I die $r+\varrho$ ersten (Horizontal- resp. Vertikal-) Reihen mit $x_1, \cdots, x_r; x_{n+1}, \cdots, x_{n+\varrho}$ multipliziert und successive von der letzten Reihe abzieht. Man kann daher setzen

$$
\text{(I)}\qquad \psi \equiv \sum_{\alpha,\beta}{}_{r+1}^{n} B_{\alpha\beta}\, x_\alpha x_\beta,
$$

worin

$$
\text{(I}^{\text{a}}\text{)}\qquad B_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1r} & v_1 & w_1 & \cdots & t_1 & a_{1\alpha} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{r1} & \cdots & a_{rr} & v_r & w_r & \cdots & t_r & a_{r\alpha} \\
v_1 & \cdots & v_r & 0 & 0 & \cdots & 0 & v_\alpha \\
w_1 & \cdots & w_r & 0 & 0 & \cdots & 0 & w_\alpha \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
t_1 & \cdots & t_r & 0 & 0 & \cdots & 0 & t_\alpha \\
a_{\beta 1} & \cdots & a_{\beta r} & v_\beta & w_\beta & \cdots & t_\beta & a_{\alpha\beta}
\end{vmatrix}.
$$
[1]

Nimmt man

$$
\text{(II)}\qquad A_r = \begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1r} & v_1 & \cdots & t_1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{r1} & \cdots & a_{rr} & v_r & \cdots & t_r \\
v_1 & \cdots & v_r & 0 & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
t_1 & \cdots & t_r & 0 & \cdots & 0
\end{vmatrix}
$$

von Null verschieden an und setzt in (I)

$$
\text{(II}^{\text{a}}\text{)}\qquad \tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1} = \xi_1, \quad \cdots, \quad \tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_r} = \xi_r,
$$

1) Vgl. das analoge Theorem bei Herrn Frobenius, Journal f. d. reine u angew. Math. 114, 189 Glchgen (3) u. (4).

so kann man $x_1, x_2, \cdots, x_r; x_{n+1}, \cdots, x_{n+\varrho}$, stets so bestimmen, daſs $\xi_1 \cdots \xi_r$ *beliebige* Werte annehmen und daſs gleichzeitig *bei völliger Willkür von* $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$

(IIᵇ) $v_1 x_1 + \cdots + v_r x_r + 0 \cdot x_{n+1} + \cdots + 0 \cdot x_{n+\varrho} = -\{v_{r+1} x_{r+1} + \cdots + v_n x_n\}$

. . . . etc.

d. h. daſs:

$$(\text{II}^b) \qquad v_x = 0, \qquad w_x = 0, \qquad t_x = 0.$$

Man hat dann nach Analogie des Theorems von Herrn Frobenius[1])

$$(\text{III}) \qquad A_r \varphi = \psi + \chi, \quad v_x = 0, \quad w_x = 0, \quad \cdots, \quad t_x = 0,$$

worin ψ durch (I) und (Iᵃ) und χ durch

$$(\text{III}^a) \qquad \chi = -\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & v_1 & \cdots & t_1 & \xi_1 \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & v_r & \cdots & t_r & \xi_r \\ v_1 & \cdots & v_r & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_1 & \cdots & t_r & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \xi_1 & \cdots & \xi_r & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

definiert werden.

Mutatis mutandis kann die Signatur (der Rang) der quadratischen Form $A_r^{-1}\chi$ der willkürlichen Variabeln $\xi_1, \cdots, \xi_r$ nach meiner Formel 11 S. 454 in Hesses Raumgeometrie[2]) berechnet werden. Im Hinblick auf die Bemerkung in der Einleitung dieses Schreibens läſst sich die Zerlegung in (III) in Worten so ausdrücken: Die *Signatur (der Rang) der quadratischen Form* $\varphi = \sum_{\varkappa,\lambda}{}_1^n a_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda$, *zwischen deren Variabeln* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *die* ϱ *linearen Gleichungen*

$$v_x = 0, \quad w_x = 0, \quad \cdots, \quad t_x = 0$$

bestehen, ist gleich der Summe der Signaturen (Rangzahlen) der beiden quadratischen Formen

$$A_r^{-1} \sum_{\alpha,\beta}{}_{r+1}^{n} B_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta \text{ (cf. I}^a\text{, II) und } \sum_{i,k}{}_1^r a_{ik} x_i x_k,$$

$$\text{wobei } \sum_i{}_1^r v_i x_i = 0, \quad \cdots, \quad \sum_i{}_1^r t_i x_i = 0.$$

Darmstadt, den 15. September 1901. S. Gundelfinger.

1) l. c. S. 191.

2) Dieselbe gilt für *jede* quadratische Form; sie giebt also auch die Zerlegung von $A_r^{-1}\chi$ in $r - \varrho$ Quadrate.

Zu **32** (Bd. II, S. 213) (Ed. Janisch). Man nehme Dreieck abc als Fundamentaldreieck für trimetrische Normalkoordinaten, und die Gleichung des Kegelschnitts sei $a_1 x_2 x_3 + a_2 x_3 x_1 + a_3 x_1 x_2 = 0$. Ferner setze man $\frac{\sin mca}{\sin mcb} = \lambda$; dann sind die Koordinaten von m: $\lambda a_1 + a_2$, $\lambda(\lambda a_1 + a_2)$, $-\lambda a_3$. Bezeichnet man noch die Koordinaten des Punktes s mit b_1, b_2, b_3, so erhält man nacheinander folgende Systeme von Koordinaten und Gleichungen:

Koordinaten von

$$a': \quad -\frac{a_1 b_2 b_3}{a_2 b_3 + a_3 b_2}, \quad b_2, \quad b_3;$$

$$b': \quad b_1, \quad -\frac{a_2 b_3 b_1}{a_3 b_1 + a_1 b_3}, \quad b_3;$$

$$c': \quad b_1, \quad b_2, \quad -\frac{a_3 b_1 b_2}{a_1 b_2 + a_2 b_1}.$$

Gleichungen von

$$ma': \quad \lambda(a_2 b_3 + a_3 b_2) x_1 - a_2 b_3 x_2 + (\lambda a_1 + a_2) b_2 x_3 = 0,$$

$$mb': \quad -\lambda a_1 b_3 x_1 + (a_3 b_1 + a_1 b_3) x_2 + (\lambda a_1 + a_2) b_1 x_3 = 0,$$

$$mc': \quad \lambda a_3 a_1 b_2 x_1 + a_2 a_3 b_1 x_2 + (\lambda a_1 + a_2)(a_1 b_2 + a_2 b_1) x_3 = 0.$$

Koordinaten von

$$(ma',\, bc): \quad 0, \quad (\lambda a_1 + a_2) b_2, \quad a_2 b_3;$$

$$(mb',\, ca): \quad (\lambda a_1 + a_2) b_1, \quad 0, \quad \lambda a_1 b_3;$$

$$(mc',\, ab): \quad a_2 b_1, \quad -\lambda a_1 b_2, \quad 0.$$

Gleichung der Geraden μ:

$$\lambda a_1 b_2 b_3 x_1 + a_2 b_3 b_1 x_2 - (\lambda a_1 + a_2) b_1 b_2 x_3 = 0.$$

Gleichung der Geraden ms:

$$\lambda(\lambda a_1 b_3 + a_2 b_3 + a_3 b_2) x_1 - (\lambda a_1 b_3 + \lambda a_3 b_1 + a_2 b_3) x_2 - (\lambda a_1 + a_2)(\lambda b_1 - b_2) x_3 = 0.$$

Koordinaten des Punktes m':

$$\frac{a_1}{\lambda a_1 b_3 + a_2 b_3 + a_3 b_2}, \quad -\frac{a_2}{\lambda a_1 b_3 + \lambda a_3 b_1 + a_2 b_3}, \quad \frac{1}{\lambda b_1 - b_2}.$$

Gleichungen von

$$b'c': \quad -a_1 b_2 b_3 x_1 + b_1(a_3 b_1 + a_1 b_3) x_2 + b_1(a_1 b_2 + a_2 b_1) x_3 = 0;$$

$$c'a': \quad b_2(a_2 b_3 + a_3 b_2) x_1 - a_2 b_3 b_1 x_2 + b_2(a_1 b_2 + a_2 b_1) x_3 = 0;$$

$$a'b': \quad b_3(a_2 b_3 + a_3 b_2) x_1 + b_3(a_3 b_1 + a_1 b_3) x_2 - a_3 b_1 b_2 x_3 = 0.$$

Koordinaten von

$$(m'a,\, b'c'): \quad b_1 b_2(\lambda a_1 + a_2)(a_3 b_1 + a_1 b_3) + a_2 b_1 b_3(a_1 b_2 + a_2 b_1), \quad -a_1 a_2 b_2 b_3(\lambda b_1 - b_2), \quad a_1 b_2 b_3(\lambda a_1 b_3 + \lambda a_3 b_1 + a_2 b_3);$$

$$(m'b,\, c'a'): \quad a_1 a_2 b_1 b_3(\lambda b_1 - b_2), \quad b_1 b_2(\lambda a_1 + a_2)(a_2 b_3 + a_3 b_2) + \lambda a_1 b_2 b_3(a_1 b_2 + a_2 b_1), \quad a_2 b_1 b_3(\lambda a_1 b_3 + a_2 b_3 + a_3 b_2);$$

$$(m'c,\, a'b'): \quad -a_1 b_1 b_2(\lambda a_1 b_3 + \lambda a_3 b_1 + a_2 b_3), \quad a_2 b_1 b_2(\lambda a_1 b_3 + a_2 b_3 + a_3 b_2), \quad a_2 b_1 b_3(a_2 b_3 + a_3 b_2) - \lambda a_1 b_2 b_3(a_3 b_1 + a_1 b_3).$$

Diese Koordinaten genügen der Gleichung der Geraden μ.

Gleichungen von

$$m'a':\quad (a_2b_3+a_3b_2)(\lambda a_1b_3+a_2b_3+a_3b_2)x_1+a_1b_3(\lambda a_1b_3+\lambda a_3b_1+a_2b_3)x_2 - a_3a_1b_2(\lambda b_1-b_2)x_3=0;$$

$$m'b':\quad a_2b_3(\lambda a_1b_3+a_2b_3+a_3b_2)x_1+(a_3b_1+a_1b_3)(\lambda a_1b_3+\lambda a_3b_1+a_2b_3)x_2 + a_2a_3b_1(\lambda b_1-b_2)x_3=0;$$

$$m'c':\quad -b_2(\lambda a_1b_3+a_2b_3+a_3b_2)x_1+b_1(\lambda a_1b_3+\lambda a_3b_1+a_2b_3)x_2 + (a_1b_2+a_2b_1)(\lambda b_1-b_2)x_3=0.$$

Koordinaten von

$(m'a', bc)$: 0, $a_3b_2(\lambda b_1-b_2)$, $b_3(\lambda a_1b_3+\lambda a_3b_1+a_2b_3)$;

$(m'b', ca)$: $-a_3b_1(\lambda b_1-b_2)$, 0, $b_3(\lambda a_1b_3+a_2b_3+a_3b_2)$;

$(m'c', ab)$: $b_1(\lambda a_1b_3+\lambda a_3b_1+a_2b_3)$, $b_2(\lambda a_1b_3+a_2b_3+a_3b_2)$, 0.

Gleichung der Geraden μ':

$$(\lambda a_1b_3+a_2b_3+a_3b_2)\frac{x_1}{b_1}-(\lambda a_1b_3+\lambda a_3b_1+a_2b_3)\frac{x_2}{b_2}+a_3(\lambda b_1-b_2)\frac{x_3}{b_3}=0.$$

Die Koordinaten von s (b_1, b_2, b_3) erfüllen diese Gleichung; mithin geht die Gerade μ' durch s.

Koordinaten von

$(ma, b'c')$: $b_1b_3(\lambda a_1+a_2)+a_3b_1(\lambda b_1-b_2)$, $b_2b_3(\lambda a_1+a_2)$, $-a_3b_2b_3$;

$(mb, c'a')$: $b_1b_3(\lambda a_1+a_2)$, $b_2b_3(\lambda a_1+a_2)-a_3b_2(\lambda b_1-b_2)$, $-\lambda a_3b_1b_3$;

$(mc, a'b')$: $a_3b_1b_2$, $\lambda a_3b_1b_2$, $b_3(a_2b_3+a_3b_2)+\lambda b_3(a_3b_1+a_1b_3)$.

Diese Koordinaten genügen der Gleichung der Geraden μ'.

Der hierdurch bewiesene Satz der Aufgabe Nr. **32** hat sich schon bei meiner Bearbeitung der Aufgabe Nr. 1774 der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht (Bd. XXXI, S. 447) als Verallgemeinerung dieser Aufgabe ergeben; auch sind dort die Resultate der vorstehenden Entwickelungen bereits angegeben worden. Betrachtet man x_1, x_2, x_3 als Linienkoordinaten, so ergiebt sich der folgende duale Satz:

Sind abc und $a'b'c'$ zwei perspektivische, einem Kegelschnitte K umgeschriebene Dreiseite, und ist m eine beliebige Tangente an K, dann schneiden sich die drei Geraden (ma', bc), (mb', ca), (mc', ab) in einem auf der Kollineationsachse s liegenden Punkte μ. Ist m' die zweite durch den Punkt ms gehende Tangente an K, dann gehen durch denselben Punkt μ die drei Geraden $(m'a, b'c')$, $(m'b, c'a')$, $(m'c, a'b')$. Umgekehrt schneiden sich in einem anderen auf s liegenden Punkte μ' die sechs Geraden $(m'a', bc)$, $(m'b', ca)$, $(m'c', ab)$, $(ma, b'c')$, $(mb, c'a')$, $(mc, a'b')$.

Prenzlau. W. Stegemann.

Anmerkung: Nach einer brieflichen Mitteilung des Herrn Prof. Sobotka (Brünn) findet sich der Satz in der Abhandlung „*Sur une généralisation du théorème de Pascal etc.*“ par M. Aubert (Nouv. Annales (3) **8,** 529—535). Aubert leitet u. a. den Satz durch wiederholte Anwendung des Pascalschen Theorems ab.

Prag. Ed. Janisch.

Zu **33** (Bd. II, S. 213) (W. Fuhrmann). Es sei $\sphericalangle BAK = \varphi$, $\sphericalangle ABL = \psi$; die Gegenstrahlen von AK und BL seien AK' und BL'. Zu der Schnittlinie AB ziehe man durch A in der Halbebene BAK die Senkrechte AX und in der Halbebene ABL die Senkrechte AY; die Gegenstrahlen seien AX' und AY'; dann ist $\sphericalangle XAY = \vartheta$. Ferner lege man in der Ebene BAK durch B die Parallele zu AK, welche AX in C treffen möge; der Schnittpunkt von AY und BL sei D. Die Punkte A, B, C, D bestimmen jetzt ein Tetraeder, dessen Seitenfläche BCD der Geraden AK parallel ist und die Gerade BL enthält; daher ist die Länge h des von A aus auf BCD gefällten Lotes AP zugleich die kürzeste Entfernung der windschiefen Geraden AK und BL.

Es werde nun zunächst vorausgesetzt, dafs φ und ψ spitze Winkel sind. Dann liegt Punkt C auf AX', Punkt D auf AY, und es ist daher $\sphericalangle CAD = 180^0 - \vartheta$. Fällt man nun von P aus auf BD und BC die Senkrechten PQ und PR, und setzt man $BQ = p$, $BR = q$, $PQ = x$, $PR = y$, $\sphericalangle DBC = \alpha$, so hat man:

$$x \sin\alpha = q - p\cos\alpha; \quad y \sin\alpha = p - \cos\alpha.$$

Verbindet man noch A mit Q, so erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck APQ: $h^2 = AO^2 - x^2$. Die beiden Dreiecke ABD und ABC sind bei A rechtwinklig, und es ist $\sphericalangle ABD = \psi$, $\sphericalangle ABC = \varphi$. Man hat also: $AQ = a\sin\psi$; $BQ = p = a\cos\psi$; $BR = q = a\cos\varphi$. Mithin:

$$h^2 = a^2\sin^2\psi - \frac{(a\cos\varphi - a\cos\psi\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}$$
$$= \frac{a^2(\sin^2\psi - \cos^2\varphi + 2\cos\varphi\cos\psi\cos\alpha - \cos^2\alpha)}{\sin^2\alpha}.$$

Hierin ist noch der Winkel α zu bestimmen. Dies erfolgt mittels des Cosinussatzes aus dem Dreieck BCD. Es ist nämlich $BC\cos\varphi = a$, $BD\cos\psi = a$, und weil $\sphericalangle CAD = 180^0 - \vartheta$ ist,

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 + 2\,AC\cdot AD\cdot\cos\vartheta = a^2(\operatorname{tg}^2\varphi + \operatorname{tg}^2\psi + 2\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi\cos\vartheta).$$

Man findet nun:

$$\cos\alpha = \frac{BC^2 + BD^2 - CD^2}{2\,BC\cdot BD}$$
$$= \left(\frac{a^2}{\cos^2\varphi} + \frac{a^2}{\cos^2\psi} - a^2\operatorname{tg}^2\varphi - a^2\operatorname{tg}^2\psi - 2a^2\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi\cos\vartheta\right)\frac{\cos\varphi\cos\psi}{2a^2}$$
$$= \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta;$$
$$2\cos\varphi\cos\psi\cos\alpha - \cos^2\alpha = \cos^2\varphi\cos^2\psi - \sin^2\varphi\sin^2\psi\cos^2\vartheta.$$

Setzt man dies in die Gleichung für h^2 ein, so erhält man

$$h^2 = \frac{a^2\sin^2\varphi\sin^2\psi\sin^2\vartheta}{\sin^2\alpha}; \quad h = \frac{a\sin\varphi\sin\psi\sin\vartheta}{\sqrt{1 - (\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta)^2}}.$$

Legt man durch AK die zu BCA senkrechte Ebene, welche BL in M treffen möge, so ist M der eine Endpunkt der von AK nach BL zu ziehenden kürzesten Geraden. Da $AK \parallel BC$ ist, und da die Ebene AKM auch die Gerade AP enthält, so ist PM die zu BC parallele Schnittlinie

der Ebenen AKM und BCD. Zieht man durch P die Parallele zu BD, welche BC in O trifft, so ist $BMPO$ ein Parallelogramm, und man hat also:

$$BM = PO = \frac{y}{\sin\alpha} = \frac{p - q\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{a\sin\varphi(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\vartheta)}{1 - (\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta)^2}.$$

Damit ist die Lage des Punktes M auf der Geraden BL bestimmt. Ist N der andere, auf AK liegende Endpunkt der kürzesten Geraden, so ist $APMN$ ein Rechteck; mithin:

$$AN = PM = \frac{x}{\sin\alpha} = \frac{q - p\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{a\sin\psi(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta)}{1 - (\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta)^2},$$

wodurch auch die Lage des Punktes N bestimmt ist.

Ist einer der Winkel, etwa φ, ein stumpfer Winkel, so ist $\sphericalangle BAK'$ ein spitzer Winkel; die entwickelten Formeln können daher auf den Flächenwinkel YAX' bezogen werden, indem man $180^0 - \varphi$ statt φ und $180^0 - \vartheta$ statt ϑ setzt. Aufserdem mufs man den hierdurch erhaltenen Wert von AN, um ihn wieder auf den Flächenwinkel XAY zu beziehen, mit entgegengesetztem Vorzeichen versehen, da im Flächenwinkel YAX' die Strecke AN in der Richtung AK' gemessen worden ist. Führt man dies alles aus, so bleiben die drei Formeln für h, BM und AN unverändert. Sind beide Winkel φ und ψ stumpf, so sind $\sphericalangle BAK'$ und $\sphericalangle ABL'$ spitze Winkel; die Formeln können also auf den Flächenwinkel $X'AY'$ bezogen werden, indem man $180^0 - \varphi$ statt φ und $180^0 - \psi$ statt ψ setzt. Die Werte von AN und BM sind noch, um sie wieder auf den Flächenwinkel XAY zu beziehen, mit entgegengesetzten Vorzeichen zu versehen. Auch in diesem Falle kommt man zu den ursprünglichen Formeln zurück. Die letzteren gelten also für beliebige Winkel φ und ψ.

Prenzlau. W. Stegemann.

Eine ähnliche Bestimmung des kürzesten Abstandes ist auch von Herrn E. Rath, Stuttgart eingegangen.

Zu **37** (Bd. II, S. 356) (S. Gundelfinger). Die Gleichung der gegebenen Kurve sei $(x^2 + y^2)^n + f(x, y) + c = 0$, wobei die Funktion f vom $(2n - 1)$ten Grad in x, y und c das Absolutglied ist. Durch Einführung der Polarkoordinaten r, φ erhält diese Gleichung die Form $r^{2n} + \varphi(r) + c = 0$. Hier ist $\varphi(r)$ vom $(2n - 1)$ten Grad in Beziehung auf r. Das Produkt der $2n$ Wurzeln $r_1, r_2, \ldots, r_{2n}$ ist gleich dem Absolutglied c, also von dem Winkel φ unabhängig. Ist daher Q der Ursprung des Koordinatensystems, und sind $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$ die den Wurzeln $r_1, r_2, \ldots, r_{2n}$ entsprechenden, auf einer Geraden liegenden Punkte der Kurve, so ist das Produkt $QP_1 . QP_2 \ldots QP_{2n}$ dasselbe für alle durch Q gehenden Geraden.

Stuttgart. E. Rath.

Eine ähnliche Lösung ist noch von Herrn stud. K. Cwojdziński, Lemberg eingegangen.

---

2. Anfragen.

4. Die Aufgabe: Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, von der die Schenkel eines gegebenen Winkels ein Stück von gegebener Länge abschneiden, findet man als erstes Beispiel von durch Zirkel und Lineal im allgemeinen nicht lösbaren Aufgaben in dem bekannten Werkchen von Petersen: „Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Konstruktionsaufgaben". Es ist dort weiter noch angeführt, daſs die Lösung im allgemeinen nicht möglich ist, weil es sich um die Konstruktion der Schnittpunkte einer Geraden mit einer Konchoide handelt, daſs aber für gewisse Lagen des Punktes (wenn er z. B. auf der Halbierungslinie des Winkels liegt) die Gerade eine so besondere Lage im Verhältnis zur Konchoide bekommen kann, daſs eine elementare Lösung möglich wird. Rechnerisch zeigt sich die Unmöglichkeit der allgemeinen Lösung in dem Auftreten einer Gleichung 4. Grades, durch welche die Schnittpunkte bestimmt werden und in deren Koeffizienten die Gröſsen eingehen, von denen die gegenseitigen Lagen- und Gröſsenverhältnisse der gegebenen Stücke abhängen. Ein sehr einfacher Fall ergiebt sich von vornherein durch die Annahme paralleler Winkelschenkel.

Wo findet man eine Analyse aller möglichen Spezialfälle, in denen eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal ausgeführt werden kann?

Windsbach. A. Wendler.

---

5. Für die von Steiner (Ges. W. II, 668) erwähnte „einst berühmte Aufgabe" — In einer Ebene sind zwei sich schneidende Geraden p und q, weiter ein Punkt R gegeben. Es sind durch R solche Transversalen zu ziehen, daſs ihre Längen zwischen p und q einer gegebenen Strecke (d) gleich werden — habe ich die folgende einfache Lösung gefunden:

Man ziehe parallel zu p (oder q) eine Gerade r, welche von R den nämlichen Abstand hat wie die Gerade p von R. Man betrachte p und r als Asymptoten einer Hyperbel h, welche durch den Punkt R bestimmt ist. Beschreibt man aus R einen Kreis (k) mit dem Radius, der der gegebenen Länge d gleich ist, so schneidet dieser die Hyperbel h in zwei oder vier Punkten (1, 2, 3, 4). Die Verbindungslinien R_1, R_2, R_3, R_4 sind die gesuchten Transversalen.

Sollte die Gerade r parallel zu q gezogen sein, so bekommt man die identischen Transversalen auf dieselbe Weise wie früher.

Ist diese Lösung schon bekannt?

Agram. G. Majcen.

---

6. Ist der nachstehende Determinantensatz bekannt, bezw. wo ist er veröffentlicht?

Bedeuten c_{ik} die n^2 Koeffizienten einer orthogonalen Substitution, und bezeichnet man mit

$$[c_{i_1 k_1} c_{i_2 k_2} \cdots c_{i_r k_r}] \qquad (k_1, k_2, \ldots, k_r = 1, 2, \ldots, n;\ r \leqq n)$$

die aus den r^2 Elementen $c_{i_1 k_1}, c_{i_2 k_1}, \cdots c_{i_r k_1}, c_{i_1 k_2}, \cdots$ gebildete Determinante, so ist

$$\sum_{k_1, \cdots, k_r} [c_{i_1 k_1} c_{i_2 k_2} \cdots c_{i_r k_r}][c_{l_1 k_1} c_{l_2 k_2} \cdots c_{l_r k_r}]$$

gleich Eins oder Null, je nachdem die beiden Zahlenreihen $i_1, \cdots, i_r$ und $l_1, \cdots, l_r$ vollkommen oder nicht vollkommen mit einander übereinstimmen. Dabei ist die Summation auf alle Kombinationen ohne Wiederholungen zur $r$ten Klasse zu erstrecken, die aus den Elementen $1, 2, \cdots, n$ zu bilden sind.

Für die Grenzfälle $r = 1$ und $r = n$ ergeben sich die bekannten Orthogonalitätsbedingungen.

Berlin. E. JAHNKE.

---

3. Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.

[Einsendungen für den Sprechsaal erbittet Herr Franz Meyer, Königsberg i. Pr., Mitteltragheim 51.]

Zu I A 2. Kombinatorik.

I. S. 44, Z. 6 v. o. Weitgehende Untersuchungen über das Verschwinden halbsymmetrischer Determinanten und ihrer Unterdeterminanten sind von Grafsmann (Ausdehnungslehre, siehe ges. Werke I_2, dort auch die Note von F. Engel, S. 490) sowie besonders von G. Frobenius (Journ. f. Math. 82, 242 ff.) angestellt worden. Vgl. auch E. v. Weber, Vorlesungen über das Pfaffsche Problem (1900), S. 30 ff.)

Freiburg i. B. A. LOEWY.

Zu I B 3c, d. Galoissche Theorie mit Anwendungen.

I. In Anmerkung 62, S. 500 sollte auf M. Cantors entscheidende Untersuchung über die Entdeckung der Auflösung der Gleichung dritten Grades hingewiesen sein (Gesch. der Mathem. II, 2. Aufl., Kap. 65 und 66). Erwünscht wäre ferner ein genaueres Zitat in Anmerk. 85, S. 508, wo es heifst „die Eigenschaften waren Lambert und Euler schon bekannt".

München. A. v. BRAUNMÜHL.

Zu I C 1. Niedere Zahlentheorie.

I. Bei Nr. 5 ist noch zu zitieren: J. Ch. Burckhardt, Tables des diviseurs pour tous les nombres depuis 1 à 3036000, Paris 1814—17. Dieses Werk wird allerdings S. 578 angeführt, gehört aber auch hierher, da es eine Tabelle enthält, in welcher für alle Primzahlen p von bis 2543 die Gröfse der Periode des Bruches $\frac{1}{p}$ angegeben wird. — Nr. 10 sollte bezüglich der „befreundeten Zahlen", welche schon im Altertum und später noch vielfach vorkommen, auf M. Cantor, Gesch. der Math. I und II 2. Aufl. (Register) sowie III S. 595—596 verwiesen sein.

München. A. v. BRAUNMÜHL.

Zu I C 2. Arithmetische Theorie der Formen.

I. In Anmerkung 30, S. 599 (Pellsche Gleichung) ist zu verweisen auf M. Cantor II, 2. Aufl. S. 777. S. 629 Zeile 5 von oben ist nach Bachet zu ergänzen: „und *Fermat*", sowie zu zitieren M. Cantor II, 2, 779.

München. A. v. Braunmühl.

Zu I C 3. Analytische Zahlentheorie.

I. In Anmerk. 69, S. 669 ist zu verweisen auf A. Pringsheim: „Über die ersten Beweise der Irrationalität von e und π." Münch. Ber. 1898. — Der S. 671 Zeile 12 und 11 von unten stehende Satz: „Durch eine *Verallgemeinerung* der Hermiteschen Betrachtungen erlangte F. Lindemann den Nachweis der Transcendenz auch für π" ist nicht zutreffend. Denn eine bloſse „Verallgemeinerung" ist Lindemanns Beweis keineswegs, sondern es gehörte noch sehr viel mehr dazu, um denselben zu erbringen, was schon daraus hervorgeht, daſs Hermite selbst sagt: „Je ne me hasarderai point à la recherche d'une démonstration de la transcendance du nombre π. Que d'autres tentent l'entreprise, nul ne sera plus heureux que moi de leur succès, mais croyez-m'en, mon cher ami, il ne laissera pas que de leur en coûter quelques efforts . . .". Journal für Math. **76**, 1873, S. 342.

München. A. v. Braunmühl.

Zu I D 3. Interpolation.

I. Zu S. 801, Zeile 15 von oben: Die sogenannte Lagrangesche Interpolationsformel wurde keineswegs zuerst von Lagrange 1795 gegeben, sondern bereits 1776 von Edward Waring (das Nähere hierüber in meiner Abhandlung „Historische Untersuchung der ersten Arbeiten über Interpolation", Biblioth. math. **2**, 1901, S. 95—96).
Zu S. 810, Z. 5 von oben bemerke ich: Stirling hat keine neue Interpolationsformel gegeben, sondern die 4 von ihm benützten finden sich unter den 6 von Newton im Methodus differentialis (1711 von Jones veröffentlicht) mitgeteilten. (Vgl. meinen oben zitierten Aufsatz S. 91.)

München. A. v. Braunmühl.

Zu I E. Differenzenrechnung.

I. Zu S. 927—928, Anmerk. 15[a]. Die Reihe (38) ist schon bei Archimedes (Buch über die Kugel und den Cylinder prop. 22 und 23) summiert und kommt dann wieder bei Kepler (De motibus stellae Martis, Opera Ed. Frisch III, 335, 390) vor. Euler hat die Summation der Reihen $\sum_{\mu=0}^{\mu=p-1} \sin(s+\mu u)$ und $\sum_{\mu=0}^{\mu=p-1} \cos(s+\mu u)$ zum erstenmale bereits 1743 im VII. B. der Miscellanea Berolin. p. 129 ff., also lange vor Bossut veröffentlicht.

S. 925, Anmerk. 14 ist zu bemerken: G. Heinrich hat (Biblioth. math. **1** 1900, S. 90—92) gezeigt, dafs die Simpsonsche Regel schon 1668 von James Gregory gegeben wurde.

München. A. v. Braunmühl.

Zu II A 2. Differential- und Integralrechnung.

II. Auf S. 56 unter Litteratur 1) Ältere Werke sollte noch bemerkt sein: Jacob Bernoulli, Opera, 2 Bde. Genev. 1744.

München. A. v. Braunmühl.

Zu II A 3: Bestimmte Integrale.

II. S. 150, Zeile 9 von unten vermisse ich das Zitat von Wallis' Formel für $\frac{\pi}{2}$: Opera I, 467 und II, 356, Seite 161, Zeile 5 von oben eine nähere Angabe darüber, wo die Eulersche Gleichung $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ sich zuerst findet, desgleichen S. 175, Zeile 21 von oben, *wo* Wallis die Betafunktion zuerst untersuchte. Auf derselben Seite sollte Zeile 9 von unten erwähnt sein, dafs Euler die Betafunktion zum erstenmale schon in Comm. Acad. Petrop. ad annos 1730/31 V, 36—57 bringt. — In Anmerk. 156, S. 182 fehlt die Angabe, dafs Euler die ersten 12 Bernoullischen Zahlen schon 1739 in Comm. Acad. Petrop. 116—127 berechnete und benützte, ferner sollte ebenda bei der Formel $B = \frac{(2m)!}{2^{2m-1}\pi^{2m}} S_{2m}$ auf Eulers Introductio in analysin infinit. Cap. 15 und auf Comm. Acad. Petrop. IX, 160 ff. verwiesen sein. — Bei „Eulerschen Zahlen" Zeile 14 von oben auf S. 183 ist endlich zu bemerken, dafs Studnička über ein Analogon zu denselben geschrieben hat. Sitz.-Ber. der böhmischen Gesellsch. 1900.

München. A. v. Braunmühl.

Die Verwandtschaft zwischen einer Geraden und ihrem Lotpunkt in Bezug auf ein Dreieck.

Von Joseph Neuberg in Lüttich.

Diese Verwandtschaft habe ich untersucht in der *Nouvelle Correspondance mathématique* 4 (1878), p. 379—382; der betreffende Artikel trägt die Überschrift *Sur une transformation des figures* und enthält die Lösungen der von mir vorgelegten einschlägigen Aufgaben 111 und 112 (*Ibid.*, *t. II* (1876), p. 189). Die interessante Abhandlung des Herrn Cwojdziński über den Lotpunkt (Archiv (3) **1**, 175—180) rechtfertigt eine neue Bearbeitung desselben Gegenstandes, welche meine ersten Resultate mit einigen Zusätzen wiedergiebt.

1. Von den Ecken des Fundamentaldreiecks $A_1 A_2 A_3$ fälle man auf eine beliebige Gerade m die Lote $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$, und von den Fufspunkten die Lote $B_1 C_1$, $B_2 C_2$, $B_3 C_3$ auf die zugehörigen Seiten. Letztere Lote schneiden sich in einem Punkte M, dem *Lotpunkte* von m.

Von welcher Art ist die Verwandtschaft (m, M)? Einige besondere Fälle geben hierüber die ersten Aufschlüsse.

Jeder Geraden m entspricht nur ein Punkt M, mit Ausnahme der unendlich entfernten Geraden m_∞, deren Richtung unbestimmt ist, und die somit jeden in ihr enthaltenen Punkt zum Gegenpunkte hat.

Nimmt man für m eine der drei Seiten des Grunddreiecks, so findet man jedesmal für M den Höhenpunkt H_a; folglich hat H_a wenigstens drei Gegengeraden.

Bei paralleler Verschiebung von m in der Richtung $A_1 B_1$ erleidet die Figur $M B_1 B_2 B_3$ dieselbe Verschiebung; mithin, wenn sich m um einen festen Punkt im Unendlichen dreht, ist der *eigentliche* Ort von M eine zu m senkrechte Gerade; der *vollständige* Ort begreift ausserdem die Gerade m_∞.

2. Bewegt sich B_1 auf einer Senkrechten n_1 zu $A_2 A_3$, so verbleibt auch M auf n_1. Die Senkrechte m in B_1 auf $A_1 B_1$ umhüllt dann eine Parabel π_1, welche A_1 zum Fokus und n_1 zur Scheiteltangente hat. Ich bezeichne mit π_2 oder π_3 die Parabeln, welche der Bewegung von

B_2 auf einer Senkrechten n_2 zu A_3A_1 oder der von B_3 auf einer Senkrechten n_3 zu A_1A_2 entsprechen; der Ort des Punktes M ist alsdann n_2 oder n_3.

3. Gehen die Linien n_1, n_2, n_3 durch einen und denselben Punkt M, so ist die Gegengerade von M eine gemeinsame Tangente der drei Parabeln π_1, π_2, π_3. Folglich entsprechen einem Punkte M drei Geraden m. Ich nenne diese Linien m_1, m_2, m_3; sie können alle drei reell sein, oder eine nur ist reell und die beiden anderen, obschon imaginär, schneiden sich in einem reellen Punkte: *Die Verwandtschaft (m, M) ist eindreideutig.*

4. Der Umkreis des Dreiecks $m_1m_2m_3$ geht durch den Brennpunkt jeder eingeschriebenen Parabel, mithin durch die Punkte A_1, A_2, A_3. Mit anderen Worten, die Gegengeraden eines Punktes bilden ein Sehnendreieck des dem Grunddreiecke umschriebenen Kreises, dessen Zentrum ich mit O bezeichne.

Die Leitlinien d_1, d_2, d_3 von π_1, π_2, π_3 kreuzen sich im Höhenpunkte H_m des Dreiecks $m_1m_2m_3$. H_a und H_m liegen offenbar symmetrisch zu M.

Giebt man eine Gerade m_1, so findet man leicht die zu demselben Lotpunkte M gehörigen Geraden m_2, m_3. Man suche den Lotpunkt M von m_1, verlängere die Strecke H_aM um $MH_m = H_aM$ und fälle von H_m auf m_1 eine Senkrechte, welche die Kreislinie O in zwei (immer reellen) Punkten N_1, N_1', schneidet; m_2 ist das Mittellot einer der Strecken H_mN_1, H_mN_1', z. B. von H_mN_1'. Wenn m_1 die Kreislinie in zwei reellen Punkten N_2, N_3 trifft, ist M auch der Lotpunkt der Geraden N_1N_3, N_1N_2; liegt m_1 aufserhalb des Kreises, so ist N_1 der Schnittpunkt von zwei imaginären Gegengeraden des Punktes M.

5. Betrachtet man die dem Dreiecke $m_1m_2m_3$ eingeschriebene Parabelschar, so ist der Büschel der Leitlinien symmetrisch kongruent mit dem Büschel, welcher die zugehörigen Brennpunkte von einem festen Punkte der Kreislinie O projiziert; denn der Leitstrahl des Punktes m_2m_3 und der durch diesen Punkt gezogene Durchmesser sind symmetrisch zu der Halbierungslinie des Winkels m_1m_2. Hieraus folgt, dafs die Richtung der Leitlinie und der Brennpunkt sich gegenseitig bestimmen. Wenn auch M seine Lage ändert, so gehört doch zu jedem Punkte der Kreislinie O als Brennpunkt dieselbe Richtung der Leitlinie, weil dies so ist für die Punkte A_1, A_2, A_3. Nun ist $A_1A_2A_3$ das Gegendreieck des Höhenpunktes H_a; folglich ist die Leitlinie jeder der erwähnten Parabeln parallel zu der Simsonschen Linie seines Brennpunktes in Bezug auf das Dreieck $A_1A_2A_3$.

Lassen wir jetzt M auf einer gegebenen Geraden n fortrücken; der Punkt H_m gleitet alsdann auf einer zu n parallelen Geraden d. Die verschiedenen Parabelscharen, welche dem veränderlichen Dreiecke $m_1 m_2 m_3$ eingeschrieben sind, haben eine gemeinsame Kurve, nämlich die Parabel π, welche d zur Leitlinie hat; denn d bestimmt den zugehörigen Fokus. Hieraus folgt der Satz:

Bewegt sich M auf einer beliebigen Geraden n, so umhüllen die Gegengeraden eine Parabel π, deren Leitlinie d zu n parallel ist.

6. Wenn m eine Kurve U der Klasse ν umstreicht, so bewegt sich der Lotpunkt M auf einer Kurve V der Ordnung 2ν. Denn die Schnittpunkte der Kurve V mit einer Geraden n entsprechen den Tangenten von V, welche auch die der Geraden n entsprechende Parabel π berühren.

7. Im besondern, wenn m sich um einen festen Punkt P dreht, so beschreibt der Lotpunkt M einen Kegelschnitt W. Wie schon Herr Cwojdziński bemerkt hat, findet man unmittelbar die sechs Punkte dieses Ortes, welche den zu den Seiten des Grunddreieckes senkrechten oder parallelen Lagen von m entsprechen: es sind die Projektionen P_1, P_2, P_3 von P auf die Seiten, und die Punkte Q_1, Q_2, Q_3, welche man erhält, indem man auf den Höhen die Strecken $H_a Q_1 = P_1 P$, $H_a Q_2 = P_2 P$, $H_a Q_3 = P_3 P$ abträgt. Der Mittelpunkt von W halbiert somit die Strecke PH_m.

Ist P das Zentrum des Umkreises, so wird W der Feuerbachsche Kreis.[1]) Für keine andere Lage von P kann W ein Kreis sein; denn der Kreis $P_1 P_2 P_3$ hat zum Zentrum die Mitte der Strecke zwischen dem Punkte P und seinem Winkelgegenpunkte.

8. Es sei jetzt P ein Punkt der Kreislinie O und p seine Fufspunktlinie in Bezug auf das Grunddreieck. Der zu P gehörige Kegelschnitt W entartet in die doppelt zu zählende Gerade p.

Umgekehrt, wenn M die Linie p durchläuft, so entartet die zugehörige Parabel π (§ 5) in den Punkt P und den Richtungspunkt der Senkrechten zu p; denn, da p den Abstand $H_a P$ halbiert, ist die Leitlinie die durch P zu p parallel gezogene Gerade, und der Brennpunkt ist P selbst. Das Dreieck $m_1 m_2 m_3$ besteht jetzt aus einer Senkrechten zu p und zwei von P ausgehenden Geraden. Ein oben (§ 1) erwähnter Satz kann jetzt so vervollständigt werden:

---

1) Dieser Satz ist zuerst von Herrn Soons (Tirlemont) ausgesprochen worden (Mathesis 1896, S. 57).

Für parallele Lagen von m ist der Ort des Lotpunktes eine zu m senkrechte Gerade p; ändert man die Richtung von m, so erzeugt p eine Steinersche Hypocykloide.

Eine besondere Beachtung verdient der Fall, wo M eine Seite, z. B. A_2A_3, des Grunddreiecks durchläuft; eine Gegengerade ist dann die Senkrechte in M zu A_2A_3, und die beiden anderen schneiden sich im zweiten Endpunkte des Durchmessers A_1O des Umkreises.

9. Wenn der Punkt M eine Kurve V von der Ordnung μ durchläuft, so ist die Enveloppe der Gegengeraden m eine Kurve U von der Klasse 2μ. Denn die Geraden m, welche jetzt durch einen gegebenen Punkt P gehen, entsprechen den Schnittpunkten der Kurve V mit dem zu P gehörigen Kegelschnitte W.

10. Ich werde noch kurz meine synthetischen Untersuchungen mit den Gleichungen des Herrn Cwojdziński in Zusammenhang bringen.

Die Gleichung der Gerade m sei

$$K_1z_1 + K_2z_2 + K_3z_3 = 0,$$

und man setze

$$\alpha \equiv K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 - 2K_2K_3 \cos A_1 - 2K_3K_1 \cos A_2 - 2K_1K_2 \cos A_3.$$

Alsdann sind $2\alpha_1$, $2\alpha_2$, $2\alpha_3$ die partiellen Ableitungen der Funktion α nach K_1, K_2, K_3; die Gleichung $\alpha = 0$ stellt die unendlich entfernten Kreispunkte dar, und man kann α_1, α_2, α_3 ansehen als die Koordinaten der Richtungspunkte der Senkrechten zu m; in Linienkoordinaten repräsentieren die Gleichungen $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$ die Richtungspunkte der Höhen A_1H_a, A_2H_a, A_3H_a. Die Koordinaten des Richtungspunktes von m sind:

$$\beta_1 \equiv K_2 \sin A_3 - K_3 \sin A_2,\ \beta_2 \equiv K_3 \sin A_1 - K_1 \sin A_3,\ \beta_3 \equiv K_1 \sin A_2 - K_2 \sin A_1,$$

und die Tangentialgleichungen $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = 0$ gehören zu den Richtungspunkten der Seiten A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2. Die Gleichungen der Geraden B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 nehmen jetzt folgende Gestalt an:

$$\text{(I)} \quad \alpha H_1 + LK_1\beta_1 = 0, \quad \alpha H_2 + LK_2\beta_2 = 0, \quad \alpha H_3 + LK_3\beta_3 = 0.$$

Dieses sind auch die Gleichungen der Parabeln π_1, π_2, π_3 in Linienkoordinaten, wenn (z_1, z_2, z_3) die Koordinaten eines festen Punktes M sind. Die aus (I) abgeleitete Gleichung

$$\text{(II)} \quad K_2K_3H_1 \sin A_1 + K_3K_1H_2 \sin A_2 + K_1K_2H_3 \sin A_3 = 0$$

bezieht sich auf eine Parabel, welche den zwei Dreiecken $A_1A_2A_3$, $m_1m_2m_3$ eingeschrieben ist; die Leitlinie ist H_aM.

Die Formeln (I) können auch so geschrieben werden:

$$H_1 : H_2 : H_3 = K_1\beta_1 : K_2\beta_2 : K_3\beta_3;$$

man kann hier H_1, H_2, H_3 als Koordinaten des Punktes in Bezug auf die Höhen HA_1, HA_2, HA_3 ansehen.

Löst man zwei der Gleichungen (I) nach z_1, z_2, z_3, so kommt:

$$\sigma z_1 = \alpha_1(K_1 \cos A_2 \cos A_3 - K_2 \cos A_2 - K_3 \cos A_3),$$
$$\sigma z_2 = \alpha_2(K_2 \cos A_3 \cos A_1 - K_3 \cos A_3 - K_1 \cos A_1),$$
$$\sigma z_3 = \alpha_3(K_3 \cos A_1 \cos A_2 - K_1 \cos A_1 - K_2 \cos A_2),$$

wo σ ein Proportionalitätsfaktor ist. Die Klammern, gleich Null gesetzt, repräsentieren die zweiten Endpunkte der Durchmesser $A_1 O$, $A_2 O$, $A_3 O$ des Umkreises.

11. Auch die Lotpunktgerade des vollständigen Vierseits läſst sich leicht aus den obigen Entwickelungen ableiten. Ist nämlich $m_1 m_2 m_3$ das Gegendreieck des Punktes M, so giebt es eine diesem Dreiecke und dem Grunddreiecke eingeschriebene Parabel, welche die Gerade $H_a M H_m$ zur Leitlinie hat. Nennt man jetzt a_1, a_2, a_3 die Seiten des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ und a_4 eine Gegengerade des Punktes, so hat man den Satz:

Wenn man vier Geraden a_1, a_2, a_3, a_4 giebt, so befindet sich der Lotpunkt von jeder dieser Linien in Bezug auf das durch die drei andern gebildete Dreieck auf der Leitlinie der die vier Linien berührenden Parabel.

Lüttich, 22. Mai 1901.

Über die Klassifikation der Kurven und Flächen zweiten Grades.

Von C. Koehler in Heidelberg.

(Fortsetzung.)

5. *Einteilung der Flächen zweiter Ordnung.* — Zur *projektiven* Einteilung der durch die Gleichung

(8) $$f(x, x) = \sum a_{ik} x_i x_k = 0 \qquad (a_{ik} = a_{ki};\ i, k = 1, 2, 3, 4)$$

gegebenen Fläche dient aufser dem Rang ihrer Determinante A die Reihe

(T) $$A, \quad A_{kk} a_{ii}, \quad A_{kk,ll}, \quad 1,$$

in der i, k, l *unter den Zahlen* 1, 2, 3, 4 *stets so gewählt werden sollen, dafs ihre beiden mittleren Glieder nicht zugleich verschwinden und aufserdem* $A_{kk} \neq 0$ *ist für* $\varrho(A) = 1$.

Dies ist immer möglich, wenn $\varrho(A) < 3$ ist. Denn nach Nr. 3 läfst sich die Reihe

(T_k) $$A_{kk} a_{ii}, \quad A_{kk,ll}, \quad 1,$$

falls $\varrho(A_{kk}) < 2$ ist, stets so aufstellen, dafs ihre beiden ersten Glieder nicht zugleich verschwinden. Wäre aber $\varrho(A_{kk}) = 2$ für $k = 1, 2, 3, 4$, so müfste nach derselben Nummer die Fläche die vier Seitenebenen S_k des Koordinatentetraeders in je einer Doppelgeraden schneiden, also eine Doppelebene und somit $\varrho(A) = 3$ sein.

Wir zeigen nun, dafs die projektive Beschaffenheit der Fläche aufser von $\varrho(A)$ nur von der Anzahl $w(A)$ der Zeichenwechsel der Reihe (T) abhängt.

Es sei zunächst $\varrho(A) = 0$, also (8) eine nicht entartete Fläche und $| yz | = | vw |$ eine beliebige, sie nicht berührende Gerade; dann

schliefsen wir aus Gleichung (14a) unmittelbar, dafs für $A > 0$ diese Gerade stets zugleich zwei reelle Berührungsebenen und zwei reelle Flächenpunkte, bezw. zwei imaginäre Berührungsebenen und zwei imaginäre Flächenpunkte trägt, die Fläche selbst also geradlinig oder imaginär sein mufs, dafs dagegen für $A < 0$ die Gerade $| yz |$ entweder zwei reelle Berührungsebenen oder zwei reelle Flächenpunkte trägt, die Fläche selbst also reell, aber nicht geradlinig ist.[1]) Für $A > 0$ ist aber die Fläche geradlinig oder imaginär, je nachdem ihr Schnitt mit einer beliebigen Ebene, also auch mit der Koordinatenebene S_k reell oder imaginär ist. Nach Nr. **3** ist das erstere oder das letztere der Fall, je nachdem die Reihe (T_k) Zeichenwechsel aufweist oder nicht, d. h. je nachdem die Reihe (T) zwei oder keinen Zeichenwechsel besitzt. Für $A < 0$ dagegen zeigt (T) immer einen oder drei Zeichenwechsel. Die Fläche ist somit für $\varrho(A) = 0$ imaginär, geradlinig oder nichtgeradlinig, je nachdem $w(A) = 0, = 2$ oder $= 1, 3$ ist.

Ist $\varrho(A) = 1$, so geht die Reihe (T) in (T_k) über, und ihre Zeichenwechsel geben nach Nr. **3** Auskunft darüber, ob die wegen $A_{kk} \neq 0$ nicht entartete Schnittkurve der Fläche mit der Ebene S_k reell oder imaginär, ob also der durch (8) dargestellte Kegel selbst reell oder imaginär ist.

Für $\varrho(A) = 2$ endlich ist das durch (8) gegebene Ebenenpaar zugleich mit dem Punkte*paar*, das es wegen $A_{kk,ll} \neq 0$ mit der Geraden $| S_k S_l |$ gemein hat, reell oder imaginär; man erkennt also wieder direkt aus den Zeichenwechseln von (T), welcher von beiden Fällen eintritt.[2])

---

1) Hiermit sind, wie beiläufig bemerkt werden soll, auch die beiden folgenden bekannten Sätze bewiesen:

Zwei windschiefe reziproke Polaren einer geradlinigen Fläche zweiter Ordnung schneiden die Fläche entweder beide reell oder beide imaginär, und es gehen entweder durch beide zwei reelle oder durch beide zwei imaginäre Berührungsebenen.

Von zwei windschiefen reziproken Polaren einer nichtgeradlinigen Fläche zweiter Ordnung schneidet stets die eine die Fläche reell, die andere imaginär, und es gehen durch die eine zwei imaginäre, durch die andere zwei reelle Berührungsebenen.

2) Hinreichend, aber nicht notwendig, um eine Fläche zweiter Ordnung als reell zu charakterisieren, ist folgendes Kriterium: Wenn in der Reihe der Hauptunterdeterminanten A, A_{kk}, $A_{kk,ll}$, a_{ii} ein Glied verschwindet, dem mindestens ein nicht verschwindendes Glied vorangeht, so ist die Fläche immer reell.

Ist nämlich $A \neq 0$, so besagt $A_{kk} = 0$, bezw. $A_{kk,ll} = 0$, dafs die Ebene S_k, bezw. die Gerade $| S_k S_l |$ die Fläche berührt, während ihr für $a_{ii} = 0$ die

Demnach ist die Fläche zweiter Ordnung für

1) $\varrho(A) = 0$ und
   - α) $w(A) = 0$ eine imaginäre nicht entartete Fläche,
   - β) $w(A) = 2$ eine geradlinige nicht entartete Fläche,
   - γ) $w(A) = 1, 3$ eine nichtgeradlinige nicht entartete Fläche,

2) $\varrho(A) = 1$ und
   - α) $w(A) = 0$ ein imaginärer Kegel,
   - β) $w(A) = 1, 2$ ein reeller Kegel,

3) $\varrho(A) = 2$ und
   - α) $w(A) = 0$ ein imaginäres Ebenenpaar,
   - β) $w(A) = 1$ ein reelles Ebenenpaar,

4) $\varrho(A) = 3$ eine (immer reelle) Doppelebene.

Damit ist die projektive Einteilung dieser Flächen vollzogen. Ihre *metrische* Einteilung fällt zusammen mit der *projektiven* Einteilung ihrer Schnittkurve in der Ebene ε_∞ und ist somit nach Nr. 5 bestimmt durch $\varrho(Q)$ und $w(Q)$, wo

$$Q = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & -q_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & -q_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & -q_3 \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & -q_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & 0 \end{vmatrix}$$

und der Wert von $w(Q)$ aus der Reihe

$$(\mathrm{R}''') \qquad Q Q_{kk,ll}, \quad Q_{kk}, \quad 1 \qquad (k, l = 1, 2, 3, 4)$$

Ecke N_i des Koordinatentetraeders angehört u. s. f. — Es sei gestattet, im Anschlufs hieran ein kleines Versehen in der Abhandlung von Brückel (l. c. S. 216, Anmerkung 7) zu berichtigen. Das Verschwinden eines $A_{kk,ll}$ ist *nicht* hinreichend, um ein Parallelebenenpaar als reell zu erweisen, wie das Beispiel des imaginären Ebenenpaares

$$x_1^2 + \left(\sum_{i=1}^{4} q_i x_i\right)^2 = 0$$

zeigt, für das $A_{11,22} = A_{11,33} = A_{11,44} = 0$ ist. $A_{kk,ll} = 0$ besagt nur, dafs die immer reelle Schnittlinie des Ebenenpaares durch die Tetraederkante $|S_k S_l|$ geht.

zu entnehmen ist. Der Fläche gehört demnach an für

1) $\varrho(Q) = 0$ und
   α) $w(Q) = 0$ ein imaginärer uneigentlicher Kegelschnitt,
   β) $w(Q) = 1, 2$ ein reeller uneigentlicher Kegelschnitt,
2) $\varrho(Q) = 1$ und
   α) $w(Q) = 0$ ein imaginäres uneigentliches Geradenpaar,
   β) $w(Q) = 1$ ein reelles uneigentliches Geradenpaar,
3) $\varrho(Q) = 2$ eine uneigentliche Doppelgerade[1]),
4) $\varrho(Q) = 3$ die uneigentliche Ebene.

Hiernach giebt Tabelle III (S. 108) die gesamte Einteilung der Flächen zweiter Ordnung.[2])

6. *Einteilung der Kurven zweiter Klasse.* — Ist

$$\varphi(u, u) = \sum \alpha_{ik} u_i u_k = 0 \qquad (\alpha_{ik} = \alpha_{ki};\ i, k = 1, 2, 3) \tag{20}$$

die Gleichung einer solchen Kurve,

$$\mathsf{A} = |\,\alpha_{ik}\,|$$

ihre Determinante, so erhalten wir ihre *projektive* Einteilung nach dem in der Ebene giltigen Reziprozitätsgesetz aus Nr. **3**; sie ist somit durch $\varrho(\mathsf{A})$ und durch den aus der Reihe

$$\mathsf{A}\alpha_{ii},\quad \mathsf{A}_{kk},\quad 1 \qquad (i, k = 1, 2, 3) \tag{P}$$

---

1) S. Anmerkung 1 S. 31.

2) Ist die Fläche (8) auf ein Koordinatentetraeder bezogen, dessen Seite $x_4 = 0$ die unendlich ferne Ebene ist, so sind die Betrachtungen von Nr. 2 und Nr. 4 für ihre Klassifikation entbehrlich. Zur *projektiven* Einteilung benutzt man dann für $\varrho(A) = 0$ statt der Gleichung (14a) die bekannte Determinantenrelation

$$A_{kk}A_{ll} - A_{kl}^2 = A A_{kk,ll},$$

aus der sich dieselben Schlüsse wie aus jener ziehen lassen, da einerseits $A_{kk,ll} <$ oder > 0 ist, je nachdem auf der Geraden $|\,S_k S_l\,|$ zwei reelle oder zwei imaginäre Flächenpunkte liegen, andrerseits aber, wie aus der Darstellung der Fläche durch die Gleichung $F(u, u) = 0$ folgt, $A_{kk}A_{ll} - A_{kl}^2 <$ oder > 0 ist, je nachdem durch die Gerade $|\,S_k S_l\,|$ zwei reelle oder zwei imaginäre Berührungsebenen gehen. Die *metrische* Einteilung der Fläche aber ergiebt sich, da dann ihre Schnittkurve mit der Ebene ε_∞ durch die Gleichung $\sum a_{ik} x_i x_k = 0$ $(i, k = 1, 2, 3)$ gegeben ist, nach Nr. **3** direkt aus dem Wert von $\varrho(A_{44})$ und dem aus der Reihe

$$A_{44}a_{ll},\quad A_{44,ll},\quad 1 \qquad (i, l = 1, 2, 3) \tag{R''''}$$

zu bestimmenden Werte von $w(A_{44})$. Für eine Fläche, die auf ein *Kartesisches Koordinatensystem* bezogen ist, tritt also in der Tabelle A_{44} an Stelle von Q, und die Reihe (R'''') an Stelle der Reihe (R''').

zu entnehmenden Wert von $w(\mathsf{A})$ bestimmt. Die Kurve ist also für

1) $\varrho(\mathsf{A}) = 0$ und
   - α) $w(\mathsf{A}) = 0$ ein imaginärer Kegelschnitt,
   - β) $w(\mathsf{A}) = 1, 2$ ein reeller Kegelschnitt,
2) $\varrho(\mathsf{A}) = 1$ und
   - α) $w(\mathsf{A}) = 0$ ein imaginäres Punktepaar,
   - β) $w(\mathsf{A}) = 1$ ein reelles Punktepaar,
3) $\varrho(\mathsf{A}) = 2$ ein (immer reeller) Doppelpunkt.

Die *metrische* Einteilung hängt, so lange die Kurve *nur* als *Strahlen*gebilde betrachtet wird, *allein* ab von der Stellung, welche die Gerade g_∞ in Bezug auf sie einnimmt. Wir haben demnach nur zu unterscheiden

1) Kurven, denen g_∞ *nicht* angehört, für die also $\varphi(q, q) \neq 0$,
2) Kurven, denen g_∞ *als Tangente* angehört, für die also $\varphi(q, q) = 0$, aber $\varphi(q, u) \not\equiv 0$[1],
3) Kurven, denen g_∞ *als singuläre Gerade* angehört, d. h. für die $\varphi(q, u) \equiv 0$ ist.

Wenn wir aber *auch* die sekundären Elemente der Kurve, die Kurven*punkte*, mit in Betracht ziehen, so ist die Einteilung noch zu vervollständigen. Denn dann *kann* es unter den *eigentlichen* Geraden der Kurve solche geben, die einen unendlich fernen Kurvenpunkt tragen, die also vor den übrigen eigentlichen Geraden derselben metrisch ausgezeichnet sind. Nennen wir eine *eigentliche* Gerade, welche die Kurve *im Unendlichen berührt*, eine *Asymptote*[2]) derselben, so hängt somit ihre metrische Einteilung aufser von der Stellung, die g_∞ zu ihr einnimmt und die immer das Haupteinteilungsprinzip liefert, noch ab von dem Vorhandensein und der Beschaffenheit ihrer Asymptoten.

Diese weitere metrische Einteilung ist in den Fällen 2) und 3) schon durch die projektive Einteilung der Kurve erledigt und beein-

---

1) Da $\varphi(q, u) = \sum_{i,k} \alpha_{ik} u_i q_k = \sum_i \varphi_i(q) u_i$ ist, bedeutet $\varphi(q, u) \not\equiv 0$, dafs nicht alle $\varphi_i(q) = 0$ sind, dafs also g_∞ keine „singuläre" Gerade der Kurve ist, während $\varphi(q, u) \equiv 0$ g_∞ als singuläre Gerade derselben charakterisiert. — Ebenso ist für eine Fläche zweiter Klasse ε_∞ eine „singuläre" Ebene, wenn $\varphi(q, u) \equiv 0$ ist.

2) Ebenso soll im folgenden unter der *Asymptotenebene* einer Fläche zweiter Klasse eine *eigentliche* Ebene, die die Fläche *im Unendlichen berührt*, und unter dem *Asymptotenkegel* derselben die Gesamtheit ihrer Asymptoten*ebenen* verstanden werden.

fluſst deshalb die Gesamteinteilung nicht. Im Falle 2) nämlich hat die Kurve für $\varrho(\mathsf{A}) = 0$ keine Asymptote, für $\varrho(\mathsf{A}) = 1$ einen Parallelstrahlenbüschel reeller Asymptoten; im Falle 3) hat sie für $\varrho(\mathsf{A}) = 1$ zwei Parallelstrahlenbüschel von Asymptoten, die reell oder imaginär sind, je nachdem die Reihe A_{kk}, 1 Zeichenwechsel besitzt oder nicht, für $\varrho(\mathsf{A}) = 2$ aber einen Parallelstrahlenbüschel reeller Asymptoten.

Im Falle 1) dagegen, in dem die Kurve α) imaginäre Asymptoten, β) reelle Asymptoten, γ) keine Asymptoten besitzen kann, müssen wir α) und β) noch metrisch trennen; denn diese Fälle können beide bei einem reellen Kegelschnitt, also für $\varrho(\mathsf{A}) = 0$ und $w(\mathsf{A}) = 1, 2$ eintreten, während γ) immer und nur für $\mathsf{A} = 0$ eintritt. Ist aber $\varphi(q, q) \neq 0$ und $\varrho(\mathsf{A}) = 0$ und sind $\xi_i = \varphi_i(q)$ die Koordinaten des Mittelpunktes der Kurve, so folgt aus der zu (3a) reziproken Gleichung[1]), wenn $\Phi(x, x)$ die adjungierte Form von $\varphi(u, u)$ bedeutet, daſs ihre Asymptoten imaginär oder reell sind, je nachdem $\Phi(\xi, \xi) >$ oder < 0 ist, d. h. da

$$(21) \qquad \Phi(\xi, \xi) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & -\varphi_1(q) \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & -\varphi_2(q) \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & -\varphi_3(q) \\ \varphi_1(q) & \varphi_2(q) & \varphi_3(q) & 0 \end{vmatrix} = \mathsf{A}\varphi(q, q),$$

je nachdem $\mathsf{A}\varphi(q, q) >$ oder < 0 ist.

Für die metrische Einteilung unserer Kurve erhalten wir somit folgende Kriterien:

Die Kurve trägt für

1) $\varphi(q, q) \neq 0$ und
   - α) $\mathsf{A}\varphi(q, q) > 0$ $\quad g_\infty$ nicht, aber ein imaginäres Asymptotenpaar,
   - β) $\mathsf{A}\varphi(q, q) < 0$ $\quad g_\infty$ nicht, aber ein reelles Asymptotenpaar,
   - γ) $\mathsf{A} = 0$ $\quad$ weder g_∞, noch Asymptoten,

2) $\varphi(q, q) = 0$ und $\varphi(q, u) \not\equiv 0$ $\quad g_\infty$ als Tangente,

3) $\varphi(q, u) \equiv 0$ $\quad g_\infty$ als singuläre Gerade.[2])

---

1) S. auch Anmerkung 1) S. 25.

2) Man könnte die unter 1) und 2) fallenden Kurven auch nach dem Rang und Vorzeichen der in (21) auftretenden Determinante

$$\mathfrak{Q} = \begin{pmatrix} - & \varphi(q) \\ & \varphi(q) \end{pmatrix}$$

einteilen. Setzt man nämlich

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} \varphi(v, v) & \varphi(v, w) \\ \varphi(v, w) & \varphi(w, w) \end{vmatrix},$$

wo v und w zwei beliebige durch den Mittelpunkt ξ der Kurve gehende Gerade

Hiernach ergiebt sich für die Gesamteinteilung der Kurven zweiter Klasse Tabelle II[1]) S. 107.

7. *Einteilung der Berührungskegel, bezw. -cylinder einer Fläche zweiter Klasse.* — Es sei

$$\varphi(u, u) = \sum \alpha_{ik} u_i u_k = 0 \qquad (\alpha_{ik} = \alpha_{ki};\; i, k = 1, 2, 3, 4) \tag{22}$$

die Gleichung einer Fläche zweiter Klasse und $\mathsf{A} = |\alpha_{ik}|$ ihre Determinante, dann können wir mit Hülfe des im Raume giltigen Reziprozitätsgesetzes die *projektive* Einteilung des Kegels, der die durch den beliebig gegebenen Raumpunkt y gehenden Ebenen der Fläche enthält, direkt aus Nr. 4 entnehmen.

Setzen wir

$$Y = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & -y_1 \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & -y_2 \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & -y_3 \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} & -y_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & 0 \end{vmatrix} \tag{23}$$

---

sind, so ist durch Rang und Vorzeichen von $\mathfrak{D}$ die Anzahl und Beschaffenheit der durch den Mittelpunkt gehenden Tangenten der Kurve, die aber nicht immer Asymptoten in dem oben angegebenen Sinne sind, bestimmt. Nun ist nach den Gleichungen (3 b) und (7), wenn man in ihnen Punkt- und Linienkoordinaten vertauscht, $\mathfrak{D} = \mathfrak{Q}$ und $\varrho(\mathfrak{D}) = \varrho(\mathfrak{Q})$; man erhält somit, wenn man $w(\mathfrak{Q})$ aus der Reihe $\mathfrak{Q}$, 1 bestimmt, folgende, mit der Einteilung der Kurven zweiter Ordnung *formal* besser als die obige übereinstimmende metrische Einteilung: Die Kurve besitzt für

I. $\varphi(q, u) \not\equiv 0$ und
- 1) $\varrho(\mathfrak{Q}) = 0$ und
  - α) $w(\mathfrak{Q}) = 0$ — ein imaginäres durch den Mittelpunkt gehendes Tangentenpaar,
  - β) $w(\mathfrak{Q}) = 1$ — ein reelles durch den Mittelpunkt gehendes Tangentenpaar,
- 2) $\varrho(\mathfrak{Q}) = 1$ — eine (doppelt zu zählende) durch den Mittelpunkt gehende Tangente,
- 3) $\varrho(\mathfrak{Q}) = 2$ — einen Büschel von Tangenten durch den Mittelpunkt,

II. $\varphi(q, u) \equiv 0$ — g_∞ als singuläre Gerade.

Diese formale Übereinstimmung würde aber erkauft mit der Durchbrechung des metrischen Haupteinteilungsprinzips für die Kurven zweiter Klasse; denn es würde z. B. die Abteilung I 2) die Parabel und das eigentliche Punktepaar enthalten, also zwei Kurven, zu denen g_∞ nicht dieselbe Stellung einnimmt. Es liegt eben in der Natur des Problems, daſs die *metrische* Einteilung der Kurven zweiter Klasse anders ausfällt als diejenige der Kurven zweiter Ordnung.

1) Wenn die Gerade g_∞ die Seite $x_3 = 0$ des Koordinatendreiecks bildet, ist $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $q_3 = 1$. Es tritt also, falls die Kurve auf ein *Kartesisches Koordinatensystem* bezogen ist, α_{33} an Stelle von $\varphi(q, q)$ und $\varphi_3(u)$ an Stelle von $\varphi(q, u)$.

und bestimmen $w(Y)$ aus der Reihe

(P′) $$YY_{kk,ll}, \quad Y_{kk}, \quad 1, \qquad (k, l = 1, 2, 3, 4)$$

so ist dieser Kegel für

1) $\varrho(Y) = 0$ und
   - α) $w(Y) = 0$ ein imaginärer nicht entarteter Kegel,
   - β) $w(Y) = 1, 2$ ein reeller nicht entarteter Kegel,

2) $\varrho(Y) = 1$ und
   - α) $w(Y) = 0$ ein imaginäres Geradenpaar,
   - β) $w(Y) = 1$ ein reelles Geradenpaar,

3) $\varrho(Y) = 2$ eine (immer reelle) Doppelgerade, während ihm und also auch der Fläche für

4) $\varrho(Y) = 3$ alle Ebenen des Punktes y angehören.

Auf demselben Wege gewinnen wir aus Nr. 4 das für die nun vorzunehmende metrische Einteilung verwendbare Kriterium: Je nachdem

$$Y_z = \begin{pmatrix} -y & -z \\ y & z \end{pmatrix}$$

$>$ oder <0 ist, trägt die beliebige durch y gehende Gerade $|yz|$ zwei imaginäre oder zwei reelle Ebenen des Kegels.

Von einer *metrischen* Einteilung des Kegels kann natürlich nur die Rede sein, wenn der Punkt y im Unendlichen liegt, in welchem Falle wir den Kegel — auch wenn er entartet — einen *Cylinder* nennen wollen. Es sei also jetzt y ein uneigentlicher Punkt und

1) $\varphi(q,q) \neq 0$, d. h. die uneigentliche Ebene ε_∞ keine Ebene der Fläche (22) und somit auch keine Ebene des Cylinders. Dann ergiebt sich wie in Nr. 6, daſs in diesem Fall eine weitere Einteilung, die sich auf die Asymptotenebenen des Cylinders stützen muſs, nur noch für $\varrho(Y) = 0$, also für den nicht entarteten Cylinder vorzunehmen ist, da für $Y = 0$ keine der Geraden, in die der Cylinder dann entartet, in ε_∞ liegen kann, er also dann keine Asymptotenebenen besitzt. Ist aber $\varrho(Y) = 0$ und $z_i = \varphi_i(q)$ der Mittelpunkt der Fläche, der für $\varphi(q,q) \neq 0$ ein eigentlicher Punkt sein muſs, so ist die Achse $|yz|$ des Cylinders eine eigentliche Gerade, und es gehen durch sie nach dem oben angegebenen Kriterium zwei imaginäre oder zwei reelle Asymptotenebenen, je nachdem

$$\begin{pmatrix} -y & -\varphi(q) \\ y & \varphi(q) \end{pmatrix} > \text{ oder } < 0$$

ist, d. h. da diese Determinante, wenn man ihre mit q_1, bezw. q_2, q_3, q_4

multiplizierten vier ersten Kolonnen zur letzten addiert und die Gleichung $\sum q_i y_i = 0$ berücksichtigt, gleich $Y\varphi(q,q)$ wird, je nachdem

$$Y\varphi(q, q) > \text{ oder } < 0.$$

Wenn $\varphi(q, q) = 0$, aber $\varphi(q, u) \not\equiv 0$ ist, so ist ε_∞ eine Berührungsebene der Fläche, also eine Berührungs- oder eine singuläre Ebene des Cylinders. Der zweite Fall tritt aber, so lange $\varphi(q, u) \not\equiv 0$ ist, dann und nur dann ein, wenn y der Mittelpunkt der Fläche[1]), also $\lambda y_i = \varphi_i(q)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ oder

$$\varphi(q, u) \equiv \lambda \sum y_i u_i$$

ist. Es bildet demnach für

$$2)\ \varphi(q, q) = 0, \text{ aber } \varphi(q, u) \not\equiv 0 \text{ und } \not\equiv \lambda \sum y_i u_i$$

die Ebene ε_∞ eine Berührungsebene des Cylinders. Endlich ist für

$$3)\ \varphi(q, q) = 0 \text{ und } \varphi(q, u) \equiv 0 \text{ oder } \equiv \lambda \sum y_i u_i$$

die Ebene ε_∞ eine singuläre Ebene des Cylinders.

Fassen wir die metrische Einteilung nochmals zusammen, so trägt der Cylinder für

1) $\varphi(q, q) \neq 0$ und

  α) $Y\varphi(q, q) > 0$ ε_∞ nicht, aber ein Paar imaginärer Asymptotenebenen,

  β) $Y\varphi(q, q) < 0$ ε_∞ nicht, aber ein Paar reeller Asymptotenebenen,

  γ) $Y = 0$ weder ε_∞, noch Asymptotenebenen,

2) $\varphi(q,q)=0$, $\varphi(q,u) \not\equiv 0$ und $\not\equiv \lambda \sum y_i u_i$ ε_∞ als Berührungsebene,

3) $\varphi(q,q)=0$, $\varphi(q,u) \equiv 0$ oder $\equiv \lambda \sum y_i u_i$ ε_∞ als singuläre Ebene.

---

1) Obgleich die Gesamteinteilung der Flächen zweiter Klasse erst in Nr. 8 folgt, darf dieser Schlufs doch schon hier gezogen werden, weil der Zusammenhang zwischen dem Grad der Entartung dieser Flächen und dem Rang ihrer Determinante, sowie das Reziprozitätsgesetz als bekannt vorausgesetzt wird. Ist nämlich $\varrho(\mathsf{A}) = 0$, so enthält ε_∞ als Berührungsebene der Fläche zwei (reelle oder imaginäre) Erzeugende derselben. Liegt nun der Punkt y_i auf keiner von diesen, so entartet der Cylinder nicht; liegt er nur auf einer derselben, so entartet der Cylinder in diese und in die durch y gehende *eigentliche* Erzeugende; ist y aber der Schnittpunkt der beiden uneigentlichen Erzeugenden, also der Mittelpunkt der Fläche, so tragen diese alle Ebenen des Cylinders, ε_∞ wird also erst dann eine singuläre Ebene desselben. Ebenso schliefst man, falls $\varrho(\mathsf{A}) = 1$ oder $= 2$ ist. Wenn aber $\varrho(\mathsf{A}) = 3$ ist und ε_∞ der Fläche, d. h. einem Doppelpunkte angehört, so ist diese Ebene schon für die Fläche singulär; dieser Fall kann also hier nicht eintreten.

Wir erhalten somit Tabelle VI (S. 111) für die Gesamteinteilung unseres Kegels, bezw. Cylinders und sehen, wenn wir sie mit Tabelle II vergleichen, wie leicht sich die letztere in die erstere umwandeln läſst.

8. *Einteilung der Flächen zweiter Klasse.* — Die *projektive* Einteilung der Fläche

$$\varphi(u,u)=\sum \alpha_{ik} u_i u_k = 0 \qquad (\alpha_{ik}=\alpha_{ki};\ i,k=1,2,3,4) \tag{22}$$

erschlieſsen wir nach dem im Raume giltigen Reziprozitätsgesetz aus Nr. **5.** Bedeutet $w(\mathsf{A})$ die Anzahl der in der Reihe

$$\mathsf{A},\quad \mathsf{A}_{kk}\alpha_{ii},\quad \mathsf{A}_{kk,ll},\quad 1 \qquad (i,k,l=1,2,3,4) \tag{T}$$

auftretenden Zeichenwechsel, so ist die Fläche zweiter Klasse für

1) $\varrho(\mathsf{A})=0$ und
   - α) $w(\mathsf{A})=0$ eine imaginäre nicht entartete Fläche,
   - β) $w(\mathsf{A})=2$ eine geradlinige nicht entartete Fläche,
   - γ) $w(\mathsf{A})=1,3$ eine nichtgeradlinige nicht entartete Fläche,

2) $\varrho(\mathsf{A})=1$ und
   - α) $w(\mathsf{A})=0$ ein imaginärer Kegelschnitt,
   - β) $w(\mathsf{A})=1,2$ ein reeller Kegelschnitt,

3) $\varrho(\mathsf{A})=2$ und
   - α) $w(\mathsf{A})=0$ ein imaginäres Punktepaar,
   - β) $w(\mathsf{A})=1$ ein reelles Punktepaar,

4) $\varrho(\mathsf{A})=3$ ein (immer reeller) Doppelpunkt.

Die *metrische* Einteilung ergiebt, so lange wir die Fläche *nur* als *Ebenen*gebilde betrachten, wie bei den Kurven zweiter Klasse, nur drei Arten von solchen:

1) Flächen, denen ε_∞ *nicht* angehört, d. h. für die $\varphi(q,q)\neq 0$,

2) Flächen, denen ε_∞ *als Berührungsebene* angehört, d. h. für die

$$\varphi(q,q)=0 \text{ und } \varphi(q,u)\not\equiv 0,$$

3) Flächen, denen ε_∞ *als singuläre Ebene* angehört, d. h. für die

$$\varphi(q,u)\equiv 0$$

ist.

Falls wir aber *auch* die *Punkte* der Fläche mit in Betracht ziehen, folgt wie in Nr. **6**, daſs für $\varphi(q,q)\neq 0$ und $\varrho(\mathsf{A})=0$ oder $\varrho(\mathsf{A})=1$

diese Einteilung nicht genügt. Es mufs dann noch festgestellt werden, ob der Asymptotenkegel der Fläche reell oder imaginär ist.[1]) Nach Nr. 7 haben wir, um dies zu entscheiden, in Gleichung (23) $y_i = \varphi_i(q)$ zu setzen und dann $w(Y)$ aus der Reihe (P′) zu bestimmen. Bilden wir also aus der Determinante

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & -\varphi_1(q) \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & -\varphi_2(q) \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & -\varphi_3(q) \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} & -\varphi_4(q) \\ \varphi_1(q) & \varphi_2(q) & \varphi_3(q) & \varphi_4(q) & 0 \end{vmatrix}$$

die Reihe

$$(\mathsf{P}'') \qquad \mathfrak{D}\mathfrak{D}_{kk,ll}, \quad \mathfrak{D}_{kk}, \quad 1 \qquad (k, l = 1, 2, 3, 4),$$

so ist der Asymptotenkegel imaginär oder reell, je nachdem $w(\mathfrak{D}) = 0$ oder $= 1, 2$ ist. Für $\varphi(q, q) + 0$ und $\varrho(\mathsf{A}) = 2$ oder $= 3$, in welchen Fällen die Fläche ein eigentliches Punktepaar oder ein eigentlicher Doppelpunkt ist, ist der Mittelpunktskegel der Fläche kein Asymptotenkegel, und es mufs, da er sich dann auf eine Doppelgerade, bezw. auf einen Ebenenbündel reduziert, $\varrho(\mathfrak{D}) = 2$, bezw. $= 3$ sein, die Reihe (P″) also illusorisch werden, was wir durch $w(\mathfrak{D}) \equiv 0$ bezeichnen wollen.

Demnach trägt die Fläche für

1) $\varphi(q, q) + 0$ und

α) $w(\mathfrak{D}) = 0$ ε_∞ nicht, aber einen imaginären Asymptotenkegel,

β) $w(\mathfrak{D}) = 1, 2$ ε_∞ nicht, aber einen reellen Asymptotenkegel,

γ) $w(\mathfrak{D})$ 0 weder ε_∞, noch einen Asymptotenkegel,

2) $\varphi(q, q) = 0$ und $\varphi(q, u) \equiv 0$ ε_∞ als Berührungsebene,

3) $\varphi(q, u)$ 0 ε_∞ als singuläre Ebene.

Aus Tabelle IV (S. 10[illegible]) ergiebt sich somit in allen Fällen die projektive und metrische Beschaffenheit jeder Fläche zweiter Klasse,

[1]) Dafs dieser Asymptotenkegel für $\varrho(\mathsf{A}) = 0$ nicht entartet, für $\varrho(\mathsf{A}) = 1$ aber in zwei eigentliche Gerade zerfällt, braucht bei der metrischen Einteilung nicht mehr berücksichtigt zu werden, da diese beiden Fälle schon projektiv von einander geschieden sind.

sobald ihre Gleichung in einem beliebigen Koordinatensytem gegeben ist.[1])

Heidelberg, den 30. Juli 1901.

---

1) Wenn die Ebene $x_4 = 0$ des Koordinatentetraeders mit der Ebene ε_∞ zusammenfällt, also $q_1 = q_2 = q_3 = 0$, $q_4 = 1$ ist, wird $\varphi(q,q) = \alpha_{44}$ und $\varphi(q,u) = \varphi_4(u)$. Ferner ist dann

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & -\alpha_{14} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & -\alpha_{24} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & -\alpha_{34} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} & -\alpha_{44} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} & 0 \end{vmatrix} = \mathsf{A}\alpha_{44}$$

und $\mathfrak{D}_{kk} = \mathsf{A}_{kk}\alpha_{44}$, $\mathfrak{D}_{kk,ll} = \mathsf{A}_{kk,ll}\alpha_{44}$ für $k, l = 1, 2, 3$; die Reihe (P″) geht somit über in

(P‴) $$\mathsf{A}\mathsf{A}_{kk,ll}, \quad \mathsf{A}_{kk}\alpha_{44}, \quad 1 \qquad (k, l = 1, 2, 3),$$

da wir sie nur benutzen, wenn $\varphi(q, q) = \alpha_{44} \neq 0$ ist, also den Faktor α_{44}^2 im ersten Glied unterdrücken können, und da aufserdem, wie leicht zu zeigen ist, für $\varrho(\mathsf{A}) = 0$ und $\varrho(\mathsf{A}) = 1$, d. h. in den beiden einzigen Fällen, in denen wir für $\alpha_{44} \neq 0$ von ihr Gebrauch zu machen haben, *k* und *l unter den Zahlen 1, 2, 3 allein* stets so gewählt werden können, dafs ihre beiden ersten Glieder nicht zugleich verschwinden. Ist nämlich $\varrho(\mathsf{A}) = 0$, so kann nicht $\mathsf{A}_{11,22} = \mathsf{A}_{11,33} = \mathsf{A}_{22,33} = 0$ sein, da hieraus folgen würde, dafs die drei unendlich fernen Kanten des Koordinatentetraeders die durch (22) dargestellte nicht entartete Fläche berühren oder ihr ganz angehören müfsten, was offenbar unmöglich ist. Ist aber $\varrho(\mathsf{A}) = 1$, so würden die Gleichungen $\mathsf{A}_{11} = \mathsf{A}_{22} = \mathsf{A}_{33} = 0$ den in diesem Falle durch (22) dargestellten Kegelschnitt als einen uneigentlichen charakterisieren; es müfste somit gegen Voraussetzung $\varphi(q, q) = \alpha_{44} = 0$ sein.

Für eine Fläche zweiter Klasse, die auf ein beliebiges *cartesisches Koordinatensystem* bezogen ist, hat man demnach in Tabelle IV $\varphi(q, q)$ durch α_{44}, $\varphi(q, u)$ durch $\varphi_4(u)$ zu ersetzen und $w(\mathfrak{D})$ aus der Reihe (P‴) zu bestimmen.

Heidelberg, den 21. Februar 1902.

Berichtigung.

S. 31 Zeile 16 v. u. statt S. 45 lies S. 106
„ 33 „ 14 v. o. „ „ 49 „ „ 110.

I. Klassifikation der Kurve zweiter Ordnung $f(x, x) = \sum a_{ik} x_i x_k = 0$.

		$\varrho(A) =$	0		1		2
		$w(A) =$	0	1, 2	0	1	—
$\varrho(Q)$ ‖	$w(Q)$ ‖	Die Kurve ist → / Es gehört der Kurve an ↓	ein imaginärer Kegelschnitt	ein reeller Kegelschnitt	ein imaginäres Geradenpaar	ein reelles Geradenpaar	eine Doppelgerade
0	0	ein imaginäres uneigentliches Punktepaar	imaginärer Kegelschnitt	Ellipse	imaginäres Geradenpaar mit eigentlichem Schnittpunkt	—	—
0	1	ein reelles uneigentliches Punktepaar	—	Hyperbel	—	reelles Geradenpaar mit eigentlichem Schnittpunkt	—
1	—	ein uneigentlicher Doppelpunkt	—	Parabel	imaginäres Parallelenpaar	reelles Parallelenpaar	eigentliche Doppelgerade
2	—	eine uneigentliche Gerade	—	—	—	Geradenpaar, bestehend aus g_∞ und einer eigentlichen Geraden	g_∞ als Doppelgerade

$\varrho(A)$ = Rang der Determinante $A = \sum \pm a_{11} a_{22} a_{33}$.

$\varrho(Q)$ = Rang der durch Rändern aus A hervorgehenden Determinante $Q = \begin{pmatrix} - & q \\ q & \end{pmatrix}$.
(q_i = Koordinaten von g_∞)

$w(A)$ = Anzahl der Zeichenwechsel der Reihe $A a_{ii}$, A_{kk}, 1, in der i und k unter den Zahlen 1, 2, 3 so zu wählen sind, dafs sie aus mindestens zwei Gliedern besteht.

$w(Q)$ = Anzahl der Zeichenwechsel der Reihe Q, 1.

II. Klassifikation der Kurve zweiter Klasse $\varphi(u,u) = \sum \alpha_{ik} u_i u_k = 0$.

		$\varrho(\mathsf{A}) =$	0		1		2
		$w(\mathsf{A}) =$	0	1, 2	0	1	—
		Die Kurve ist → / Die Kurve trägt ↓	ein imaginärer Kegelschnitt	ein reeller Kegelschnitt	ein imaginäres Punktepaar	ein reelles Punktepaar	ein Doppelpunkt
$,q) \neq 0$	$\mathsf{A}\varphi(q,q) > 0$	g_∞ nicht, aber ein imaginäres Asymptotenpaar	imaginärer Kegelschnitt	Ellipse	—	—	—
	$\mathsf{A}\varphi(q,q) < 0$	g_∞ nicht, aber ein reelles Asymptotenpaar	—	Hyperbel	—	—	—
	—	weder g_∞, noch Asymptoten	—	—	imaginäres eigentliches Punktepaar	reelles eigentliches Punktepaar	eigentlicher Doppelpunkt
$,q) = 0$	$\varphi(q,u) \not\equiv 0$	g_∞ als Tangente	—	Parabel	—	Punktepaar, bestehend aus einem eigentlichen und einem uneigentlichen Punkt	—
	$\varphi(q,u) \equiv 0$	g_∞ als singuläre Gerade	—	—	imaginäres uneigentliches Punktepaar	reelles uneigentliches Punktepaar	uneigentlicher Doppelpunkt

) = Rang der Determinante $\mathsf{A} = \sum \pm \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}$.

) = Anzahl der Zeichenwechsel der Reihe $\mathsf{A}\alpha_{ii}$, A_{kk}, 1, die aus mindestens zwei Gliedern bestehen mufs (s. vor. S.).

III. Klassifikation der Fläche zweiter Ordnung $f(x,x) = \sum a_{ik} x_i x_k = 0$.

		$\varrho(A) =$	0			1		2		3
		$w(A) =$	0	2	1, 3	0	1, 2	0	1	—
$\varrho(Q)$ ‖	$w(Q)$ ‖	Die Fläche ist → / Der Fläche gehört an ↓	eine imaginäre nicht entartete Fläche	eine geradlinige nicht entartete Fläche	eine nichtgeradlinige nicht entartete Fläche	ein imaginärer Kegel	ein reeller Kegel	ein imaginäres Ebenenpaar	ein reelles Ebenenpaar	eine Doppelebene
0	0	ein imaginärer uneigentlicher Kegelschnitt	imaginäre Fläche zweiter Ordnung	—	Ellipsoid	imaginärer Kegel mit eigentlichem Mittelpunkt	—	—	—	—
	1, 2	ein reeller uneigentlicher Kegelschnitt	—	einschaliges Hyperboloid	zweischaliges Hyperboloid	—	reeller Kegel mit eigentlichem Mittelpunkt	—	—	—
1	0	ein imaginäres uneigentliches Geradenpaar	—	—	elliptisches Paraboloid	imaginärer Cylinder	elliptischer Cylinder	imaginäres Ebenenpaar mit eigentlicher Schnittlinie	—	—
	1	ein reelles uneigentliches Geradenpaar	—	hyperbolisches Paraboloid	—	—	hyperbolischer Cylinder	—	reelles Ebenenpaar mit eigentlicher Schnittlinie	—
2	—	eine uneigentliche Doppelgerade	—	—	—	—	parabolischer Cylinder	imaginäres Parallelebenenpaar	reelles Parallelebenenpaar	eigentliche Doppelebene
3	—	die uneigentliche Ebene	—	—	—	—	—	—	Ebenenpaar, bestehend aus ε_∞ und einer eigentlichen Ebene	ε_∞ als Doppelebene

$\varrho(A)$ = Rang der Determinante $A = \sum \pm a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$.

$\varrho(Q)$ = Rang der durch Rändern aus A hervorgehenden Determinante $Q = \begin{pmatrix} & -q \\ q & \end{pmatrix}$. ($q_i$ = Koordinaten von ε_∞)

$w(A)$ = Anzahl der Zeichenwechsel der Reihe A, $A_{kk} a_{ll}$, $A_{kk,ll}$, 1, in der i, k, l unter den Zahlen 1, 2, 3, 4 so zu wählen sind, daſs ihre beiden mittleren Glieder nicht zugleich fehlen und für $\varrho(A) = 1$ $A_{kk} \neq 0$ ist.

$w(Q)$ = Anzahl der Zeichenwechsel der Reihe $Q Q_{kk,ll}$, Q_{kk}, 1, in der k und l unter den Zahlen 1, 2, 3, 4 so zu wählen sind, daſs sie aus mindestens [zwei Gliedern besteht.

Klassifikation der Fläche zweiter Klasse $\varphi(u, u) = \sum \alpha_{ik} u_i u_k = 0$.

		$\varrho(A)$	0			1		2		3
		$w(A)$	0	2	1, 3	0	1, 2	0	1	—
		Die Fläche ist → / Die Fläche trägt ↓	eine imaginäre nicht entartete Fläche	eine geradlinige nicht entartete Fläche	eine nichtgeradlinige nicht entartete Fläche	ein imaginärer Kegelschnitt	ein reeller Kegelschnitt	ein imaginäres Punktepaar	ein reelles Punktepaar	ein Doppelpunkt
$\varphi(q, q) \neq 0$	$w(\mathfrak{Q}) = 0$	ε_∞ nicht, aber einen imaginären Asymptotenkegel	imaginäre Fläche zweiter Klasse	—	Ellipsoid	imaginärer eigentlicher Kegelschnitt	Ellipse	—	—	—
	$w(\mathfrak{Q}) = 1, 2$	ε_∞ nicht, aber einen reellen Asymptotenkegel	—	einschaliges Hyperboloid	zweischaliges Hyperboloid	—	Hyperbel	—	—	—
	—	weder ε_∞, noch einen Asymptotenkegel	—	—	—	—	—	imaginäres eigentliches Punktepaar	reelles eigentliches Punktepaar	eigentlicher Doppelpunkt
$\varphi(q, q) = 0$	$\varphi(q, u) \not\equiv 0$	ε_∞ als Berührungsebene	—	hyperbolisches Paraboloid	elliptisches Paraboloid	—	Parabel	—	Punktepaar, bestehend aus einem eigentlichen und einem uneigentlichen Punkt	—
	$\varphi(q, u) \equiv 0$	ε_∞ als singuläre Ebene	—	—	—	imaginärer uneigentlicher Kegelschnitt	reeller uneigentlicher Kegelschnitt	imaginäres uneigentliches Punktepaar	reelles uneigentliches Punktepaar	uneigentlicher Doppelpunkt

$\varrho(A)$ = Rang der Determinante $A = \sum \pm \alpha_{11} \alpha_{22} \alpha_{33} \alpha_{44}$.

$\mathfrak{Q} = \begin{pmatrix} - & \varphi(q) \\ \varphi(q) & \end{pmatrix}$ ist die durch Rändern mit $\mp \varphi_i(q)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ aus A hervorgehende Determinante.

$w(A)$ = Anzahl der Zeichenwechsel der Reihe A, $A_{kk} \alpha_{ii}$, $A_{kk,ll}$, 1, in der die beiden mittleren Glieder nicht zugleich fehlen dürfen etc. (s. vor. S.).

$w(\mathfrak{Q})$ = Anzahl der Zeichenwechsel der Reihe $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_{kk,ll}$, $\mathfrak{Q}_{kk}$, 1, die aus mindestens zwei Gliedern bestehen muſs (s. vor. S.).

V. **Klassifikation des Schnittes der Ebene v_i mit der Fläche zweiter Ordnung $f(x, x) = \sum a_{ik} x_i x_k = 0$.**

		$\varrho(V) =$	0		1		2	3
		$w(V) =$	0	1, 2	0	1	—	—
$\varrho(V_q)$ ‖	$w(V_q)$ ‖	Die Schnittkurve ist → / Der Schnittkurve gehört an ↓	ein imaginärer Kegelschnitt	ein reeller Kegelschnitt	ein imaginäres Geradenpaar	ein reelles Geradenpaar	eine Doppelgerade	das Punktfeld der Ebene v_i
0	0	ein imaginäres uneigentliches Punktepaar	imaginärer Kegelschnitt	Ellipse	imaginäres Geradenpaar mit eigentlichem Schnittpunkt	—	—	—
	1	ein reelles uneigentliches Punktepaar	—	Hyperbel	—	reelles Geradenpaar mit eigentlichem Schnittpunkt	—	—
1	—	ein uneigentlicher Doppelpunkt	—	Parabel	imaginäres Parallelenpaar	reelles Parallelenpaar	eigentliche Doppelgerade	—
2	—	eine uneigentliche Gerade	—	—	—	Geradenpaar, bestehend aus $\|vq\|$ und einer eigentlichen Geraden	$\|vq\|$ als Doppelgerade	das Punktfeld der Ebene v_i

$\varrho(V)$ = Rang der durch einmaliges Rändern aus $A = \sum \pm a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$ hervorgehenden Determinante $V = \begin{pmatrix} - & v \\ & v \end{pmatrix}$.

$\varrho(V_q)$ = Rang der durch zweimaliges Rändern aus A hervorgehenden Determinante $V_q = \begin{pmatrix} -v & -q \\ v & q \end{pmatrix}$. ($q_i$ = Koordinaten von ε_∞)

$w(V)$ = Anzahl der Zeichenwechsel der Reihe $VV_{kk,ll}$, V_{kk}, 1, in der k und l unter den Zahlen 1, 2, 3, 4 so zu wählen sind, daß sie aus mindestens zwei Gliedern besteht.

$w(V_q)$ = Anzahl der Zeichenwechsel der Reihe V_q, 1.

VI. Klassifikation des Berührungskegels, bezw. -cylinders vom Punkt y_i an die Fläche zweiter Klasse

$$\varphi(u,u) = \sum \alpha_{ik} u_i u_k = 0.$$

		$\varrho(Y) =$	0		1		2	3
		$w(Y) =$	0	1, 2	0	1	—	—
		Der Kegel ist → / Der Cylinder trägt ↓	ein imaginärer nicht entarteter Kegel	ein reeller nicht entarteter Kegel	ein imaginäres Geradenpaar	ein reelles Geradenpaar	eine Doppelgerade	das Ebenenbündel des Punktes y_i
$\varphi(q,q) \neq 0$	$Y\varphi(q,q) > 0$	ε_∞ nicht, aber ein Paar imaginärer Asymptotenebenen	imaginärer Cylinder	elliptischer Cylinder	—	—	—	—
	$Y\varphi(q,q) < 0$	ε_∞ nicht, aber ein Paar reeller Asymptotenebenen	—	hyperbolischer Cylinder	—	—	—	—
	—	weder ε_∞, noch Asymptotenebenen	—	—	imaginäres Parallelenpaar	reelles Parallelenpaar	eigentliche Doppelgerade	—
$\varphi(q,q) = 0$	$\varphi(q,u) \not\equiv 0$ und $\not\equiv \lambda \sum y_i u_i$	ε_∞ als Berührungsebene	—	parabolischer Cylinder	—	Geradenpaar, bestehend aus einer eigentlichen und einer uneigentlichen Geraden	—	—
	$\varphi(q,u) \equiv 0$ oder $\equiv \lambda \sum y_i u_i$	ε_∞ als singuläre Ebene	—	—	imaginäres uneigentliches Geradenpaar	reelles uneigentliches Geradenpaar	uneigentliche Doppelgerade	das Ebenenbündel des uneigentlichen Punktes y_i

$\varrho(Y)$ = Rang der durch Rändern aus $A = \sum \pm \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}\alpha_{44}$ hervorgehenden Determinante $Y = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix}$.

$w(Y)$ = Anzahl der Zeichenwechsel der Reihe $YY_{kk,ll}$, Y_{kk}, 1, die aus mindestens zwei Gliedern bestehen muſs (s. vor. S.).

NB. Die metrische Einteilung ist nur möglich, wenn der Punkt y_i ein uneigentlicher Punkt, der Kegel also ein Cylinder ist.

Über kubische Konstruktionen.

Von K. Th. Vahlen in Königsberg i. Pr.

Unter einer „linearen" Konstruktionsaufgabe kann man eine solche verstehen, die mit dem Lineal allein lösbar ist, oder auch eine solche, die, ohne transzendent zu sein, nur *eine* Lösung zuläſst. Diese beiden Definitionen sind nur in Bezug auf projektive Probleme gleichbedeutend; denn man kann z. B. eine Strecke, die rational von gegebenen Strecken abhängt, im allgemeinen nicht mit dem Lineal allein, sondern nur mit Lineal und Zirkel konstruieren. Eine mit Lineal und Zirkel lösbare Konstruktionsaufgabe kann nach Poncelet und Steiner[1]) auch mit dem Lineal allein und mit einem einzigen gezeichnet vorliegenden Kreise gelöst werden; eine solche Aufgabe heiſst eine „quadratische", weil sie äquivalent ist der Konstruktion von Ausdrücken, die keine andern als quadratische Irrationalitäten enthalten.

Entsprechend verstehen wir unter einer „kubischen" Aufgabe eine solche, die äquivalent der Konstruktion von Ausdrücken ist, die keine andern Irrationalitäten als Wurzeln kubischer Gleichungen enthalten. Es ist aber unmittelbar klar, daſs *diejenigen* Hilfsmittel, mit denen man die Wurzeln einer kubischen Gleichung konstruieren kann, auch die Konstruktion der Wurzeln reduzibler kubischer Gleichungen, also der Wurzeln linearer und quadratischer Gleichungen ermöglichen. Wir definieren daher allgemeiner eine kubische Aufgabe als eine solche, welche der Konstruktion von Ausdrücken äquivalent ist, die keine andern Irrationalitäten als Wurzeln quadratischer und kubischer Gleichungen enthalten. Insbesondere gehören also die biquadratischen Gleichungen hierher; denn die Wurzel einer reduzierten biquadratischen Gleichung mit der (geeignet gewählten) kubischen Resolvente $z^3 - az^2 + bz - c = 0$ wird durch $\sqrt{z} + \sqrt{a - z + 2\sqrt{\frac{c}{z}}}$ dargestellt.

---

1) Poncelet: Traité des propriétés projectives des figures. Paris 1822. Sect. III. art. 351 bis 355. J. Steiner: Die geometrischen Constructionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises. Berlin 1833 = Werke I S. 461.

Welcher Konstruktionsmittel man sich bei kubischen Aufgaben bedienen kann, darüber äufsert sich Smith[1]) wie folgt: On admet .. que tout problème qui n'a que n solutions et qui n'est pas transcendental, peut se résoudre par des intersections de droites et de courbes de l'ordre n. Et en effet, la vérité de ces théorèmes paraît découler des premiers principes de l'Algèbre. Mais ... il se présente un choix de méthodes ...; ainsi l'on peut faire dépendre la solution de tout problème cubique ou biquadratique, soit des intersections de courbes du troisième ou du quatrième ordre par des droites, soit des intersections mutuelles de courbes de second ordre, puisqu'on a la même évidence algébrique de la généralité absolue des deux méthodes. Or c'est la dernière de ces deux méthodes qui paraît la plus simple, et qui a été, à juste titre, préférée par les géomètres. Ainsi, l'on a ramené la recherche des points d'intersection d'une droite par une courbe du troisième ou du quatrième ordre à la recherche plus simple des points d'intersections de deux coniques, tandis que personne, que nous sachions, n'a suivi la marche inverse, qui à la vérité serait peu naturelle. . . Nous démontrerons qu'en se servant de cette courbe auxiliaire (une section conique donnée) on résout tous les problèmes cubiques et biquadratiques avec la règle et le compas seulement, en les ramenant, pour ainsi dire, dans les limites de la géométrie élémentaire.

Übrigens erweist sich die Auflösung einer kubischen Aufgabe durch eine gegebene kubische Kurve und das Lineal allein, wenn es sich um eine metrische Aufgabe handelt, als illusorisch. So liegt es zwar auf der Hand, dafs die Gleichung $x^3 = px + q$ durch die Kurve $x^3 = y$ und die Gerade $y = px + q$ gelöst wird, aber die Konstruktion dieser Geraden erfordert im allgemeinen auch die Anwendung des Zirkels.

Die Kegelschnitte betrachteten schon die Alten als die naturgemäfsen Lösungsmittel für kubische Aufgaben, welche sie als „problemata solida (προβλήματα στερεά)“ wohl unterschieden neben die „problemata plana (προβλήματα ἐπίπεδα)“ stellten, die durch Zirkel und Lineal gelöst wurden. Und man verlangte sogar, dafs nur bei Konstruktionen, deren Lösung mit Zirkel und Lineal nicht gelingt, die Kegelschnitte, und erst bei deren Unzulänglichkeit noch höhere Kurven hinzugezogen würden.[2]) So löste Menächmus[3]) die Aufgabe der Multiplikation des Würfels oder die Gleichung $x^3 = a$, welche früher durch Kurven dritter

1) H. J. S. Smith: Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques. Annali di Mat. (2) **3**, 112—165, 218—242; Mém. cour. par l'Ac. de Berlin 1868 = Papers II, p. 1.

2) Pappus ed. Hultsch I, S. 270, 28 bis 272, 4.

3) Archimedes ed. Heiberg III, S. 92.

Ordnung gelöst wurde, durch irgend zwei der drei Kegelschnitte: $x^2 = y$, $y^2 = ax$, $xy = a$; während Apollonius[1]) zu einem derselben (am einfachsten zu der festen Parabel $x^2 = y$) den Kreis $x^2 + y^2 - ax - y = 0$ hinzunimmt.

Für die Trisektion des Winkels teilt Pappus[2]) zwei Auflösungen durch Kegelschnitte mit, deren erste er den Alten zuschreibt. Mit der Multiplikation des Würfels und der Trisection des Winkels ist aber die Auflösung jeder kubischen und biquadratischen Gleichung, überhaupt jedes kubischen Problems gegeben.[3]) Denn ist nur eine Wurzel der Gleichung $x^3 - 3ax - 2b = 0$ reell, so wird sie durch $\sqrt[3]{b + \sqrt{b^2 - a^3}} + \frac{a}{\sqrt[3]{b + \sqrt{b^2 - a^3}}}$ geliefert, erfordert also nur eine Kubikwurzelausziehung aus einer mit Zirkel und Lineal konstuierbaren reellen Gröfse; sind alle drei Wurzeln reell, so ergeben sie sich aus $+ 2\sqrt{a} \cos \frac{1}{3} \operatorname{arc} \cos \frac{b}{a\sqrt{a}}$, also durch Trisection eines mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Winkels. Aber auch bei komplexen Elementen ist dies richtig; denn Quadrat- und Kubikwurzeln aus komplexen Gröfsen kommen auf solche aus reellen positiven Gröfsen und auf Zwei- und Dreiteilungen reeller Winkel zurück.

Diese Äquivalenz der beiden speziellen Probleme mit dem allgemeinen kubischen kannten die Alten natürlich nicht. Aber andererseits lösten dieselben einige geometrische Probleme, welche auf allgemeine (d. h. den allgemeinen äquivalente) kubische und biquadratische Gleichungen führen. So führt das von Archimedes[4]) durch Kegelschnitte gelöste Problem: eine Kugel durch eine Ebene in einem gegebenen Verhältnis zu teilen, auf die kubische Gleichung $x^3 + ax^2 = b$, welche durch die Substitution $x \parallel \frac{1}{x}$ in die allgemeine reduzierte kubische Gleichung übergeht. Der von Archimedes angeknüpfte Diorismus ist also gleichwertig der Diskussion einer allgemeinen kubischen Gleichung. Ebenso ist das Apollonische[5]) Problem: von einem Punkte die Normalen auf einen gegebenen Kegelschnitt zu fällen, einer allgemeinen biquadratischen Gleichung und sein Diorismus der Diskussion einer allgemeinen biquadratischen Gleichung äquivalent.

---

1) s. Archimedes ed. Heiberg III, S. 76; Pappus ed. Hultsch I, S. 54; P. Tannery, Bull. d. sc. math. (2) 8 (1888) S. 323.

2) l. c. S. 272, 280.

3) Dies bemerkt schon Descartes, s. Geometria (Amsterdam 1683) S. 92.

4) l. c. I S. 215, III S. 152.

5) Kegelschnitte, Buch V.

Die Auffassung solcher Probleme als Gleichungen findet sich, wie es scheint, zuerst bei den Arabern; diese lösen auch die allgemeine kubische Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, aber nur spezielle biquadratische Gleichungen durch Kegelschnitte.[1])

Der nächste Fortschritt hierin wurde von Fermat gemacht. Fermat[2]) löste die allgemeinen kubischen und biquadratischen Gleichungen durch eine Parabel und einen Kreis. Die Parabel ist bei seiner Auflösung sogar eine „feste"; d. h. ihre Gleichung von der aufzulösenden Gleichung unabhängig. Aber Fermat hebt diesen Umstand nicht hervor. Mit Bewufstsein wurde die Beschränkung auf einen „festen" und beliebigen Kegelschnitt und sogar auf ein endliches Stück eines solchen von Descartes vollzogen, der, wie die Alten, die Kegelschnitte als nächst einfaches Konstruktionsmittel betrachtet. Descartes spricht den Satz aus[3]):

Jam vero postquam compertum est Problema propositum esse Solidum; ... potest semper radix ejus inveniri per aliquam trium Conicarum Sectionum, quaecunque illa tandem sit; aut etiam per ipsarum particulam aliquam, quantumlibet exiguam, nec utendo nisi rectis lineis et circulis. Verum suffecerit regulam generalem hic adducere, inveniendi radices omnes ope Parabolae, quando quidem haec aliquo modo est simplicissima.

---

1) Omar († 1123), Mémoire sur les démonstrations des problèmes de l'algèbre, publ. et trad. par Woepcke. Paris 1851. S. 46.

2) Ad locos planos et solidos isagoge. Oeuvres publ. par Tannery et Henry, I. S. 91 spez. S. 107 = III. S. 85 spez. S. 99. Dafs Fermat diese Schrift vor Descartes' Géométrie publiziert hat, geht aus der „Eloge de Monsieur de Fermat, Conseiller au Parlement de Toulouse" (Le Journal des Sçavants I [1665] Amsterdam 1679 S. 81) hervor, wo es heifst: „. . une introduction aux lieux plans et solides; qui est un traité analytique concernant la solution des problemes plans et solides, qui avait esté veu devant que M. Des-cartes eût rien publié sur ce sujet."

3) l. c. S. 85. Der französische Originaltext, 1637, des Descartes (die lateinische Übersetzung, erste Auflage 1649, zweite 1683, rührt von Franciscus van Schooten her) lautet: Or, quand on s'est assuré que le problème proposé est solide, soit que l'équation par laquelle on le cherche monte au carré de carré, soit qu'elle ne monte que jusques au cube, on peut toujours en trouver la racine par l'une des trois sections coniques, laquelle que ce soit, ou même par quelque partie de l'une d'elles, tant petite qu'elle puisse être, en ne se servant au reste que de lignes droites et de cercles. Mais je me contenterai ici de donner une règle générale pour les trouver toutes par le moyen d'une parabole, à cause qu'elle est en quelque façon la plus simple. (Text nach dem Abdruck von „La géométrie de René Descartes" in „La géométrie analytique d'Auguste Comte. Nouvelle édition précédée de la Géométrie de Descartes". Paris, Louis Bahl, 1894, S. 87—88. Red.)

Er löst die biquadratische Gleichung $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ mit Hülfe der festen Parabel $y = px^2$ und des Kreises $x^2 + y^2 + bp^2x + \frac{ap^2-1}{p}y + cp^2 = 0$, dessen Mittelpunkt und Radius mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind. Die Lösung der kubischen Gleichung $x^3 + ax + b = 0$ ist für $c = 0$ hierin enthalten. Da die 4 Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 der biquadratischen Gleichung die Bedingung $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ erfüllen, erhält man ein Kriterium dafür, daſs vier Punkte einer Parabel auf einem Kreise liegen; nämlich der Schwerpunkt der vier Punkte muſs dann auf der Parabelachse liegen. Durch vier Kreispunkte gehen zwei Parabeln; der Schnittpunkt ihrer Achsen ist der Schwerpunkt der vier Punkte.

Unter Zugrundelegung einer beliebigen festen Ellipse oder Hyperbel löste Newton[1]) die kubische Gleichung. Da sich Kegelschnitt und Kreis in vier Punkten schneiden, ist es naturgemäſser, sogleich die biquadratische Gleichung aufzulösen und den Fall der kubischen Gleichung wie oben daraus zu folgern. Die von De la Hire[2]) gegebene Lösung ist unzureichend, da die beiden willkürlichen Parameter seiner Kegelschnittgleichung sich nicht immer *reell* so bestimmen lassen, daſs die Gleichung in die eines gegebenen Kegelschnitts übergeht. Durch rein geometrische Überlegungen ist die Lösbarkeit eines allgemeinen kubischen Problems mit Hilfe eines festen Kegelschnitts nebst Zirkel und Lineal zuerst von Smith und Kortum[3]) gezeigt worden.

Sehr viel elementarer ist die analytisch-geometrische Behandlung. Wird zunächst eine Ellipse zu Grunde gelegt, so transformiere man die biquadratische Gleichung $x^4 + 4ax^3 + 6bx^2 + 4cx + d = 0$ durch lineare Variation $x \parallel x + \alpha$ in eine solche, in welcher $ac > 0$ ist; alsdann durch $x = \sqrt{\frac{c}{a}}\,t$ in die Gleichung $t^4 + At^3 + Bt^2 + At + C = 0$. Ist nun $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ die Gleichung der Ellipse und $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{b} : \frac{x}{a}\right)$ die exzentrische Anomalie des Punktes (x, y) derselben, so lassen sich seine Koordinaten als rationale Funktionen $x = a\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = b\frac{2t}{1+t^2}$ von $t = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{y}{b} : \left(1 - \frac{x}{a}\right) = \left(1 + \frac{x}{a}\right) : \frac{y}{b}$ darstellen; und die vier Wurzeln der

---

1) Arithmetica universalis, Cantabrigiae 1707, S. 322.

2) Nouveaux élémens des sections coniques, Paris 1679, S. 400.

3) Smith l. c.; Kortum: Über geometrische Aufgaben dritten und vierten Grades. Bonn 1869. Beide Schriften waren zur Bewerbung um den Steiner-Preis (1868) der Berl. Akademie eingereicht worden; der Preis wurde unter ihnen geteilt.

gegebenen Gleichung entsprechen den vier Schnittpunkten der Ellipse mit dem Kreise:

$$x^2 + y^2 + 2e^2 \frac{(C-1)x + Ay + (C+1)}{1 - B + C} = a^2.$$

Die Exzentrizität $e^2 = a^2 - b^2$ darf nicht verschwinden; sollte $1 + C = B$ sein, so zerfällt die gegebene Gleichung in $(t^2+1)(t^2 + At + C) = 0$, ist also durch Quadratwurzeln, d. h. durch Zirkel und Lineal lösbar. Die vier Wurzeln $t_i = \operatorname{tg}\frac{\varphi_i}{2}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ erfüllen die Bedingung: $\sum t_i = t_1 t_2 t_3 t_4 \sum \frac{1}{t_i}$ oder $\operatorname{tg}\frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4}{2} = 0$; also: vier Punkte einer Ellipse liegen auf einem Kreise, wenn ihre exzentrischen Anomalien eine Summe $\equiv 0 \pmod{2\pi}$ haben. Ist $P(x, y)$ ein Ellipsen-Punkt, $Q(x, \frac{a}{b}y)$ der entsprechende Punkt des Hauptkreises $x^2 + y^2 = a^2$, O der Mittelpunkt, S der Scheitel $(a, 0)$ der Ellipse, so ist der Winkel $QOS = \varphi$, des Kreissektor $QOS = \frac{\varphi}{2}a^2$, der Ellipsensektor $POS = \frac{\varphi}{2}ab$. Das obige Kriterium kann daher auch so ausgesprochen werden: vier Punkte einer Ellipse liegen auf einem Kreise, wenn die Summe der zugehörigen Ellipsensektoren kongruent Null ist, für den Ellipsen-Inhalt als Modul.

Ist dagegen eine Hyperbel gegeben, so mufs die zu lösende Gleichung $x^4 + 4ax^3 + 6bx^2 + 4cx + d = 0$ durch $x \parallel x + \alpha$ so transformiert werden, dafs die neuen Koeffizienten von $4x^3$ und $4x$, nämlich $\alpha + a$ und $\alpha^3 + 3a\alpha^2 + 3b\alpha + c$, entgegengesetzte Vorzeichen haben. Dies ist stets für reelle α zu erreichen, da das Produkt $(\alpha + a)(\alpha^3 + 3a\alpha^2 + 3b\alpha + c)$ wenigstens zwei reelle Wurzeln hat. Nur wenn $\alpha = -a$ zugleich Wurzel von $\alpha^3 + 3a\alpha^2 + 3b\alpha + c = 0$ ist, kann diese Transformation unmöglich werden; aber dann geht die Gleichung durch $x \parallel x - a$ in eine durch Quadratwurzeln allein lösbare Gleichung $x^4 + 6b'x^2 + d' = 0$ über.

Wir können also $ac < 0$ annehmen, und die Gleichung vermittelst $x = \sqrt{\frac{-c}{a}}\,t$ in $t^4 - At^3 - Bt^2 + At + C = 0$ transformieren. Ist nun $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ die gegebene Hyperbel, $P(x, y)$ ein Punkt derselben, S der Scheitel des durch P gehenden Astes, und setzt man den Inhalt des Hyperbelsektors SOP gleich $\frac{\varphi}{2}ab$, wo man φ das Vorzeichen von $x \cdot y$ beilegt, so ist $\operatorname{tg}\operatorname{hyp}\varphi = \frac{y}{b} : \frac{x}{a}$, und x und y lassen sich rational ver-

mittelst $t = \operatorname{tg\,hyp} \frac{\varphi}{2} = \frac{y}{b} : \left(\frac{x}{a} + 1\right) = \left(\frac{x}{a} - 1\right) : \frac{y}{b}$ ausdrücken: $x = a \frac{1+t^2}{1-t^2}$, $y = b \frac{2t}{1-t^2}$. Die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung entsprechen den Schnittpunkten der Hyperbel mit einem Kreise, dessen Gleichung dieselbe wie im Falle der Ellipse ist; nur ist jetzt $e^2 = a^2 + b^2$. Für $1 + C = B$ zerfällt die biquadratische Gleichung in $(t^2 - 1)(t^2 - At - C) = 0$.

Die vier Wurzeln $t_i = \operatorname{tg\,hyp} \frac{\varphi_i}{2}$ erfüllen die Bedingung

$$\sum t_i = -t_1 t_2 t_3 t_4 \sum \frac{1}{t_i}, \quad \text{d. h.} \quad \operatorname{tg\,hyp} \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4}{2} = 0;$$

also liegen vier Punkte einer Hyperbel auf einem Kreise, wenn die Summe der zugehörigen Hyperbelsektoren gleich Null ist.

Die beiden Kriterien für vier Kreispunkte einer Ellipse oder einer Hyperbel bleiben offenbar erfüllt, wenn man irgend zwei der vier Punkte durch ihre diametralen Gegenpunkte ersetzt; analytisch findet dies seinen Ausdruck darin, dafs die Gleichungen $\pm \sum t_i = t_1 t_2 t_3 t_4 \sum \frac{1}{t_i}$ durch irgend zwei der resp. Substitutionen $t_i \parallel \frac{\mp 1}{t_i}$ in sich übergehen.

Der zweite Teil des Descartesschen Satzes, dafs von dem Kegelschnitt nur ein Stück gegeben zu sein braucht, ist rein geometrisch von Smith[1]) bewiesen worden. Analytisch ergiebt sich seine Richtigkeit einfach wie folgt. Es sei z. B. ein Ellipsenbogen gegeben, dessen Punkte den im Intervall $t' < t''$ gelegenen Werten von t entsprechen. Die Gleichung $x^4 + 4ax^3 + 6bx^2 + 4cx + d = 0$ wird durch jede der Transformationen $x = \alpha + \beta t$, wo $\beta = \sqrt{\frac{\alpha^3 + 3a\alpha^2 + 3b\alpha + c}{\alpha + a}}$ ist, in eine durch Ellipse und Kreis auflösbare transformiert. Ist nun x_1 eine (reelle) Wurzel der gegebenen Gleichung und sei $\tau \neq \pm 1$ zwischen t' und t'' gelegen, so wähle man für α einen hinreichend nahen rationalen Näherungswert einer reellen Wurzel der kubischen Gleichung:

$$(x_1 - \alpha)^2 (\alpha + a) = \tau^2 (\alpha^3 + 3a\alpha^2 + 3b\alpha + c),$$

und es sei t_1 der zugehörige Wert von τ. Dann ist der zugehörige Wert von $\beta = + \frac{x_1 - \alpha}{t_1}$ reell und *eine* Wurzel $t_1 = \frac{x_1 - \alpha}{\beta}$ der transformierten Gleichung liegt zwischen t' und t'', d. h. der auflösende Kreis schneidet den gegebenen Ellipsenbogen.

Durch eine quadratische Transformation kann man auch erreichen, dafs zwei der Schnittpunkte auf dem gegebenen Bogen liegen.

1) l. c. Partie II. Art. 5 = Papers II, p. 25 ff.

Wir haben bisher angenommen, dafs Achsen und Mittelpunkt des Kegelschnitts bekannt seien; von dieser Beschränkung können wir uns frei machen, da man aus fünf Punkten eines Kegelschnitts seine Achsen der Lage und Gröfse nach mit Zirkel und Lineal konstruieren kann.[1])

Betrachten wir nun einige besondere kubische Aufgaben. Die Aufgabe: von einem Punkte $M(x_1, y_1)$ die Normalen auf einen Kegelschnitt zu fällen, löste Apollonius[2]) durch eine Hyperbel mit zu den Kegelschnittachsen parallelen Asymptoten, die durch M und die Fufspunkte, und bei Ellipse und Hyperbel noch durch den Mittelpunkt O hindurchgeht. Da Pappus[3]) für den Fall der Parabel $x^2 = 2py$ die Anwendung eines Kegelschnittes tadelt, ist anzunehmen, dafs er die Lösung der Aufgabe durch den Kreis $x^2 + y^2 - (y_1 + p)\,y - \frac{1}{2}x_1 x = 0$ kannte, der durch die drei Fufspunkte und den Scheitel hindurchgeht.

Hier läfst sich eine Diskussion der biquadratischen Gleichung $x^4 + 6ax^2 + 4bx + c = 0$ anknüpfen. Liegt nämlich der Mittelpunkt M des auflösenden Kreises:

$$x^2 + (y-p)^2 + \frac{b}{p^2}x + \left(\frac{3a}{p} - 2p\right)(y-p) + \frac{c}{4p^2} + 3a - p^2 = 0$$

auf der konkaven Seite der Evolute $x^2 = \frac{8}{27}(y-p)^3$, ist also $b^2 + 4a^3 < 0$, so läfst sich von M aus nur eine reelle Normale n auf die Parabel fällen, und die biquadratische Gleichung hat 2 oder 0 reelle Wurzeln, je nachdem der Radius r des auflösenden Kreises $>$ oder $< n$ ist; welcher dieser beiden Fälle eintritt, ergiebt sich aus dem Vorzeichen von $f(r)$, wenn $f(n) = 0$ die Gleichung ist, der die drei Normalen genügen. Ist aber $b^2 + 4a^3 > 0$, so hat $f(n) = 0$ drei reelle Wurzeln $n_1 > n_2 > n_3 > 0$, und die biquadratische Gleichung zwei, wenn $r > n_1$ oder $n_2 > r > n_3$ ist, vier, wenn $n_1 > r > n_2$, Null, wenn $n_3 > r$ ist; welcher dieser Fälle eintritt, ergiebt sich nach der Descartesschen Zeichenregel unzweideutig aus den Vorzeichen der Reihe $f(r)$, $f'(r)$, $f''(r)$, $f'''(r)$.

Für Ellipse und Hyperbel wurde das Normalen-Problem mittelst eines Kreises gelöst von De la Hire[4]) und Catalan[5]), einfacher und

1) Apollonius, Buch IV; Pappus, Ausg. v. Hultsch S. 1076 = Ausg. v. Gerhardt S. 342.

2) Apollonius Buch V.

3) l. c. S. 270, vgl. hierzu Zeuthen: Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum. Deutsch von R. v. Fischer-Benzon, Kopenhagen 1886. S. 258.

4) l. c. S. 440.

5) Nouv. Ann. de Math. (1) 7 (1848), 332.

eleganter von Joachimsthal[1]): die andern Endpunkte der vom Scheitel S senkrecht zu den vier Normalen gezogenen Sehnen liegen auf dem Kreise

$$e^2(x^2+y^2-a^2)=2\left\{\frac{x}{a}(a^2x_1^2-e^2y_1^2)+2ax_1y_1y-(a^2x_1^2+b^2y_1^2)\right\};$$

seine gemeinsame Sehne mit dem Hauptkreise $x^2+y^2=a^2$ berührt den Kegelschnitt in einem Punkte T, so daſs ST senkrecht zu OM ist.

Schlieſslich wollen wir mit Hülfe der Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ in den Kreis $x^2+y^2=a^2$ ein reguläres Siebeneck $SS_1S_2S_3S_4S_5S_6$ konstruieren. Projiziert man seine Ecken senkrecht zur Hauptachse a auf die Ellipse in die Punkte T_i, so liegen $ST_1T_2T_4$ auf dem einen, $ST_3T_5T_6$ auf dem andern der beiden Kreise:

$$(x-a)^2+y^2+\left(2a-\frac{e^2}{4a}\right)(x-a)\pm\frac{e^2\sqrt{7}}{4b}y=0.$$

Königsberg i. Pr., den 24. April 1901.

---

1) J. f. Math. 48 (1854), 377.

Über Beweise von Schnittpunktsätzen.

Von GERHARD HESSENBERG in Charlottenburg.

1. Wie Herr Hilbert in der Göttinger Festschrift 1899 gezeigt hat, läſst sich jeder reine Schnittpunktsatz aus dem Desarguesschen Satz und dem speziellen Fall des Pascalschen Satzes herleiten, der durch das Degenerieren eines Kegelschnittes in zwei Gerade entsteht.[1])

Wie aus den Untersuchungen von Herrn Hilbert weiterhin hervorgeht, lassen sich beliebig viele Fälle Pascalscher Konfigurationen aus der Desarguesschen herleiten, — eine Thatsache, die übrigens dem bekannten Staudtschen Versuch, den projektiven Fundamentalsatz zu beweisen, zu Grunde liegt. Daraus folgt also, daſs es Schnittpunktsätze giebt, die sich unter alleiniger Anwendung der Desarguesschen sowohl wie der Pascalschen Konfiguration beweisen lassen.

2. Als einfaches Beispiel sei folgender Satz gewählt:

I. Liegen die Ecken eines einfachen Sechsecks abwechselnd auf zwei Geraden, *und liegt der Schnittpunkt dieser Geraden mit den Schnittpunkten von zwei Paar Gegenseiten des Sechsecks in gerader Linie*, so liegen die drei Schnittpunkte der Gegenseitenpaare des Sechsecks in gerader Linie.

Der Satz ist ein spezieller Fall des Pascalschen und entsteht aus ihm durch den kursiven Zusatz.

Wir haben noch zu zeigen, daſs er aus dem Desarguesschen Satz hergeleitet werden kann.

Die Ecken des Sechsecks seien in der Reihenfolge der Verbindung P_1 bis P_6; P_1P_2 schneide P_4P_5 in S_1, P_2P_3 desgl. P_5P_6 in S_2, P_3P_4 endlich P_6P_1 in S_3. Nach Voraussetzung liegen $P_1P_3P_5$ in gerader Linie, ebenso $P_2P_4P_6$. Der Schnittpunkt M der beiden Geraden liegt mit S_1S_2 in gerader Linie. Zu beweisen ist, daſs $S_1S_2S_3$ in gerader Linie liegen.

1) § 35, S. 76f. Ein wesentlicher Schritt zum Beweise des Satzes ist schon von Herrn Wiener im Jahresbericht **1**, 45—48; **3**, 70—80 der Deutschen Mathematiker-Vereinigung gethan, und zwar durch den Nachweis, daſs der projektive Fundamentalsatz aus dem Desarguesschen und dem Pascalschen hergeleitet werden kann.

Die Dreiecke $P_1P_2P_3$, $P_4P_5P_6$ schneiden sich mit den homologen Seiten in S_1 bezw. S_2 und M. Diese drei liegen in einer Geraden. Somit gehen die Geraden P_1P_4, P_2P_5, P_3P_6 durch einen Punkt. Danach liegen die Dreiecke $P_5P_6P_1$, $P_2P_3P_4$ perspektiv, die Schnittpunkte der homologen Seiten sind S_2, S_3, M.

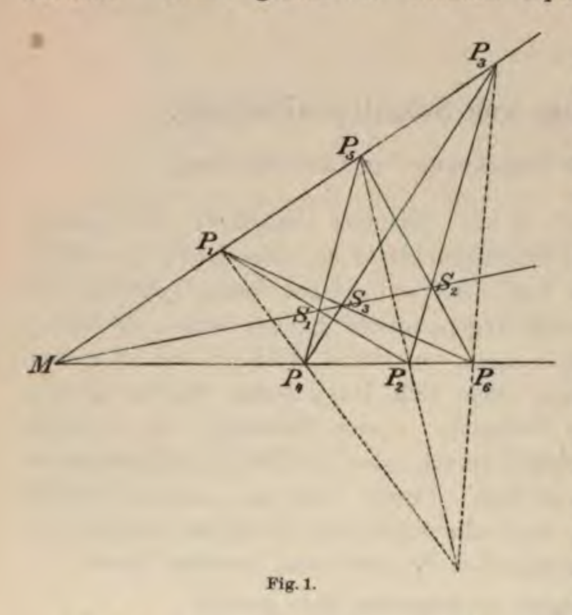


Fig. 1.

Diese liegen in einer Geraden, mithin auch S_1, S_2, S_3, w. z. b. w. —

3. Es ist nun vielleicht nicht ohne Interesse, umgekehrt einen speziellen Fall des Desarguesschen Satzes kennen zu lernen, der sich aus dem Pascalschen Satz beweisen läfst. Er lautet:

II. Liegen zwei Dreiecke perspektivisch, *und geht die Verbindungsgerade zweier nicht homologen Punkte mit den Gegenseiten derselben durch einen Punkt*, so schneiden sich die homologen Seiten in Punkten einer Geraden.

Läfst man den kursiven Zusatz fort, so hat man den Desarguesschen Satz. Es bleibt also noch zu zeigen, wie sich die Figur aus dem Pascalschen Satz herleiten läfst.

Die Dreiecke seien $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$. Nach Voraussetzung schneiden sich A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 in einem Punkte S, ferner A_3B_1, A_2A_1, B_3B_2 in einem Punkte M. Die Schnittpunkte von A_1A_2 mit B_1B_2, A_2A_3 mit B_2B_3, A_3A_1 mit B_3B_1 seien bezüglich C_3, C_1 und C_2. Endlich bezeichne N den Schnittpunkt von A_2A_3 mit B_1B_2. Es ist zu zeigen, dafs C_1, C_2, C_3 in gerader Linie liegen.

Das Sechseck

$$MA_2A_3SB_1B_2M$$

ist in der angeschriebenen Reihenfolge der Ecken ein Pascalsches, da M, A_3, B_1 sowohl wie A_2, S, B_2 in gerader Linie liegen. Die Schnittpunkte A_1, N und B_3 der Gegenseitenpaare liegen mithin ebenfalls in gerader Linie.

Nunmehr bilden die Punkte

$$NB_1B_3MA_1A_3N$$

in der angeschriebenen Reihenfolge ein Pascalsches Sechseck, da N, B_3, A_1, wie eben gezeigt, und B_1, M, A_3 nach Voraussetzung in gerader Linie liegen. Die Schnittpunkte der Gegenseitenpaare sind C_3, C_2, C_1, liegen also in gerader Linie.

4. Der soeben bewiesene Satz II ist von wesentlich anderem Charakter als Satz I, *da die in ihm enthaltenen Pascalschen Sechsecke allgemeine sind*, d. h. nicht zu denjenigen speziellen gehören, die mit Hülfe des Desarguesschen Satzes konstruiert werden können.

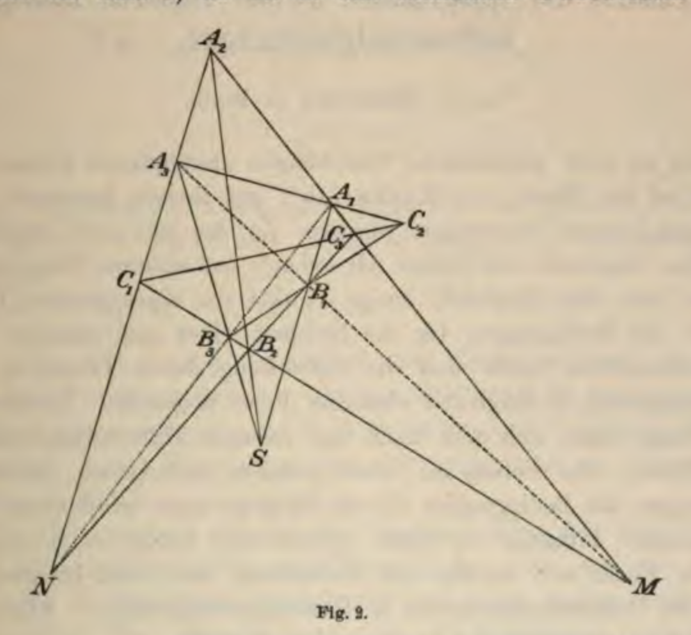


Fig. 2.

5. Im Widerspruch mit der — unzutreffenden — Behauptung Bolzanos, wonach jeder Satz nur auf *eine* Weise bewiesen werden kann, hat Herr Hilbert für den Pascalschen Satz zwei wesentlich verschiedene Beweise angegeben.[1]) Da ferner der Desarguessche und der Pascalsche Satz unter wesentlich verschiedenen Bedingungen beweisbar sind, so folgt, dafs die Zurückführung der beiden hier angegebenen Sätze auf die Axiome der Geometrie *drei* wesentlich verschiedene Beweise für jeden ergeben würde.

Charlottenburg, im Mai 1901.

1) l. c. § 14, S. 28; § 31, S. 71.

Zur Theorie der Resultanten zweier linearen homogenen Differentialgleichungen.

Von L. HEFFTER in Bonn.

Die an zwei algebraische Gleichungen anknüpfende Eliminationstheorie ist von Herrn von Escherich[1]) auf lineare homogene Differentialgleichungen übertragen worden. Zu der aus zwei solchen zu bildenden *Resultante* bin später ich selbst[2]) auf anderem Wege gelangt. Sodann habe ich kürzlich[3]) einige Punkte der algebraischen Theorie, nämlich die Bedingungen für die Existenz eines gemeinsamen Teilers von bestimmtem Grade und die Aufstellung dieses Teilers in Determinantengestalt, in möglichst einfacher Form abgeleitet. Gerade diese Behandlung läſst sich nun auch bei linearen Differentialgleichungen durchführen. Sie liefert bei zwei linearen homogenen Differentialgleichungen die Bedingungen für die Existenz einer bestimmten Anzahl gemeinsamer Integrale in einer anscheinend bisher noch nicht bemerkten Form und sodann die Aufstellung des diese Integrale enthaltenden Differentialausdrucks in Determinantengestalt — Alles genau analog den entsprechenden algebraischen Formeln.

Des Zusammenhangs wegen sei es gestattet, in No. **1** einige Punkte kurz in Erinnerung zu bringen, obwohl sie wesentlich ebenso schon bei Herrn von Escherich stehen. No. **2**, **3**, **4** enthalten die vorstehend angedeuteten Resultate, No. **5** endlich ein Beispiel.

1. *Resultante zweier linearen homogenen Differentialausdrücke.* — Seien

$$(1) \qquad P(y) \equiv p_0 y^{(\nu)} + p_1 y^{(\nu-1)} + \cdots + p_\nu y = 0,$$

$$(2) \qquad Q(y) \equiv q_0 y^{(n)} + q_1 y^{(n-1)} + \cdots + q_n y = 0$$

---

1) Denkschriften der Kais. Akad. d. Wissensch. Wien, Math. Nat. Kl. **46** (1883).

2) Crelles Journ. **116** (1896), 157ff.

3) Math. Ann. **54** (1901), 541ff.

zwei lineare homogene Differentialgleichungen,

$$y_1, y_2, \ldots, y_\nu \quad \text{und} \quad \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$$

bezw. je ein Fundamentalsystem von (1) und (2). Beide Gleichungen haben dann und nur dann ein Integral gemein, wenn die Determinante

$$(3) \qquad S \equiv \begin{vmatrix} y_1^{(n+\nu-1)}, & y_1^{(n+\nu-2)}, & \ldots, & y_1', & y_1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ y_\nu^{(n+\nu-1)}, & y_\nu^{(n+\nu-2)}, & \ldots, & y_\nu', & y_\nu \\ \eta_1^{(n+\nu-1)}, & \eta_1^{(n+\nu-2)}, & \ldots, & \eta_1', & \eta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \eta_n^{(n+\nu-1)}, & \eta_n^{(n+\nu-2)}, & \ldots, & \eta_n', & \eta_n \end{vmatrix}$$

identisch verschwindet. Denn, ist dies der Fall, so sind nach bekanntem Satze die $n+\nu$ Funktionen linear abhängig; d. h. es besteht eine Relation

$$c_1 y_1 + \cdots + c_\nu y_\nu + C_1 \eta_1 + \cdots + C_n \eta_n \equiv 0,$$

worin weder alle c noch alle C Null sein können, da sonst die y oder die η kein Fundamentalsystem wären. Also ist dann ein Integral von (1) gleich einem solchen von (2). Und ist umgekehrt letzteres der Fall, so sind die $n+\nu$ Funktionen linear abhängig, also die Determinante S identisch Null.

Die Determinante S ist in der Algebra analog dem Produkt sämtlicher Differenzen zwischen den Wurzeln der einen und der anderen der beiden algebraischen Gleichungen und zeigt ebenso evident wie dieses durch ihr Verschwinden das Vorhandensein gemeinsamer Lösungen an. Wie dort in der Algebra streben wir aber auch hier nach einer Bedingung, die sich nicht in den *Lösungen*, sondern in den *Koeffizienten* der vorgelegten Gleichungen ausdrückt. Diese erhalten wir entweder ohne Benutzung der Determinante S sehr einfach so, wie es in der zitierten Arbeit (Crelle **116**) geschehen ist, oder — ziemlich genau — nach Herrn von Escherich (a. a. O.) in folgender Art, wobei gleich der Zusammenhang zwischen der neuen Bedingung und S hervortritt.

Durch λ-fache Differentiation nach der unabhängigen Variabeln x werde aus (1) und (2)

$$(4) \quad P^{(\lambda)}(y) \equiv p_{0\lambda} y^{(\nu+\lambda)} + p_{1\lambda} y^{(\nu+\lambda-1)} + \cdots + p_{\nu+\lambda-1,\lambda} y' + p_{\nu+\lambda,\lambda} y,$$

$$(5) \quad Q^{(\lambda)}(y) \equiv q_{0\lambda} y^{(n+\lambda)} + q_{1\lambda} y^{(n+\lambda-1)} + \cdots + q_{n+\lambda-1,\lambda} y' + q_{n+\lambda,\lambda} y.$$

$$(\lambda = 1, 2, 3, \ldots).$$

Dann ist

$$(6)\qquad R \equiv \left|\begin{array}{llll} p_{0,\,n-1}, & p_{1,\,n-1}, & \ldots, & p_{n+\nu-1,\,n-1} \\ 0, & p_{0,\,n-2}, & \ldots, & p_{n+\nu-2,\,n-2} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0, & 0, & \ldots p_0, & p_1, \ldots, p_\nu \\ q_{0,\,\nu-1}, & q_{1,\,\nu-1}, & \ldots, & q_{\nu+n-1,\,\nu-1} \\ 0, & q_{0,\,\nu-2}, & \ldots, & q_{\nu+n-2,\,\nu-2} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0, & 0, & \ldots q_0, & q_1, \ldots, q_n \end{array}\right| \begin{array}{l} \left.\right\} n \text{ Zeilen}^{1)} \\ \\ \left.\right\} \nu \text{ Zeilen} \end{array}$$

die Resultante von P und Q; denn sie unterscheidet sich von S nur durch einen nicht identisch verschwindenden Faktor. Aus den bei Herrn von Escherich (a. a. O. No. II) ausgeführten Umformungen von S und R folgt nämlich unmittelbar

$$(7)\qquad R = p_0^n \cdot q_0^\nu \cdot e^{\int \frac{p_1}{p_0} dx} \cdot e^{\int \frac{q_1}{q_0} dx} \cdot S.$$

Somit ist auch das identische Verschwinden von R notwendig und hinreichend für die Existenz gemeinsamer Integrale von (1) und (2) oder — mit anderen Worten — *für die Existenz eines gemeinsamen Teilers der beiden Differentialausdrücke P und Q.*

Die Resultante R wird also gebildet, indem genommen werden als erste Zeile die Koeffizienten von $P^{(n-1)}(y)$, als zweite die von $P^{(n-2)}(y)$, denen eine Null vorangeht, u. s. w., als $n$te die Koeffizienten $P(y)$ selbst, denen $n-1$ Nullen vorangehen; dann folgen ν Zeilen, die entsprechend aus $Q(y)$ und seinen Ableitungen gebildet sind.

2. *Umformung der Resultante zweier Differentialausdrücke mit gemeinsamem Teiler.* — Die beiden Differentialausdrücke R und Q mögen nun einen gemeinsamen Teiler von der Ordnung λ haben, d. h. es sei

$$(8)\qquad P \equiv \bar{P}T(y) \quad \text{und} \quad Q \equiv \bar{Q}T(y),$$

wo

$$(9)\qquad \begin{cases} T(y) \equiv t_0 y^{(\lambda)} + t_1 y^{(\lambda-1)} + \cdots + t_\lambda y, \\ \bar{P}(y) \equiv \bar{p}_0 y^{(\nu-\lambda)} + \bar{p}_1 y^{(\nu-\lambda-1)} + \cdots + \bar{p}_{\nu-\lambda} y, \\ \bar{Q}(y) \equiv \bar{q}_0 y^{(n-\lambda)} + \bar{q}_1 y^{(n-\lambda-1)} + \cdots + \bar{q}_{n-\lambda} y. \end{cases}$$

Dann kann man die Resultante R von P und Q statt direkt, wie oben angegeben, auch in zwei Schritten so bilden, dafs man zunächst $T(y)$ durch

1) Diese Determinante ist, abgesehen von der Bezeichnung der Koeffizienten, identisch mit der Determinante R bei v. Escherich (a. a. O.) und unterscheidet sich von der Determinante $\varDelta$ (Crelle **116**, 159), abgesehen von der Bezeichnung der Koeffizienten, nur durch Transposition und Umstellung von Parallelreihen.

$y^{(\lambda)}$ ersetzt und das quadratische System der Koeffizienten von $y^{(n+\nu-1)}$, $y^{(n+\nu-2)}, \ldots, y', y$ in $\overline{P}(y^{(\lambda)})$ und $\overline{Q}(y^{(\lambda)})$ und in ihren Ableitungen bis zur $(n-1)$ten, bezw. $(\nu-1)$ten aufschreibt, wobei die λ letzten Kolonnen nur Nullen enthalten. Die Determinante dieses Systems ist die Resultante von $\overline{P}(y^{(\lambda)})$ und $\overline{Q}(y^{(\lambda)})$ in Bezug auf y:

$$(10)\ \overline{R} \equiv \left|\begin{array}{llll} \bar{p}_{0,\,n-1}, & \bar{p}_{1,\,n-1}, & \ldots, \bar{p}_{n+\nu-\lambda-1,\,n-1}, & 0, \ldots, 0 \\ 0, & \bar{p}_{0,\,n-2}, & \ldots, \bar{p}_{n+\nu-\lambda-2,\,n-2}, & 0, \ldots, 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots\ \cdot & \cdot\ \cdots\ \cdot \\ 0, & 0, & \ldots, \bar{p}_0, \bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_{\nu-\lambda}, & 0, \ldots, 0 \\ \bar{q}_{0,\,\nu-1}, & \bar{q}_{1,\,\nu-1}, & \ldots, \bar{q}_{\nu+n-\lambda-1,\,\nu-1}, & 0, \ldots, 0 \\ 0, & \bar{q}_{0,\,\nu-2}, & \ldots, \bar{q}_{\nu+n-\lambda-2,\,\nu-2}, & 0, \ldots, 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots\ \cdot & \cdot\ \cdots\ \cdot \\ 0, & 0, & \ldots, \bar{q}_0, \bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_{n-\lambda}, & \underbrace{0, \ldots, 0}_{\lambda \text{ Kolonnen.}} \end{array}\right| \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n \text{ Zeilen} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \nu \text{ Zeilen} \end{array}$$

Nunmehr denken wir uns in jenen Gleichungen, deren Koeffizienten das System von $\overline{R}$ bilden, wieder $y^{(\lambda)}$ durch $T(y)$ ersetzt, also

$$(11)\quad \begin{cases} y^{(n+\nu-1)} & \text{durch} \quad T(y)^{(n+\nu-\lambda-1)}, \\ y^{(n+\nu-2)} & \quad\text{„} \qquad T(y)^{(n+\nu-\lambda-2)}, \\ \cdot & \quad\ \cdot \qquad\quad \cdot \\ y^{(\lambda+1)} & \quad\text{„} \qquad T'(y), \\ y^{(\lambda)} & \quad\text{„} \qquad T(y), \end{cases}$$

d. h. wir machen in jenen $n+\nu$ linearen Gleichungen zwischen $y^{(n+\nu-1)}, \ldots, y', y$ die durch (11) angedeutete lineare homogene Substitution. Also erhalten wir das Koeffizientensystem, das wir für R brauchen, durch Komposition der Zeilen von $\overline{R}$ mit den Kolonnen der rechten Seite von (11), nachdem diesem System noch λ Zeilen mit Nullen hinzugefügt sind, weil $y^{(\lambda-1)}, \ldots, y', y$ links in (11) nicht vorkommen. Also ist, wenn wir mit $\{R\}$ das System der Determinante R bezeichnen u. s. w.,

$$(12)\quad \{R\} = \{\overline{R}\} \cdot \left\{\begin{array}{lll} t_{0,\,n+\nu-\lambda-1}, & t_{1,\,n+\nu-\lambda-1}, & \ldots, t_{n+\nu-1,\,n+\nu-\lambda-1} \\ 0, & t_{0,\,n+\nu-\lambda-2}, & \ldots, t_{n+\nu-2,\,n+\nu-\lambda-2} \\ \cdot & \cdot & \cdots\ \cdot \\ 0, & 0, & \ldots, t_0, t_1, \ldots, t_\lambda \\ 0, & 0, & \ldots, 0, 0, \ldots, 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots\ \cdot\ \ \cdot\ \cdots\ \cdot \\ 0, & 0, & \ldots, 0, 0, \ldots, 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} (\lambda \text{ Zeilen}) \end{array}$$

wobei die *Zeilen* von $\{\overline{R}\}$ mit den *Kolonnen* des zweiten Systems rechts zu komponieren sind.

Da nun

$$t_{0,\,n+\nu-\lambda-1} = t_{0,\,n+\nu-\lambda-2} = \cdots = t_{0,\,1} = t_0$$

und in dem t-System in (12) links unter der Hauptdiagonale nur Nullen stehen, so ergiebt sich aus (12) für R selbst *die Umformung*

$$R = \overline{R} \cdot t_0^{n+\nu-\lambda}, \tag{13}$$

die dadurch zustande kommt, dafs nur die mit geeigneten (aus dem t-System abzulesenden) Faktoren multiplizierten Kolonnen von weiter rechts stehenden Kolonnen subtrahiert werden.

Mit anderen Worten: *Die Resultante von $P \equiv \overline{P}T(y)$ und $Q \equiv \overline{Q}T(y)$ ist bis auf einen nicht identisch verschwindenden Faktor in die Resultante von $\overline{P}(y^{(\lambda)})$ und $\overline{Q}(y^{(\lambda)})$, deren λ letzte Kolonnen nur Nullen enthalten, zu transformieren.*

3. *Bedingungen für die Existenz eines gemeinsamen Teilers genau von der Ordnung λ.* — Durch die vorstehende Umformung der Resultanten von $\overline{P}T$ und $\overline{Q}T$ ist zunächst aufs neue bewiesen, dafs die Resultante von P und Q bei Vorhandensein eines gemeinsamen Teilers identisch verschwindet. Wir können aus (13) aber auch die Bedingungen für das Vorhandensein eines Teilers genau λter Ordnung herleiten.

Mit $R_\varrho (\varrho = 1, 2, \ldots)$ bezeichnen wir die Unterdeterminante von R, die aus R durch Streichung der ϱ letzten und ϱ ersten Kolonnen, der ϱ ersten p-Zeilen und ϱ ersten q-Zeilen entsteht[1]), mit $\overline{R}_\varrho$ die entsprechende Unterdeterminante von $\overline{R}$. Aus (12) folgt direkt, dafs R_ϱ ganz ebenso in $\overline{R}_\varrho$ umgeformt wird, wie man in (13) von R zu $\overline{R}$ überging, d. h. es folgt die Relation

$$R_\varrho = \overline{R}_\varrho \cdot t_0^{n+\nu-\lambda-\varrho}. \tag{14}$$

Nimmt man nun $\varrho = \lambda$, so ist also

$$R_\lambda = \overline{R}_\lambda \cdot t_0^{n+\nu-2\lambda}. \tag{14a}$$

$\overline{R}_\lambda$ ist aber gerade die Resultante von $\overline{P}(y)$ und $\overline{Q}(y)$, deren iden-

1) Diese Definition der Unterdeterminante R_ϱ ist *völlig* analog wie in der Algebra; denn wenn man dort gewöhnlich R_ϱ aus R durch Streichung der 2ϱ letzten Kolonnen, der ϱ letzten p- und ϱ letzten q-Zeilen bildet, so kommt das bei dem Bau der *algebraischen* Resultante R auf dasselbe hinaus, als wenn man die oben beschriebene Operation benutzt.

tisches Verschwinden also die charakteristische Bedingung dafür ist, dafs $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ noch einen gemeinsamen Teiler besitzen. Dies ist aber wiederum charakteristisch dafür, dafs P und Q selbst einen Teiler höherer als λter Ordnung gemein haben. Also haben wir das Resultat:

Die charakteristischen Bedingungen dafür, dafs $P(y)$ und $Q(y)$ einen gemeinsamen Teiler genau λter Ordnung oder die Gleichungen (1) *und* (2) *genau λ linear unabhängige Integrale gemein haben, lauten:*

$$(15) \qquad R \equiv 0,\ R_1 \equiv 0,\ \ldots,\ R_{\lambda-1} \equiv 0;\ R_\lambda \mathrel{\equiv\!\!\!\!|}\, 0.$$

4. *Determinantenform des gröfsten gemeinsamen Teilers zweier linearen Differentialausdrücke.* — Bei P und Q seien jetzt die Bedingungen erfüllt, dafs sie einen gemeinsamen Teiler genau λter Ordnung haben. Es ist also

$$R_\lambda = \overline{R}_\lambda \cdot t_0^{n+\nu-2\lambda} \neq 0.$$

Durch Multiplikation mit y, die rechts in der letzten Kolonne von $\overline{R}_\lambda$ ausgeführt werden soll, folgt

$$(16)\quad R_\lambda \cdot y = t_0^{n+\nu-2\lambda} \left|\begin{array}{llll} \bar p_{0,\,n-\lambda-1}, & \bar p_{1,\,n-\lambda-1}, & \ldots, & \bar p_{n+\nu-2\lambda-1,\,n-\lambda-1}\cdot y \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0, & 0, \ldots, & \bar p_0, \bar p_1, \ldots, & \bar p_{\nu-\lambda} \cdot y \\ \bar q_{0,\,\nu-\lambda-1}, & \bar q_{1,\,\nu-\lambda-1}, & \ldots, & \bar q_{\nu+n-2\lambda-1,\,\nu-\lambda-1}\cdot y \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0, & 0, \ldots, & \bar q_0, \bar q_1, \ldots, & \bar q_{n-\lambda} \cdot y \end{array}\right| \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\\a\end{array}}\right\} n-\lambda \text{ Zeilen} \\ \left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\\a\end{array}}\right\} \nu-\lambda \text{ Zeilen} \end{array}$$

Addiert man rechts die bezw. mit $y^{(n+\nu-2\lambda-1)}$, $y^{(n+\nu-2\lambda-2)}$, $\ldots$, y' multiplizierte erste, zweite, u. s. w. vorletzte Kolonne zur letzten, so steht in dieser der Reihe nach von oben nach unten

$$\overline{P}^{(n-\lambda-1)}(y),\ \overline{P}^{(n-\lambda-2)}(y),\ \ldots,\ \overline{P}'(y),\ \overline{P}(y),\ \overline{Q}^{(\nu-\lambda-1)}(y),\ \overline{Q}^{(\nu-\lambda-2)}(y),\\ \ldots,\ \overline{Q}'(y),\ \overline{Q}(y).$$

Ersetzt man jetzt noch in (16) y durch $T(y)$, so geht die letzte Kolonne rechts über in

$$P^{(n-\lambda-1)}(y),\ P^{(n-\lambda-2)}(y),\ \ldots,\ P'(y),\ P(y),\ Q^{(\nu-\lambda-1)}(y),\ \ldots,\ Q'(y),\ Q(y).$$

Aber auch in den anderen Kolonnen der Determinante können wir wieder zu den gegebenen Koeffizienten von P und Q selbst zurückkehren, indem wir die vorletzte Kolonne mit t_0 multiplizieren und zu ihr die mit geeigneten Faktoren multiplizierten vorhergehenden Kolonnen addieren, dann mit der drittletzten Kolonne ebenso verfahren, u. s. w., kurz indem wir die vorher vollzogene Umformung, die von R_λ

zu $\bar{R}_\lambda$ führte, zurückbilden. Dabei bleibt rechts der Faktor t_0 übrig, durch den wir noch dividieren, sodaſs der links stehende größte gemeinsame Teiler von P und Q als Koeffizienten von $y^{(\lambda)}$ gerade R_λ hat:

$$(17)\quad R_\lambda \frac{T(y)}{t_0} = \begin{vmatrix} p_{0,\,n-\lambda-1}, & p_{1,\,n-\lambda-1}, & \ldots, & p_{n+\nu-2\lambda-2,\,n-\lambda-1}, & P^{(n-\lambda-1)}(y) \\ 0, & p_{0,\,n-\lambda-2}, & \ldots, & p_{n+\nu-2\lambda-3,\,n-\lambda-2}, & P^{(n-\lambda-2)}(y) \\ . & . & \ldots & . & . \\ 0, & 0, & \ldots, & p_0, p_1, \ldots, p_{\nu-\lambda-1}, & P(y) \\ q_{0,\,\nu-\lambda-1}, & q_{1,\,\nu-\lambda-1}, & \ldots, & q_{\nu+n-2\lambda-2,\,\nu-\lambda-1}, & Q^{(\nu-\lambda-1)}(y) \\ 0, & q_{0,\,\nu-\lambda-2}, & \ldots, & q_{\nu+n-2\lambda-3,\,\nu-\lambda-2}, & Q^{(\nu-\lambda-2)}(y) \\ . & . & \ldots & . & . \\ 0, & 0, & \ldots, & q_0, q_1, \ldots, q_{n-\lambda-1}, & Q(y) \end{vmatrix}$$

Diese Formel besagt:

Ist R_λ in der Reihe der Determinanten R, R_1, R_2, ... die erste nicht identisch verschwindende, so erhält man den alsdann vorhandenen gröſsten gemeinsamen Teiler λter Ordnung von P und Q, indem man in der Determinante R_λ die letzte Kolonne durch

$$P^{(n-\lambda-1)}(y),\ \ldots,\ P'(y),\ P(y),\ Q^{(\nu-\lambda-1)}(y),\ \ldots,\ Q'(y),\ Q(y)$$

ersetzt. Der höchste Koeffizient des so gebildeten gemeinsamen Teilers ist gleich R_λ.

5. *Beispiel.* — Vielleicht ist es erwünscht, die vorstehende allgemeine Entwickelung noch durch ein möglichst einfaches Beispiel illustriert zu sehen.

Sei $P \equiv x^2y'' + y' - (1 + x^2)y$, also

$$P' \equiv x^2y''' - (2x+1)y'' - (1+x^2)y' - 2xy;\quad Q \equiv y'' - y,$$

also $Q' \equiv y''' - y'$. Mithin ist

$$R \equiv \begin{vmatrix} x^2, & 2x+1, & -(1+x^2), & -2x \\ 0, & x^2, & 1, & -(1+x^2) \\ 1, & 0, & -1, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & -1 \end{vmatrix} \equiv 0,$$

wie sich durch Addition aller Kolonnen zur letzten ergiebt.

Durch Streichen der ersten und letzten Kolonne, der ersten und dritten Zeile erhält man

$$R_1 \equiv \begin{vmatrix} x^2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \equiv -1 \not\equiv 0.$$

Also haben P und Q einen Teiler erster Ordnung gemein und keinen höheren. Er ist

$$-\frac{T(y)}{t_0} \equiv \begin{vmatrix} x^2, & x^2y'' + y' - (1+x^2)y \\ 1, & y'' - y \end{vmatrix} \equiv - y' + y,$$

wobei der Koeffizient von y' gleich R_1 ist. In der That ist

$$P \equiv x^2(y'-y)' + (1+x^2)(y'-y), \quad Q \equiv (y'-y)' + (y'-y),$$

also

$$\overline{P} \equiv x^2y' + (1+x^2)y, \quad \overline{Q} \equiv y' + y.$$

Bonn, den 16. September 1901.

Sur la courbe équipotentielle;

Par M. F. Gomes Teixeira à Porto.

1. Le nom de *courbe équipotentielle* a été donné par Cayley, dans un important article publié dans le *Philosophical Magazine* (t. XIV, 1857), à la courbe représentée par l'équation, en coordonnées bipolaires,

$$\frac{m}{\varrho} + \frac{m'}{\varrho'} = \frac{k}{a}, \tag{1}$$

où m, m' et k représentent des quantités constantes données, et ϱ et ϱ' les distances des points de la courbe à deux foyers dont la distance est égale à a. Dans ce travail l'éminent géomètre détermine la forme générale des ovales qui constituent la courbe, et leur disposition par rapport aux foyers, pour les diverses valeurs de k, par des considérations presque intuitives, sans entrer en détails analytiques. Ici nous allons donner quelques indications sur une manière de faire la théorie analytique de la courbe, et en déduire quelques-unes de ses propriétés qui ne se trouvent pas dans le travail de Cayley.

2. En prenant pour origine des coordonnées un foyer et pour axe des abscisses la droite qui passe par l'autre, on a

$$\varrho^2 = x^2 + y^2, \quad \varrho'^2 = (x-a)^2 + y^2;$$

et, par conséquent, en éliminant x, y et ϱ' entre ces équations et (1),

$$x = \frac{(a^2+\varrho^2)(k\varrho - am)^2 - a^2 m'^2 \varrho^2}{2a(k\varrho - am)^2}, \tag{2}$$

$$y = \frac{k^2\sqrt{-(\varrho-\alpha_1)(\varrho-\alpha_2)\cdots(\varrho-\alpha_8)}}{2a(k\varrho - am)^2}, \tag{3}$$

où α_1, α_2, ..., α_8 représentent les racines des équations

$$\begin{cases} (\varrho - a)(k\varrho - am) - am'\varrho = 0, \\ (\varrho - a)(k\varrho - am) + am'\varrho = 0, \\ (\varrho + a)(k\varrho - am) - am'\varrho = 0, \\ (\varrho + a)(k\varrho - am) + am'\varrho = 0. \end{cases} \tag{4}$$

À l'égard de ces racines il convient de remarquer que celles de la première et des deux dernières sont réelles et inégales. Celles de la deuxième sont réelles quand on a

$$(k + m - m')^2 - 4km \gtreqless 0$$

ou

$$[k - (\sqrt{m} + \sqrt{m'})^2][k - (\sqrt{m} - \sqrt{m'})^2] \gtreqless 0,$$

et imaginaires dans le cas contraire; et par conséquent elles sont réelles et inégales quand $k > (\sqrt{m} + \sqrt{m'})^2$, et quand $k < (\sqrt{m} - \sqrt{m'})^2$, imaginaires quand k est compris entre ces deux valeurs, et égales quand $k = (\sqrt{m} + \sqrt{m'})^2$, et quand $k = (\sqrt{m} - \sqrt{m'})^2$.

3. Cela posé, supposons que les racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_8$ sont toutes réelles et inégales et que $\alpha_8 > \alpha_7 > \ldots > \alpha_1$. Dans ce cas y est réelle quand ϱ est compris entre α_8 et α_7, ou entre α_6 et α_5, ou entre α_4 et α_3, ou entre α_2 et α_1, et imaginaire dans les autres cas. La courbe est donc composée de *quatre ovales*, symétriques par rapport à l'axe des abscisses et qui coupent cet axe.

En déterminant au moyen de l'équation (2) les valeurs de x qui correspondent aux valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_8$ données à ϱ, on pourrait trouver, en chaque cas particulier, la disposition des ovales par rapport aux foyers; mais on n'en a pas besoin, parce que cela résulte immédiatement de l'analyse de Cayley.

Nous allons déterminer les points des ovales où la tangente est parallèle ou perpendiculaire à l'axe. Pour cela, employons la formule

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k^2[F'(\varrho)(k\varrho - am) - 4kF(\varrho)]}{4\varrho[(k\varrho - am)^2 + a^2mm'^2]\sqrt{F(\varrho)}},$$

où

$$F(\varrho) = -(\varrho - \alpha_1)(\varrho - \alpha_2)\ldots(\varrho - \alpha_8);$$

afin de déterminer les valeurs que ϱ prend dans les points où la tangente est parallèle à l'axe de la courbe, on en tire l'équation

$$F'(\varrho)(k\varrho - am) - 4kF(\varrho) = 0,$$

qui est du huitième degré par rapport à ϱ. A l'égard du nombre de ces points nous remarquons que, la fonction $F'(\varrho)$ étant négative pour $\varrho = \alpha_8, \alpha_6, \alpha_4, \ldots, \alpha_2$, et positive pour $\varrho = \alpha_7, \alpha_5, \ldots, \alpha_3, \alpha_1$, le premier membre de cette équation change six fois de signe, quand on donne à ϱ les valeurs $\alpha_8, \alpha_7, \alpha_6, \ldots, \alpha_1$. Donc des deux côtés de l'axe chaque ovale a seulement un point où la tangente est parallèle à cet axe, à l'exception d'une qui peut en avoir un ou trois.

La tangente est perpendiculaire à l'axe dans les points qui correspondent aux valeurs de ϱ données par l'équation

$$(k\varrho - am)^3 + a^3 mm'^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \varrho = \frac{am - a\sqrt[3]{mm'^2}}{k}.$$

A ces valeurs de ϱ correspondent deux points, placés symétriquement par rapport à l'axe de la courbe et qui sont réels quand ϱ est compris dans un des intervalles $(\alpha_8, \alpha_7), (\alpha_6, \alpha_5), \ldots, (\alpha_2, \alpha_1)$.

4. On étudie de la même manière le cas où deux des racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_8$ sont imaginaires. Alors la courbe est composée seulement de trois ovales.

Si deux des racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_8$ sont égales, la courbe est composée de quatre ovales, mais deux d'entre elles ont un point commun placé sur l'axe. Dans ce point on a

$$\varrho = \frac{a\sqrt{m}}{\sqrt{m} + \sqrt{m'}},$$

si $k = (\sqrt{m} + \sqrt{m'})^2$, et

$$\varrho = \frac{a\sqrt{m}}{\sqrt{m} - \sqrt{m'}},$$

si $k = (\sqrt{m} - \sqrt{m'})^2$.

5. Les points qu'on détermine en coupant la courbe par une transversale quelconque, jouissent de quelques propriétés qui, à ce que je crois, n'ont pas encore été remarquées.

Soit

$$Ax + By + C = 0$$

l'équation de la transversale considérée. Elle coupe la courbe en huit points où ϱ prend les valeurs données par l'équation suivante, qui résulte de l'élimination de x et de y entre ladite équation et les équations (2) et (3):

$$A[(a^2 + \varrho^2)(k\varrho - am)^2 - a^2 m'^2 \varrho^2] + Bk^2\sqrt{F(\varrho)} + 2aC(k\varrho - am)^2 = 0,$$

ou

$$B^2 k^4 F(\varrho) - \{(k\varrho - am)^2[2aC + A(a^2 + \varrho^2)] - a^2 m'^2 \varrho^2\}^2 = 0,$$

ou

$$k^4(A^2 + B^2)\varrho^8 - 4amk^3(A^2 + B^2)\varrho^7 + \cdots + a^4 m^4[B^2 a^4 + (2aC + Aa^2)^2] = 0.$$

Cette équation fait voir que la somme des distances $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_8$ des points où la droite coupe la courbe, au foyer qu'on a pris pour origine des coordonnées, satisfait à la condition

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_8 = 4\frac{am}{k}.$$

On voit aussi que la somme des distances ϱ_1', ϱ_2', ... des mêmes points à l'autre foyer satisfait à la condition

$$\varrho_1' + \varrho_2' + \cdots + \varrho_8' = -4\frac{am'}{k}.$$

On en conclut que *la somme des distances entre les points où une transversale quelconque coupe la courbe et un foyer est constante.*

On voit, au moyen de la même équation, qu'on a

$$(5) \qquad \varrho_1\varrho_2 \cdots \varrho_8 = \frac{a^6m^4}{k^4}\left[a^2 + 4\,\frac{C(C+Aa)}{A^2+B^2}\right].$$

En posant $C=0$, le produit des distances à l'origine des points où les transversales passant par ce point coupent la courbe, satisfait à la condition

$$(6) \qquad \varrho_1\varrho_2 \cdots \varrho_8 = \frac{a^8m^4}{k^4}.$$

De la même manière on trouve, pour les transversales qui passent par l'autre foyer,

$$\varrho_1'\varrho_2' \cdots \varrho_8' = \frac{a^8m'^4}{k^4}.$$

On en conclut que le *produit des distances à un foyer des points où une transversale quelconque passant par ce foyer, coupe la courbe est constant.*

Mais ce n'est pas ce corollaire de l'équation (5) qu'il y a intérêt à considérer ici, parce qu'il est un cas particulier d'un théorème général connu, applicable à toutes les courbes cycliques. Ce qu'il nous convient de considérer, résulte en posant dans cette équation

$$C + Aa = 0.$$

L'équation de la droite considérée prend la forme

$$A(x-a) + By = 0,$$

et on voit qu'elle passe par le foyer $(a, 0)$. Et, ayant égard à l'équation (6), on conclut que le *produit des distances à un foyer des points où les transversales, qui passent par l'autre, coupent la courbe, est constant.*

Porto (Portugal), août, 1901.

Weiterer Beitrag zur verallgemeinerten Rösselsprungaufgabe.

Von F. Fitting in München-Gladbach.

In einer früheren Abhandlung[1]), die sich mit folgender Aufgabe beschäftigte:

Man zeichne n Punkte und bilde durch Fortschreiten von einem dieser Punkte zu allen übrigen, wobei keiner doppelt berührt werden darf, „Wege“ mit der Einschränkung, daſs eine Reihe von „Wegelementen“, d. h. Sprüngen zwischen gewissen Punkten verboten sein soll. Wieviel solche Wege giebt es?

hatte sich Verfasser von dem Gedanken leiten lassen, zum Ausgangspunkt der Betrachtung jenen Fall zu nehmen, wo verbotene Sprünge nicht vorhanden sind, und deshalb $n!$ von einander verschiedene Wege gezählt werden. Durch successives Ausschlieſsen gewisser „Elementenpaare“, unter welchem Namen die durch zwei Punkte A und B gegebenen, in ihrer Richtung entgegengesetzten Wegelemente AB und BA zusammengefaſst wurden, sollten daraus allmählich die komplizierteren Fälle abgeleitet werden.

Der Gedanke erwies sich als fruchtbar, insofern es gelang, eine Reihe von allgemein geltenden Rekursionsformeln aufzustellen, deren Zahl hier noch vermehrt werden soll, um sodann ihre Brauchbarkeit zur Bewältigung speziellerer Aufgaben zu zeigen.

Es entspricht dem zu Grunde gelegten Gedanken am besten, wenn die *verbotenen* Sprünge durch Gerade, mit denen man die betreffenden Punkte verbindet, kenntlich gemacht werden.

Die in jedem besonderen Falle vorliegende Anordnung von Punkten und Geraden wurde im Hinblick auf die dadurch gegebenen Wege ein „*Wegkomplex*“ genannt.

Die Zahl der Punkte eines Komplexes ist durchgehends n, wenn nichts anderes ausdrücklich gesagt wird.

---

1) Über eine Verallgemeinerung der Rösselsprungaufgabe. Zeitschr. für Math. u. Physik (Schlömilch). 45 Jahrg. Heft 2 u. 3.

Die Summe sämtlicher Wege eines gegebenen Komplexes hieſs die *Wegezahl des Komplexes.*

Erster Teil.

1. *Haupt-Rekursionsformel.* — Tilgt man zwischen n unverbundenen Punkten a Elementenpaare durch Einzeichnung von ebensovielen Geraden in beliebig gewählter Anordnung, so wurde (Kap. III der früheren Abhandlg.) durch $W_{(n,a)}$ die Wegezahl des entstandenen Komplexes bezeichnet,

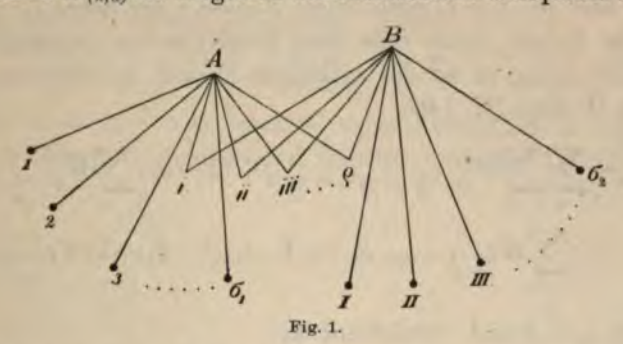


Fig. 1.

der in der Folge auch kurz Komplex $W_{(n,a)}$ genannt werden mag. Faſst man ferner ein etwa durch Δ zu kennzeichnendes, bestimmtes Elementenpaar dieses Komplexes ins Auge, so läſst sich die Anzahl $W^{\Delta}_{(n,a)}$ [1]) aller Wege des Komplexes, in denen Wegelemente dieses Paares enthalten sind, durch Wegezahlen anderer Komplexe ausdrücken. Zur Aufstellung und zum Verständnis der Formel bedarf es einiger Figuren: von dem gedachten Komplexe brauchen nur die Endpunkte A und B des betrachteten Elementenpaares Δ und diejenigen Punkte gezeichnet zu werden, nach denen von A und B Gerade auslaufen — in Fig. 1 von A nach den Punkten 1, 2, $\cdots$, σ_1, von B nach den Punkten I, II, $\cdots$, σ_2 und von A und B zusammen nach ϱ anderen Punkten. Vereinigt man A und B zu einem Punkte C, wodurch ϱ Gerade verschwinden und Fig. 1 in Fig. 2 übergeht, so entsteht ein neuer Kom-

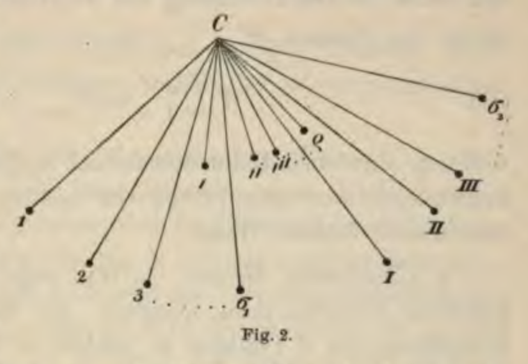


Fig. 2.

1) Das Zeichen $W^{\Delta}_{(n,a)}$ wurde hier an Stelle von $\overset{\Delta}{\varphi}_{(n,a)}$ der früheren Arbeit gesetzt.

plex, dessen Wegezahl durch $W_{(n-\underset{\Delta}{1},\, a-\varrho)}$ bezeichnet wurde. Drückt man noch durch die Zeichen

$$W(_{n-\underset{\Delta}{1}},\, a-\varrho-\overline{Ci});\quad W(_{n-\underset{\Delta}{1}},\, a-\varrho-\overline{Ck});\quad W(_{n-\underset{\Delta}{1}},\, a-\varrho-\overline{Ci}-\overline{Ck})$$ [1]

aus, dafs aus dem Komplexe, von welchem Fig. 2 einen Teil darstellt, entweder die Gerade von C nach einem Punkte i aus der Punktschar $1, \cdots, \sigma_1$, oder die von C nach einem Punkte k der Schar $\mathrm{I}, \cdots, \sigma_2$ oder zwei solche Gerade (ohne dafs diese Punkte selber verschwinden) getilgt werden sollen, so ist die wichtigste Formel der früheren Abhandlung (a. a. O. Kap. III, 146):

$$\text{(I)}\quad W^{\Delta}_{(n,\, a)} = \sum_{1\cdots\sigma_1}^{i}\sum_{\mathrm{I}\cdots\sigma_2}^{k} W_{(n-\underset{\Delta}{1},\, a-\varrho-\overline{Ci}-\overline{Ck})} + (1-\sigma_2)\sum_{1\cdots\sigma_1}^{i} W_{(n-\underset{\Delta}{1},\, a-\varrho-\overline{Ci})}$$
$$+(1-\sigma_1)\sum_{\mathrm{I}\cdots\sigma_2} W_{(n-\underset{\Delta}{1},\, a-\varrho-\overline{Ck})} + [(1-\sigma_1)(1-\sigma_2)+1]\, W_{(n-\underset{\Delta}{1},\, a-\varrho)},$$

welche für $\sigma_2 = 0$ sich vereinfacht zu:

$$\text{(I}^{\text{a}}\text{)}\qquad W^{\Delta}_{(n,\, a)} = \sum_{1\cdots\sigma_1}^{i} W_{(n-\underset{\Delta}{1},\, a-\varrho-\overline{Ci})} + (2-\sigma_1)\, W_{(n-\underset{\Delta}{1},\, a-\varrho)}.$$

Weiter verbinde man in Fig. 1 die Punkte A und B durch eine Gerade und führe zur Kennzeichnung der Wegezahl des neu entstandenen Komplexes das Zeichen $W_{(n+1,\, a)}^{\Delta}$ ein, so ist:

$$\text{(II)}\qquad W_{(n+1,\, a)}^{\Delta} = W_{(n,\, a)} - W^{\Delta}_{(n,\, a)},$$

wodurch eine erste Rekursionsformel aufgestellt ist, die für sich allein hinreichend wäre zur successiven Lösung des Problems, freilich auf sehr umständlichem Wege.

2. *Gleichartige Gerade.* — Will man an der Hand der eben abgeleiteten Formeln dazu schreiten, die Wege irgend eines gegebenen Komplexes von n Punkten zu zählen, so hat man zuerst dessen sämtliche Geraden zu tilgen, worauf man $n!$ Wege zählt, sie nacheinander wieder in die Figur einzutragen und für jeden der auftretenden Komplexe die zugehörige Wegezahl zu berechnen.

Es wird viel auf die dabei beobachtete Reihenfolge ankommen:

---

1) In der genannten früheren Arbeit wurde hier irrtümlicher Weise das Zeichen des Elementenpaares zur Kennzeichnung der wegzulassenden Geraden verwendet.

Verbindet man zuerst irgend einen von n noch unverbundenen Punkten mit a anderen durch Gerade, so findet sich bereits in der früheren Arbeit als Wegezahl des so gebildeten Komplexes:

$$2\binom{n-a}{2}(n-2)!$$

Dieselbe ist also hier eine *Funktion* der Geradenzahl.

Ist eine Wegezahl Funktion einer Zahl von Geraden ihres Komplexes, so wurden letztere *„gleichartige Gerade"* genannt.

So enthält z. B. Fig. 3 Büschel von je a, b, c, d gleichartigen Geraden.

Denkt man sich alle Geraden eines Komplexes in irgend einer Weise zu Gruppen gleichartiger Geraden geordnet, so sieht man:

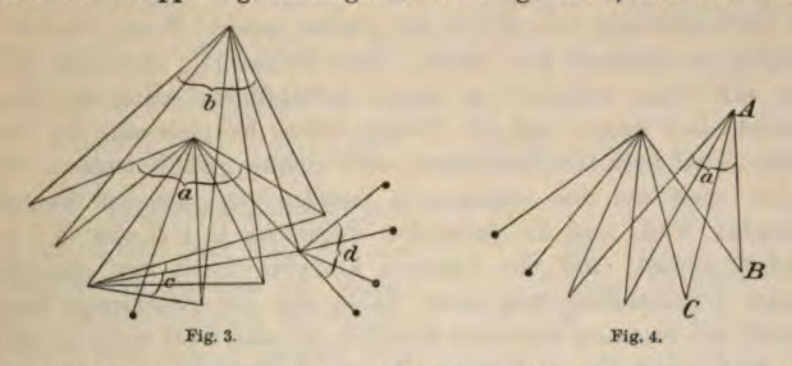


Fig. 3. Fig. 4.

Die Wegezahl irgend eines Komplexes ist eine Funktion seiner Punktezahl und der Anzahl gleichartiger Geraden, die in den verschiedenen Gruppen vorhanden sind.

3. *Rekursionsformeln für Büschel gleichartiger Geraden.* — Ein Komplex enthalte unter der Zahl seiner Geraden einen Büschel von a gleichartigen Geraden. Im folgenden wird die Wegezahl des Komplexes nur hinsichtlich ihrer Abhängigkeit von a betrachtet, kann daher $W_{(a)}$ geschrieben werden. Man denke sich jetzt die a Geraden jenes Büschels sämtlich aus dem Komplexe getilgt, so wird die Wegezahl $W_{(0)}$. Die Paare von Wegelementen, die so an Stelle der Geraden getreten sind, sollen Elementenpaare des Büschels heifsen. Nun werde auf folgende Weise $W_{(a)}$ wiederhergestellt: damit zunächst von den Wegen des Komplexes $W_{(a)}$ diejenigen ausgeschieden werden, in denen die Wegelemente des Büschels einzeln vorkommen, werde die Gesamtheit aller Wege, in denen irgend ein bestimmtes Elementenpaar des Büschels (z. B. AB in Fig. 4) auftritt, $W^{(1_a)}$ genannt. Von $W_{(0)}$ ist dann vorläufig sovielmal $W^{(1_a)}$ in Abzug zu bringen, als jenes Büschel Elementenpaare hat, also $a \cdot W^{(1_a)}$ mal. Man sieht aber leicht, dafs auf diese

Weise alle Wege, in denen noch ein zweites Elementenpaar des Büschels verwendet wird, doppelt abgezählt sind, während dies nur einmal zu geschehen hat, will man $W_{(a)}$ wiedererhalten. Nennt man $W^{(2_a)}$ die Summe aller Wege, in denen zwei bestimmte dieser Wegelemente (z. B. AB und AC in Fig. 4) beschritten werden, so hat man offenbar $\binom{a}{2} \cdot W^{(2_a)}$ Wege zuviel subtrahiert und mufs daher eine gleiche Zahl wieder addieren. So findet man die Formel:

$$\text{(III)} \qquad W_{(a)} = W_{(0)} - a \cdot W^{(1_a)} + \binom{a}{2} \cdot W^{(2_a)},$$

die auch bereits in der früheren Abhandlung (Kap. VI, p. 160), dort aber auf ganz anderem Wege, gewonnen worden war.

$W^{(1_a)}$ und $W^{(2_a)}$ lassen sich noch weiter reduzieren, und zwar fällt die Zurückführung von $W^{(1_a)}$ auf Zahlen solcher Wege, worin die Geraden des Büschels *ganz* fehlen, unter Formel (I), und auch $W^{(2_a)}$ läfst sich ohne weiteres auf solche zurückführen: denn an Fig. 4 übersieht man leicht, dafs alle Wege, welche beispielsweise die Wegstücke BAC oder CAB enthalten, auch richtig gezählt werden, wenn A mit allen von ihm ausgehenden Geraden ganz aus dem Komplex gestrichen wird, und die genannten Wegstücke in CB oder BC verwandelt werden. Auf den letzteren Komplex findet nun gleichfalls Formel I Anwendung und zwar, da es sich um gleichartige Gerade handelt, mit besonders einfachem Ergebnis, wie man wohl leicht übersieht.

Man besitzt also in Formel (III) eine Rekursionsformel, die es gestattet, mit einem Schlage die Wegezahl eines a gleichartige Gerade enthaltenden Komplexes auf Zahlen von Wegen zurückzuführen, in denen jener Büschel ganz fehlt.

Derselbe Gedankengang läfst sich auch auf Komplexe mit Büscheln ungleichartiger Geraden ausdehnen. Enthalte ein solcher Büschel beispielsweise drei verschiedene Arten von Geraden in den Anzahlen a, b, c, so bezeichne $W_{(a,b,c)}$ die Wegezahl des Komplexes, $W_{(0)}$ diejenige des Komplexes, in welchem der Geradenbüschel fehlt, ferner $W^{(1_a)}$ und $W^{(2_a)}$ die Summe der Wege, zu deren Bildung ein resp. zwei bestimmte Elementenpaare des Büschels von a Geraden Wegelemente liefern, und endlich $W^{(1_a, 1_b)}$ alle Wege, in denen ein Wegelement einem bestimmten Elementenpaare des Büschels von a Geraden, ein anderes einem solchen des Büschels von b Geraden entnommen ist; dann lautet die leicht zu bestätigende Endformel:

$$\text{(IV)} \quad W_{(a,b,c)} = W_{(0)} - a \cdot W^{(1_a)} - b \cdot W^{(1_b)} - c \cdot W^{(1_c)} + \binom{a}{2} W^{(2_a)} + \binom{b}{2} W^{(2_b)} + \binom{c}{2} W^{(2_c)} + ab \cdot W^{(1_a, 1_b)} + ac \cdot W^{(1_a, 1_c)} + bc \cdot W^{(1_b, 1_c)}.$$

4. *Verwendung der gewonnenen Formeln.* — Was sich mit den obigen Formeln zur Bewältigung des vorliegenden Problems leisten läfst, wird aus der Behandlung folgendes Einzelfalles erhellen:

In Nr. 2 geschah bereits der in der früheren Arbeit abgeleiteten Wegezahl des Komplexes Erwähnung, worin nur einer der n Punkte mit a anderen verbunden war. Sie war:

$$\text{(V)} \qquad W_{(n,a)} = 2\binom{n-a}{2}(n-2)!$$

Nun enthalte ein Komplex Gerade in der auf Fig. 5 gezeichneten Anordnung. Welches ist die Wegezahl $W_{(n;a,b,c)}$?

Nach Formel (IV) ist:

$$\text{(VI)} \qquad W_{(n;a,b,c)} = W_{(n,a)} - b\cdot W^{(1_b)}_{(n,a)} - c\cdot W^{(1_c)}_{(n,a)} + \binom{b}{2} W^{(2_b)}_{(n,a)} + \binom{c}{2} W^{(2_c)}_{(n,a)} + bc\cdot W^{(1_b,1_c)}_{(n,a)}.$$

Sodann nach Formel (I^a):

$$W^{(1_b)}_{(n,a)} = W_{(n-1,a-1)} + W_{(n-1,a)}, \quad W^{(1_c)}_{(n,a)} = 2W_{(n-1,a)}.$$

Um $W^{(2_b)}_{(n,a)}$ zu gewinnen, bedenke man, dafs von B stets über D nach C oder umgekehrt zu schreiten ist; schlägt man daher unter Tilgung des Punktes D nebst allen seinen Geraden beim Durchwandern des Komplexes den direkten Weg zwischen B und C ein, so erhält man gleichfalls $W^{(2_b)}_{(n,a)}$, d. h. man findet es als die Anzahl derjenigen Wege des verwandelten Komplexes, in denen das Elementenpaar BC vorkommt. Sonach ist:

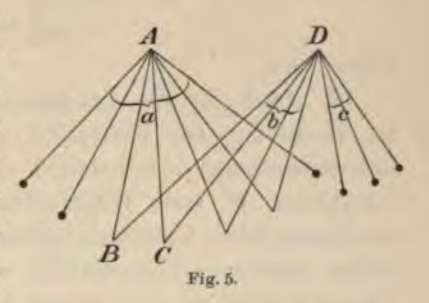


Fig. 5.

$$W^{(2_b)}_{(n,a)} = 2W_{(n-2,a-1)}, \quad W^{(2_c)}_{(n,a)} = 2W_{(n-2,a)}$$

und ähnlich:

$$W^{(1_b,1_c)}_{(n,a)} = W_{(n-2,a-1)} + W_{(n-2,a)}.$$

Durch Einsetzen aller dieser Werte in (VI) wird $W_{(n;a,b,c)}$ auf $W_{(n,a)}$ zurückgeführt, ein Verfahren, welches für die Berechnung von Wegezahlen noch komplizierterer Komplexe weiter fortgesetzt werden kann.

Eine weitere Förderung erfährt die Bearbeitung des vorliegenden Problems, wenn man es mit der Aufgabe, welche Herr Schubert als die der „Hamiltonschen Rundreisen" (H. Schubert, Mathem. Mufsestunden. 2. Aufl. III. Abschn. I, § 4) bezeichnet, in Zusammenhang bringt.

Zweiter Teil.

5. *Hamiltonsche Rundreisen.* — Unter einer Hamiltonschen Rundreise versteht man im Unterschied von den bisher betrachteten Wegen eine Reise auf einem Komplexe, auf welcher zwar jeder Punkt wiederum nur einmal berührt wird, der Ausgangspunkt aber vom Endpunkt aus wieder beschritten werden kann Es entsteht die Frage nach der Zahl der Rundreisen eines Komplexes.

1) Alle Punkte mögen unverbunden sein. In diesem Falle ist jeder der $n!$ früher gezählten Wege eine Rundreise, da die Rückkehr zum Ausgangspunkte immer gestattet ist. Längs eines der so geschlossenen Wege läſst sich der Ausgangspunkt für eine weitere Rundreise auf jeden der n Punkte verschieben und von diesem aus in zwei entgegengesetzten Richtungen zum Ausgangspunkte zurückkehren. Die so gezählten $2n$ Rundreisen fallen aber, wenn man von der Wahl eines Ausgangspunktes und einer bestimmten Richtung ganz absieht, in eine einzige zusammen; in diesem Sinne soll der Begriff der Rundreise im folgenden verstanden werden. Danach giebt es hier:

$$\frac{n!}{2n} = \frac{(n-1)!}{2}$$

Rundreisen.

2) Auch für die Rundreisen läſst sich unter Wiederholung des zur Herleitung der Formeln I eingeschlagenen Gedankenganges eine Rekursionsformel ableiten und zwar genau die frühere, wenn nur die Funktionen W statt Wegezahlen gewisser Komplexe nunmehr deren Rundreisezahlen bedeuten. Ebenso wiederholen sich die für Wegezahlen gegebenen Formeln (III) und (IV) auch für Rundreisen. Dieser Umstand führt zu einer höchst bemerkenswerten Folgerung:

Es ergiebt sich nämlich, daſs, wenn $W_{(n)}$ die Wegezahl irgend eines beliebigen Komplexes ist, $\frac{1}{2}W_{(n-1)}$ jedesmal die zugehörige Zahl von Rundreisen darstellt.[1])

Führt man für letztere $R_{(n)}$ als Zeichen ein, so gilt also:

$$\text{(VII)} \qquad R_{(n)} = \tfrac{1}{2}W_{(n-1)}.$$

In der That, ist dies für irgend einen Komplex richtig, so muſs es auch für denjenigen gelten, der durch Hinzufügung eines Büschels von a gleichartigen Geraden daraus entsteht, weil für Wege und Rundreisen in die nämliche Rekursionsformel eingesetzt wird, und n in dieser nur unter den Argumenten der Funktionen vorkommt.

---

1) Dies gilt nur, wenn die Zahl der *Punkte* des Komplexes n ist, nicht aber, wenn auch die auf die *Geradenzahlen* bezüglichen Argumente n enthalten.

Will man die Zahl aller nicht geschlossenen Wege aus $W_{(n)}$ entwickeln, so bedenke man, dafs in $W_{(n)}$ jede Rundreise $2n$ mal gezählt ist; also giebt es

(VIII) $$W_{(n)} - n \cdot W_{(n-1)}$$

ungeschlossene Wege.

Als Beispiel diene der Komplex, dessen Wegezahl durch Formel (V) gegeben ist. Die Zahl der Rundreisen dieses Komplexes ist:

$$\tfrac{1}{2} W_{(n-1,a)} = \binom{n-a-1}{2}(n-3)!$$

Die Zahl aller nicht geschlossenen Wege: $W_{(n,a)} - n\,W_{(n-1,a)}$

$$= 2\binom{n-a}{2}(n-2)! - 2n\binom{n-a-1}{2}(n-3)! = 2(n-a-1)(n-3)!\,a.$$

Zur Prüfung dieses Resultates durch Abzählen an einer Figur setze man $n = 5$, $a = 1$; man errechnet 6 Rundreisen und 12 offene Wege. In der That liefert Fig. 6 nur folgende Rundreisen:

15423	14325
14523	13524
13425	15324

und die offenen Wege:

13452	23451
13542	23541
14352	24351
14532	24531
15342	25341
15432	25431

6. *Formeln für Rundreisen.* — Betrachtet man einen von einem Punkte A ausstrahlenden Geradenbüschel irgend eines Komplexes, so kann Punkt A auf allen Rundreisen nur von solchen Punkten aus erreicht werden, nach welchen keine Gerade des Büschels läuft. Wählt man irgend ein Paar solcher Punkte B und C, um zunächst alle Rundreisen zu zählen, in denen A von B und C eingeschlossen ist, so kann letzteres auf Grund folgender Umwandlung des Komplexes geschehen: da dem Punkte A seine Stelle eindeutig angewiesen ist, so kann er selbst mit sämtlichen Geraden des Büschels getilgt werden; an dem so umgebildeten Komplexe sind dann alle Rundreisen zu zählen, in denen B direkt auf C folgt, eine Aufgabe, die durch Formel (I) gelöst wird. Da dieselbe Betrachtung auf jedes andere Punktepaar, zwischen



Fig. 6.

welches A sich einschalten läfst, Anwendung findet, so ist damit ein neues Rekursionsprinzip zur Zählung der Rundreisen eines Komplexes aufgestellt.

Es folgen einige Anwendungen:

1) Soll die Zahl der Rundreisen des schon mehrfach betrachteten Komplexes Fig. 7 auf diese neue Weise gewonnen werden, so zählt man hier zunächst $(n-a-1)$ mit A nicht verbundene Punkte, die auf $\binom{n-a-1}{2}$ fache Weise zu zweien kombiniert werden können. In ebensovielen Komplexen von $n-1$ unverbundenen Punkten, die man durch Tilgung von A nebst dem Geradenbüschel erhält, sind deshalb

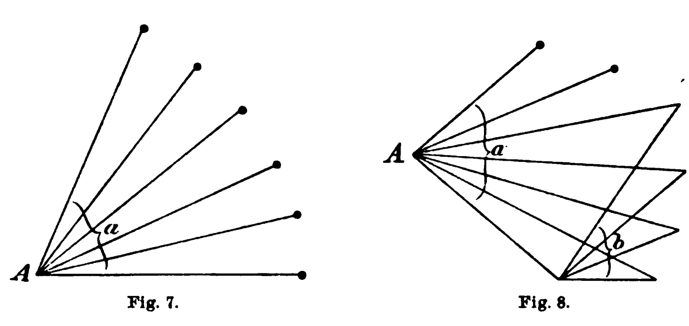


Fig. 7. Fig. 8.

alle diejenigen Rundreisen zu zählen, die Elemente je eines bestimmten Punktepaares enthalten. Nun giebt es in einem jener Komplexe $(n-3)!$ solche Rundreisen, weshalb der Komplex Fig. 7

$$R_{(n,a)} = \binom{n-a-1}{2}(n-3)!$$

Rundreisen in sich schliefst, ein Ergebnis, das mit dem in Nr. 5 gefundenen übereinstimmt.

2) Ebenso wird man bei Zählung der auf Fig. 8 möglichen Rundreisen wieder auf $\binom{n-a-1}{2}$ neue Komplexe geführt, in denen der Punkt A mit seinem Geradenbüschel fehlt. In jedem dieser Komplexe giebt es nach 1)

$$2R_{(n-2,b)} = 2\binom{n-b-3}{2}(n-5)!$$

Rundreisen, in denen Elemente eines bestimmten Punktepaares der Schar von $n-a-1$ Punkten enthalten sind, weshalb der Komplex Fig. 8

$$R_{(n;a,b)} = 2\binom{n-a-1}{2}\binom{n-b-3}{2}(n-5)!$$

Rundreisen gestattet.

Daraus ergiebt sich folgende Verallgemeinerung:

3) Sind in einem Komplexe k Geradenbüschel mit den Geradenzahlen $a_1, a_2, \cdots, a_k$ so geordnet, daſs die Strahlen des i-ten Büschels Endpunkte der Geraden des $(i-1)$ten verbinden (Fig. 9), so ist die Zahl der Rundreisen, wie man durch wiederholte Anwendung der vorhergehenden Betrachtung findet:

$$\text{(IX)}\quad R_{(n;\, a_1 a_2 \cdots a_k)} = 2^{k-1}\binom{n-a_1-1}{2}\cdot\binom{n-a_2-3}{2}\cdots\binom{n-a_k-2k+1}{2}(n-2k-1)!$$

Hieraus läſst sich weiter ableiten, daſs ein Komplex, in welchem a Punkte allseitig mit einander verbunden sind, während alle übrigen unverbunden bleiben, $\frac{1}{2}\binom{n-a}{a}a!\,(n-a-1)!$ Rundreisen in sich schlieſst.

4) In Fig. 10 zerfallen die mit A nicht verbundenen Punkte in

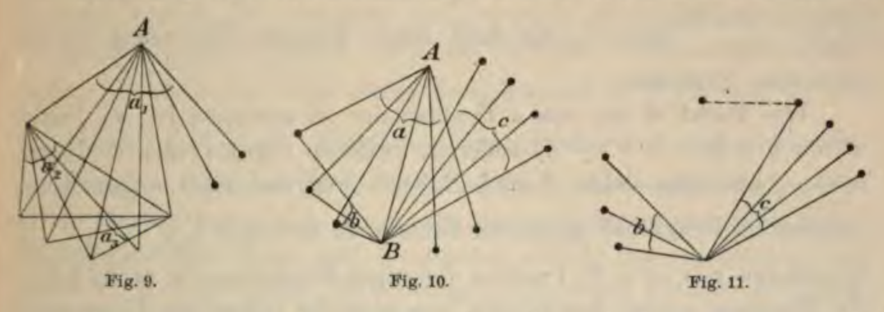


Fig. 9. Fig. 10. Fig. 11.

zwei Gruppen, einmal die ganz unverbundenen Punkte, $(n-a-c-1)$ an Zahl, sodann die c Punkte, von denen Gerade nach B hinführen. A kann nun treten

α) zwischen zwei Punkte der ersten Gruppe. Solcher Rundreisen giebt es so viele, als deren in $\binom{n-a-c-1}{2}$ Komplexen vorhanden sind, von denen jeder

$$2R_{(n-2,\, b+c)} = 2\binom{n-b-c-3}{2}(n-5)!$$

Rundreisen enthält, also im ganzen $2\binom{n-a-c-1}{2}\binom{n-b-c-3}{2}(n-5)!$

β) zwischen zwei Punkte der zweiten Gruppe. Hier findet man durch eine analoge Betrachtung $2\binom{c}{2}\binom{n-b-c-2}{2}(n-5)!$ Rundreisen.

γ) zwischen einen Punkt der ersten und einen der zweiten Gruppe. Hier sind Rundreisen in $c(n-a-c-1)$ Komplexen zu zählen, zwischen deren $(n-1)$ Punkten $(b+c)$ Gerade wie in Fig. 11 angeordnet sind. Die gestrichelte Gerade bezieht sich auf das in jeder der zu zählenden Reisen vorhandene Elementenpaar. Durch Anwendung

von Formel (I) findet man als Zahl der Rundreisen eines dieser Komplexe:

$$R_{(n-2,b+c-1)} + R_{(n-2,b+c)} = \left[\binom{n-b-c-2}{2} + \binom{n-b-c-3}{2}\right](n-5)!$$

Durch Addition ergiebt sich die Zahl der Rundreisen auf Fig. 10, nämlich:

$$\left\{\left[2\binom{n-a-c-1}{2} + (n-a-c-1)c\right]\binom{n-b-c-3}{2} + \left[(n-a-c-1)c + 2\binom{c}{2}\right]\binom{n-b-c-2}{2}\right\}(n-5)!$$

oder vereinfacht:

$$(n-a-2)\left[(n-a-c-1)\binom{n-b-c-3}{2} + c\binom{n-b-c-2}{2}\right](n-5)!$$

Wird $n-a-1=c$, so vereinfacht sich der Ausdruck zu: $2\binom{c}{2}\binom{n-b-c-2}{2}(n-5)!$, ein auch durch folgende Überlegung zu gewinnendes Ergebnis:

Wie Punkt A nur von c Punkten aus zu erreichen ist, so Punkt B nur von $(n-b-c-2)$ anderen, zwischen deren zweien er liegen mufs. Läfst man daher A und B beide weg und zählt wegen Kombination der Punkte der genannten Scharen zu zweien in $\binom{c}{2}\binom{n-b-c-2}{2}$ Komplexen von $(n-2)$ Punkten diejenigen Rundreisen, in deren jedem die Elemente zweier bestimmten, von einander getrennten Elementenpaare vorkommen, so wird man auf dasselbe Endergebnis geführt.

Daraus folgende Verallgemeinerung: Besitzt ein Komplex k Punkte, deren jedem eine Gruppe von Punkten zugeordnet werden kann, von denen er allein erreichbar ist, während im übrigen von Punkt zu Punkt gesprungen werden kann, so ist, wenn $a_1, a_2, \cdots, a_k$ die Zahl der Punkte in den k Gruppen ist, die Zahl der Rundreisen:

$$\text{(X)} \qquad 2^{k-1}\cdot\binom{a_1}{2}\binom{a_2}{2}\cdots\binom{a_k}{2}(n-2k-1)!$$

7. *Anwendungen.* — 1) Unter den Spezialfällen der betrachteten Aufgabe ist wohl die, welcher auch Verfasser seine Anregung verdankt, die Frage nach der Anzahl der Rösselsprünge auf dem 64-feldrigen Schachbrett, die interessanteste. Auch hier unterscheidet man ungeschlossene Wege und Rundreisen, je nachdem nämlich das letzte Feld eines Rösselsprunges einen Sprung auf das Anfangsfeld zurück gestattet oder nicht. Der Komplex enthält in diesem Falle zwischen seinen 64 Punkten 1848 Gerade in bestimmter, durch die Lagenverhältnisse des Schachbretts und die Gangart des Springers gegebener

Anordnung, und die Zählung der Rösselsprünge ist offenbar mit der Frage nach der Zahl der Wege und Rundreisen dieses Komplexes identisch, könnte also auch mit den Rekursionsmitteln der voranstehenden Untersuchungen, sogar auf verschiedenfache Art, in Angriff genommen werden. Es scheint jedoch unter den gebotenen Wegen keiner vorhanden zu sein, auf welchem sich der Gang der Rechnung einfach genug gestaltet. Zeigen doch die in Nr. 4 und 5 behandelten Beispiele, in welchem Maſse die Formeln sich oft schon komplizieren, wenn nur einige Scharen gleichartiger Geraden im Komplex vorhanden sind.

Vielleicht empfiehlt sich folgender Weg oder kann als Fingerzeig zur Auffindung eines noch besser abkürzenden Verfahrens dienen:

Da dem Springer ein Sprung zwischen gleichfarbigen Feldern des Brettes nicht gestattet ist, so stelle man, den weiſsen und den schwarzen Feldern entsprechend, die Punkte des Komplexes in zwei Gruppen von je 32 zusammen und verbinde die sämtlichen je einer Gruppe angehörigen Punkte durch alle zwischen ihnen möglichen Geraden. Die Zahl der Wege dieses Komplexes ist $2\left[\left(\frac{64}{2}\right)!\right]^2$ und die der Rundreisen: $\frac{1}{64}\left[\left(\frac{64}{2}\right)!\right]^2$. Trägt man nun in diesen Komplex als Ausgangskomplex weitere Büschel gleichartiger oder ungleichartiger Geraden ein, so lassen sich die zu den nacheinander entstehenden Komplexen gehörigen Wege und Rundreisen mittels des im zweiten Teil unter Nr. 6 aufgestellten Rekursionsprinzipes durch Formeln ermitteln, die nicht komplizierter ausfallen, als wenn man von einem Komplex mit unverbundenen Punkten seinen Ausgang nimmt. Der Zahl der Punkte einer Gruppe entsprechend würde man nach 32 Rekursionen, die sich freilich bald verwickelt gestalten, am Ziele anlangen. Auch würden in jede der nacheinander auftretenden Formeln Substitutionen aus den vorangehenden zu machen sein, immerhin ein sehr mühsames und trotz einiger Vorteile, die man dabei beobachten kann, überaus langwieriges Verfahren, zu dem man sich erst entschlieſsen wird, wenn sich kein kürzerer Weg zum Ziele erschlieſst.

2) Während der bisher befolgte Gedankengang die Kennzeichnung der nicht zu beschreitenden Elementenpaare durch Gerade erforderte, wird diese Darstellungsweise unübersichtlich, wenn zwischen den Punkten eines Komplexes verhältnismäſsig nur wenig Sprünge gestattet sind. Bei Behandlung des letzten Beispieles wird folgende, etwas veränderte übersichtlicher sein:

In Figur 12 sollen die gestrichelten Linien die einzigen zu den Punkten P_1 und P_2 führenden Zugänge bedeuten, während zwischen den Punkten A, A_1, A_2, ... und B, B_1, B_2, ... alle Sprünge gestattet

sein sollen. Denkt man sich solcher Punkte wie P_1 und P_2 noch andere mit $a_3, a_4, \cdots, a_k$ Ausgängen zur Figur hinzu, so ergiebt sich die Zahl der Rundreisen aus Formel (X), oder abgekürzt ist sie gleich

$$2^{k-1}\binom{a_1}{2}\binom{a_2}{2} \cdot f \cdot (n - 2k - 1)!$$

In wievielen von diesen Reisen ist das Elementenpaar AB vorhanden? Man kann folgende Gruppen unterscheiden:

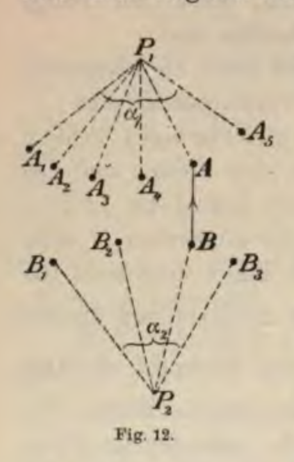


Fig. 12.

α) solche Rundreisen, in denen die Punktfolge P_1ABP_2 in direktem oder umgekehrtem Sinne vorkommt; deren giebt es:

(A) $2^{k-2}(a_1 - 1)(a_2 - 1) \cdot f \cdot (n - 2k - 2)!$

β) solche, in denen das Elementenpaar AP_1 nicht vorkommt, dadurch zu zählen, dafs man unter Tilgung der Geraden AP_1 das Elementenpaar AB in Punkt B vereinigt. Aus jeder Rundreise des neuen Komplexes ergiebt sich eine der hier zu zählenden Reisen, wenn man A neben B einschiebt. (Für die Reisen, die nicht von B nach P_2 führen, kann immer ein bestimmtes Wegelement des Paares AB, etwa stets AB, eingeschoben werden, wodurch dann die Zählung der Reisen mit dem anderen Wegelement BA auf die dritte Gruppe entfällt.) So ergeben sich weitere:

(B) $$2^{k-1}\binom{a_1 - 1}{2}\binom{a_2}{2} \cdot f \cdot (n - 2k - 2)!$$

Rundreisen.

γ) endlich solche, wo das Elementenpaar BP_2 fehlt, in der Anzahl:

(C) $$2^{k-1}\binom{a_1}{2}\binom{a_2 - 1}{2} \cdot f \cdot (n - 2\varkappa - 2)!$$

Durch Addition von (A), (B), (C) gelangt man zu der Zahl von

$$2^{k-2}(a_1 - 1)^2(a_2 - 1)^2 \cdot f \cdot (n - 2k - 2)!$$

Rundreisen, welche sich, wenn $a_1 = 2$ ist, zu $2^{k-2}(a_2 - 1)^2 \cdot f \cdot (n - 2k - 2)!$ vereinfacht. Im letzteren Falle kann keine der gezählten Rundreisen ein anderes von A nach einem der Punkte $B_1, B_2, \cdots$ führendes Elementenpaar enthalten, da sonst P_1 nicht in die Reise eingeschlossen werden könnte.

Daher giebt es auf Fig. 13, die man sich um die Punkte mit $a_4, \cdots, a_k$ Ausgängen erweitert denken mufs, wenn stets eins der durch

Pfeile hervorgehobenen von A ausgehenden Elementenpaare bereist werden soll, im ganzen

$$\text{(XI)}\qquad 2^{k-2}(n-2k-2)!\binom{a_2}{2}\binom{a_3}{2}\cdots\binom{a_k}{2}\sum_{2\ldots\varkappa}^{i}\beta_i(a_i-1)^2\frac{1}{\binom{a_i}{2}}$$

Rundreisen. Subtrahiert man dies von (X), so erhält man in

$$\text{(XII)}\quad 2^{k-2}(n-2k-2)!\binom{a_2}{2}\cdots\binom{a_k}{2}\left[2(n-2k-1)-\sum_{2\ldots k}^{i}\beta_i(a_i-1)^2\frac{1}{\binom{n_i}{2}}\right]$$

alle Rundreisen, in denen die durch Pfeile gekennzeichneten Elementenpaare nicht beschritten werden sollen.

Formel (XII) reicht aus zur Behandlung folgenden Beispiels: Sollen in den auf Fig. 14 zu zählenden Rundreisen alle durch Pfeile bezeichneten Elementenpaare fehlen, so giebt es deren 4320 nach (XII).

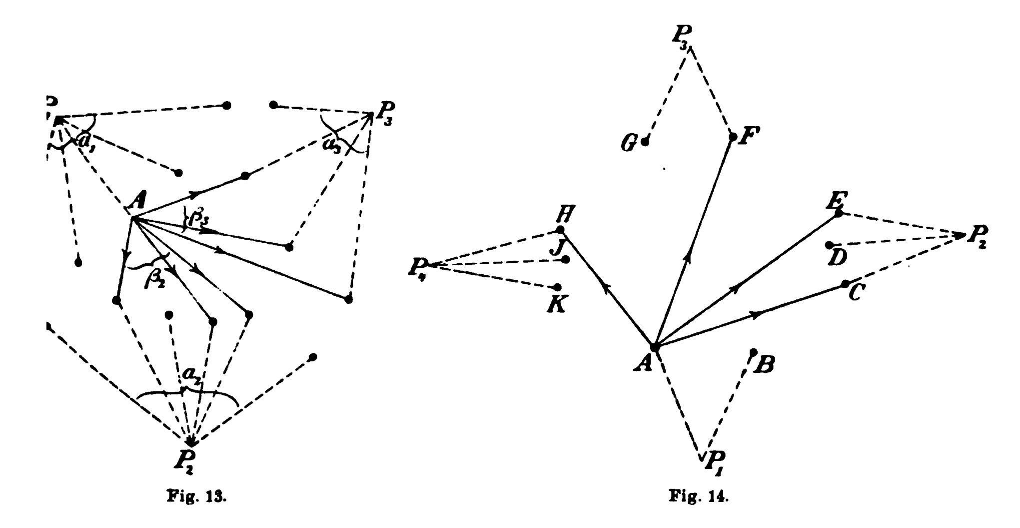


Fig. 13. Fig. 14.

Um von dieser Zahl noch die Rundreisen mit dem Elementenpaar GC auszuschliefsen, müssen diese gezählt werden, zu welchem Zwecke folgende neuen Figuren aus Fig. 14 entwickelt werden: diejenigen Reisen, welche von G über C nicht nach P_2 weiterführen, können an Fig. 15a, wo Punkt C unter gleichzeitiger Verlegung einer Pfeilrichtung mit Punkt G vereinigt ist, in der vorigen Weise gezählt werden; die von F über P_3, G, C, P_2 nach D führenden Reisen zählt man an Fig. 15b, worin die Verbindung zwischen den Punkten F und D über einen eingeschobenen Punkt X hinweg eine leichtere Anwendung der wegen des hinzukommenden Punktes E etwas zu er-

weiternden Formel (XII) ermöglicht; Fig. 15c endlich dient entsprechend zur Zählung der von F über P_3 nach G, C, P_2 und E führenden Wege.

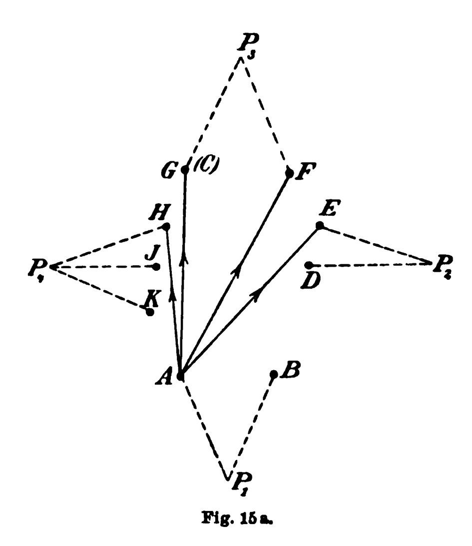


Fig. 15a.

Für Fig. 15a fanden sich 264, für Fig. 15b 132 und für Fig. 15c 168, zusammen 564 Rundreisen.

Auf dieselbe Weise wurden alle die Elementenpaare GE, GB und GK enthaltenden Rundreisen der Fig. 14 gezählt und für sie

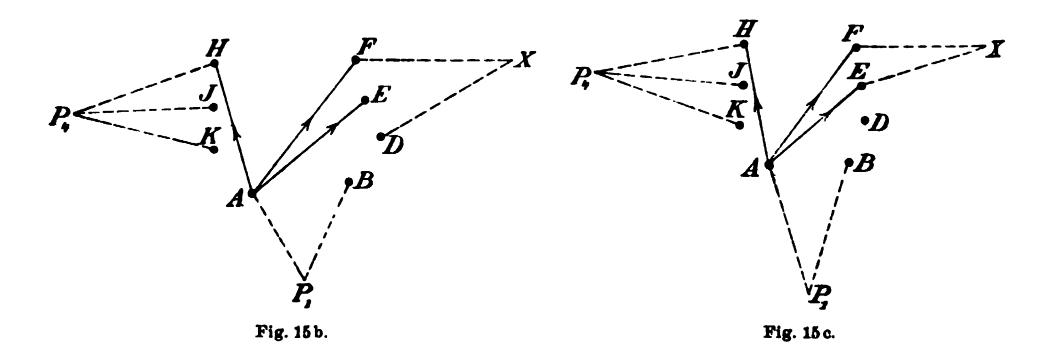


Fig. 15b. Fig. 15c.

zusammen mit den 564 die Zahl von 2004 ermittelt. Subtrahiert man diese von den früher gezählten 4320, so bleiben 2316 Rundreisen übrig, in denen auch noch die vier genannten von G ausgehenden Elementenpaare der Fig. 14 fehlen.

Unter diesen 2316 Rundreisen sind, wie sich bei Fortsetzung des nunmehr komplizierter werdenden Verfahrens herausstellt, wieder 1084,

in denen die von B ausgehenden Elementenpaare BE, BH und BK enthalten sind, so dafs sich schliefslich als Zahl aller Rundreisen der

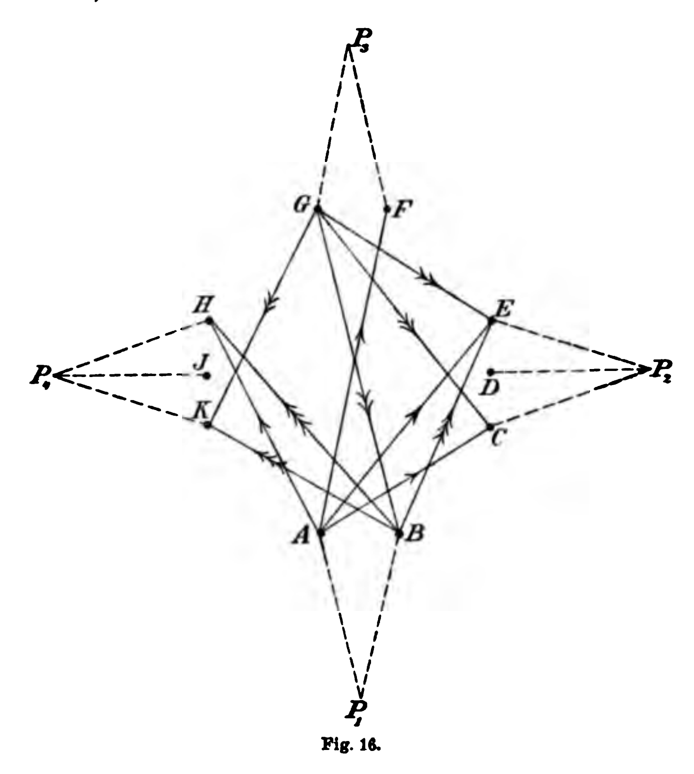


Fig. 16.

Fig. 16, auf welcher alle Sprünge zwischen den Punkten A, B, ..., K mit Ausnahme der durch Pfeile gekennzeichneten gestattet sein sollen, die Zahl von 1232 findet.

München-Gladbach, den 21. Januar 1901.

Über eine Permutationsaufgabe.

Von G. Landsberg in Heidelberg.

Die Anzahl der Permutationen von n Elementen, unter denen sich α_1 gleiche Elemente einer, α_2 Elemente einer zweiten, ..., α_ν Elemente einer νten Art befinden, ist bekanntlich

$$\frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\ldots\,\alpha_\nu!}.$$

Sieht man ferner zwei Permutationen als identisch an, die aus einander durch cyklische Vertauschung hervorgehen und sich daher nicht von einander unterscheiden, wenn man die Elemente in einem Kreise anordnet, so erhält man, falls *n eine Primzahl ist,* die Anzahl dieser „Kreispermutationen" aus der vorher angegebenen einfach durch Division mit n, wie Gaufs in seinem Beweise des Fermatschen Lehrsatzes gezeigt hat (Disqu. arithm. 41). Schwieriger wird die Bestimmung der Anzahl der Kreispermutationen bei Aufhebung aller Einschränkungen für die Zahlen $n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$.

Ist d irgend ein gemeinschaftlicher Teiler der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, so bedürfen wir im folgenden für die Bestimmung der Anzahl der Kreispermutationen der Ausdrücke

$$\text{(A)} \qquad \psi(d) = \frac{\left(\frac{n}{d}\right)!}{\left(\frac{\alpha_1}{d}\right)!\,\left(\frac{\alpha_2}{d}\right)!\cdots\left(\frac{\alpha_\nu}{d}\right)!},$$

wobei die Bezeichnung $\psi(d)$ darauf hinweisen soll, dafs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ als gegeben und darum fest, d allein als veränderungsfähig angesehen wird. Ist nun $a_0\, a_1\, a_2 \ldots a_{n-1}$ irgend eine der zu bildenden $\psi(1)$ Permutationen, und unterwirft man dieselbe einer Folge cyklischer Vertauschungen, so erhält man entweder n verschiedene Permutationen, oder aber es kehrt schon nach $\frac{n}{d}$ cyklischen Vertauschungen die Anfangspermutation wieder. Im ersten Falle entspricht einem Komplexe von n, im zweiten einem Komplexe von $\frac{n}{d}$ verschiedenen Permutationen eine einzige Kreispermutation. Betrachtet man den zweiten, allgemeineren Fall genauer, so erkennt man leicht, dafs die Permutation in d identische sich wiederholende Teilpermutationen von je $\frac{n}{d}$ Elementen zerlegt werden kann; die Zahl d mufs somit ein Teiler von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, also auch von n

sein. Zu jeder Permutation gehört somit eine bestimmte Zahl d, welche wir den „*Index der Permutation*" nennen wollen, und welche definiert werden kann als die gröfste Anzahl identischer Teilpermutationen, in welche die gegebene Permutation zerlegt werden kann. Wir wollen die Anzahl der gewöhnlichen Permutationen, welche zum Index d gehören, mit $\chi(d)$ bezeichnen; da in einer Kreispermutation vom Index d immer $\frac{n}{d}$ gewöhnliche Permutationen zusammengefallen sind, so ist $\chi(d)$ durch $\frac{n}{d}$ teilbar. Die gesuchte Permutationszahl P ist also

$$P = \frac{1}{n} \sum_d d\chi(d), \tag{B}$$

worin die Summe über alle gemeinschaftlichen Teiler d von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ zu erstrecken ist.

Zur Bestimmung der Funktion $\chi(d)$ führt nun die folgende Überlegung. Der Definition zufolge ist

$$\sum_d \chi(d) = \psi(1). \tag{1}$$

Allgemeiner aber erkennt man, dafs, wenn δ irgend einen gemeinschaftlichen Teiler von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ bedeutet, die Gleichung gilt:

$$\sum_{d=\delta\epsilon} \chi(d) = \psi(\delta), \tag{2}$$

worin die Summe über diejenigen gemeinschaftlichen Teiler d von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ zu erstrecken ist, welche Vielfache von δ sind. In der That stellt die Summe auf der linken Seite der Gleichung (2) die Anzahl aller Permutationen dar, welche sich in δ identische Teilpermutationen zerlegen lassen; jede dieser Teilpermutationen erhält man aber, indem man jede der ν Arten gleicher Elemente in δ Teilsysteme zerlegt und aus diesen Teilsystemen, die aus $\frac{n}{\delta}$ Elementen, nämlich aus $\frac{\alpha_1}{\delta}$ Elementen erster, $\frac{\alpha_2}{\delta}$ Elementen zweiter, $\cdots$, $\frac{\alpha_\nu}{\delta}$ Elementen νter Art bestehen, die Permutationen bildet, deren Anzahl ja $\psi(\delta)$ ist.

Die Gleichungen (1) und (2) genügen zur Berechnung von $\chi(d)$; man findet so, wie beiläufig erwähnt sein mag,

$$\chi(d) = \sum_\delta \varepsilon_\delta \psi(d\delta),$$

worin δ alle Zahlen zu durchlaufen hat, für welche $d\delta$ ein gemeinschaftlicher Teiler von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ wird, und ε_δ ein Symbol bedeutet, welches den Wert Null erhält, wenn δ mehrere gleiche Prim-

faktoren enthält, und den Wert $(-1)^\varrho$, wenn δ aus ϱ ungleichen Primfaktoren zusammengesetzt ist.

Man kann aber auch aus den Gleichungen (1) und (2) direkt zur Bestimmung der die Zahl P darstellenden Summe gelangen, wenn man berücksichtigt, daſs für die in der Zahlentheorie benutzte φ-Funktion die Gleichung gilt

$$d = \sum_{\delta/d} \varphi(\delta),$$

wobei in der Summe δ alle Teiler von d durchläuft. Hiernach folgt nämlich aus (B):

$$P = \frac{1}{n} \sum_d \chi(d) \sum_{\delta/d} \varphi(\delta),$$

oder bei Umkehrung der Summationsfolge:

$$P = \frac{1}{n} \sum_\delta \varphi(\delta) \sum_{d=\delta z} \chi(d),$$

worin δ alle gemeinschaftlichen Teiler von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, d aber nur diejenigen, welche Vielfache von δ sind, zu durchlaufen hat. Mit Benutzung von (2) erhält man also die gewünschte Anzahlbestimmung in folgender Gestalt, welche von allen die einfachste ist,

$$\text{(C)} \qquad \boldsymbol{P = \frac{1}{n} \sum_\delta \varphi(\delta) \psi(\delta)},$$

worin also δ alle gemeinschaftlichen Teiler von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ durchläuft, $\varphi(\delta)$ die Anzahl der Zahlen bedeutet, welche zu δ teilerfremd und nicht gröſser als δ sind, und die Permutationszahl $\psi(\delta)$ durch die Gleichung (A) erklärt ist; da P eine ganze Zahl ist, so ist die Summe stets durch n teilbar.

Ist z. B. $n = 8$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 4$, so ist $\delta = 1, 2, 4,$

$$\varphi(\delta) = 1, 1, 2, \quad \psi(\delta) = 70, 6, 2,$$

also

$$P = \tfrac{1}{8}(70 + 6 + 4) = 10.$$

Heidelberg, den 30. April 1901.

Zusatz. Durch das kürzlich erschienene „Lehrbuch der Kombinatorik" des Herrn E. Netto (Leipzig 1901; § 121) wurde ich nachträglich darauf aufmerksam, daſs der Gegenstand dieser Note bereits 1892 von Herrn E. Jablonski in einer gröſseren Abhandlung, die ich zur Zeit nicht kannte, untersucht worden ist. (Théorie des permutations et des arrangements circulaires complets; Liouv. J. (4), 8, p. 331—349.) Der Verfasser bestimmt im ersten Teile der Arbeit die Permutationszahl P in speziellen Fällen und gelangt im zweiten auch zu der allgemeinen Formel (C), welche alle früheren umfaſst; das gefundene Resultat ist also nicht mehr neu, aber die hier gegebene Ableitung ist viel einfacher als die der erwähnten Abhandlung.

Heidelberg, den 20. März 1902.

Rezensionen.

Die partiellen Differentialgleichungen der Mathematischen Physik. Nach Riemanns Vorlesungen in vierter Auflage neu bearbeitet von **Heinrich Weber.** Braunschweig 1900—1901, Friedrich Vieweg und Sohn. Zwei Bände. XVIII u. 506, XII u. 527 S. gr. 8^0.

Es ist eine in der deutschen mathematischen Litteratur sehr seltene Erscheinung, dafs ein Forscher ersten Ranges ein Handbuch oder Lehrbuch eines Teiles seiner Wissenschaft publiziert. Wenn sie eintritt, so bewirkt sie eine Befruchtung des Studiums derjenigen Generationen von Studierenden, die das Glück haben, durch solche Lehrbücher geleitet werden zu können. Ein derartiges Handbuch bilden die vorliegenden Vorlesungen des berühmten Verfassers, der für dasselbe den Titel einer vierten Auflage der Riemannschen Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen gewählt, in Wirklichkeit aber ein durchaus neues, ihm eigentümlich zugehöriges Werk geschaffen hat. Seit dem Jahre 1869, in welchem die bekannten Riemannschen Vorlesungen zum ersten Male durch Hattendorff veröffentlicht wurden, hat die mathematische Physik, vornehmlich nach der Seite der Elektrizitätslehre, aber auch nach anderen Richtungen, so umfassende Veränderungen ihrer damaligen Gestalt erlitten, dafs in der Weberschen Neuarbeit kaum noch Spuren der Riemannschen Vorarbeit zu entdecken sind.

Das Werk selbst zerfällt in zwei Bände, jeder Band in Bücher, der erste in drei, der zweite in fünf Bücher, jedes Buch in Abschnitte.

Das erste Buch des ersten Bandes trägt die Überschrift: Analytische Hilfsmittel und umfafst acht Abschnitte: Bestimmte Integrale, Fourierscher Lehrsatz, unendliche Reihen, Fouriersche Reihen, mehrfache Integrale, Funktionen komplexer Argumente, Differentialgleichungen, Besselsche Funktionen. Alle diese Hilfsmittel werden in originaler und meisterhafter Darstellung vorgelegt, aber auch mit einer Knappheit, welche als ein Vorzug des Werkes zu betrachten ist, da sie das Nachdenken des Lesers dauernd wach erhält, und schliefslich stets die Übereinstimmung mit der Ausdrucksweise des Autors erzwingt.

Das zweite Buch behandelt die geometrischen und mechanischen Grundsätze in den Abschnitten: Lineare infinitesimale Deformation, Vektoren, Potentiale, Beispiele zum Potential, Kugelfunktionen, Überblick über die Grundsätze der Mechanik.

Im dritten Buche finden sich die Abschnitte: Elektrostatik, Probleme der Elektrostatik, Magnetismus, Elektrokinetik, Elektrolytische Leitung, Stationäre elektrische Ströme, Strömung der Elektrizität in Platten, Strömung der Elektrizität im Raume, Elektrolytische Verschiebungen. Dieses Buch

enthält die Herleitung der Maxwellschen Gleichungen und stete Hinweisungen auf die modernen Theorien der Elektrizität.

Die fünf Bücher des zweiten Bandes teilen sich wiederum in einzelne Abschnitte, deren Übersicht aufs neue die große Reichhaltigkeit des zum Vortrag gebrachten Stoffes ergeben wird.

Das erste Buch enthält Hilfsmittel aus der Analysis, deren meisterhafte und knappe Darstellung abermals zu bewundern ist. Die einzelnen Abschnitte desselben behandeln die Integration durch hypergeometrische Reihen, die Integration durch bestimmte Integrale, die P-Funktion von Riemann, die Oszillationstheoreme.

Das zweite Buch handelt von der Wärmeleitung, und zerfällt in die Abschnitte: Die Differentialgleichung der Wärmeleitung, Probleme der Wärmeleitung, die nur von einer Koordinate abhängig sind, Wärmeleitung in der Kugel.

Im dritten Buche wird die Elastizitätstheorie vorgetragen, nach den Abschnitten gegliedert: Allgemeine Theorie der Elastizität, statische Probleme, Druck auf eine elastische Unterlage, Bewegung der gespannten Saiten, die Riemannsche Integrationsmethode, Schwingungen einer Membran, allgemeine Theorie der schwingenden Membran.

In dem vierten Buche, das die elektrischen Schwingungen behandelt, gemäß der Maxwellschen Theorie, finden wir die Abschnitte: Elektrische Wellen, lineare elektrische Ströme, Reflexion elektrischer Schwingungen.

Das fünfte und letzte Buch schliefslich enthält die Theorie der Hydrodynamik und umfaßt die Abschnitte: Allgemeine Grundsätze, Bewegung eines starren Körpers in einer Flüssigkeit (hydrodynamischer Teil), Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit (mechanischer Teil), unstete Bewegung von Flüssigkeiten, Fortpflanzung von Stößen in einem Gase, Luftschwingungen von endlicher Amplitude.

Aus diesem Verzeichnis des überaus reichen Inhaltes des Werkes ist zu erkennen, welche umfangreichen Gebiete der mathematischen Physik der Herr Verfasser zum Vortrage bringt, mit Berücksichtigung der modernsten Anschauungen und Hilfsmittel, aber in originaler, strenger und mustergiltiger Darstellung. Der Herr Verfasser hat in der Einleitung des Werkes besonders hervorgehoben, daß dasselbe kein physikalisches Lehrbuch sein soll, sondern seinen Schwerpunkt in die mathematische Behandlung der einzelnen Probleme legen will. Die kurzen Entwickelungen der einzelnen physikalischen Theorien machen keinen Anspruch auf Vollständigkeit. — Wir haben geglaubt, einer Beibringung von Beispielen der Behandlung einzelner Probleme, die uns mannigfache Belehrung bot, absehen zu sollen, da wir die Empfindung haben, daß das Werk über unserem Lobe steht.

Charlottenburg. J. Weingarten.

Heinrich Müller. Die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen. Erster Teil: Die Unterstufe. II. Aufl. Leipzig 1902, B. G. Teubner. Ausgabe A: Für Gymnasien und Progymnasien. Ausgabe B: Für reale Anstalten und Reformschulen.

Das Äußere hat bei dem neuen Verlage in Bezug auf die Figuren gewonnen. Doch sind dringend noch weitere Verbesserungen nötig (beson-

ders Fig. 2, 36, 142—144, 154—157). Referent möchte, statt hier auf Einzelheiten einzugehen, darauf hinweisen, daſs sich leider ähnlich mangelhafte Figuren nicht selten in Schulbüchern finden. Die Figuren eines Schulbuches sollen aber mehr sein als Skizzen; sie sollen zugleich vorbildlich sein und die Schüler anregen, auch ihrerseits recht sorgfältig zu zeichnen. Auch in Bezug auf die Figuren ist das Beste für unsere Schüler nur gerade gut genug.

Die Stoffauswahl, seine Anordnung und Gesamtbehandlung zeigen die geschickte Hand des erfahrenen Schulmannes. Hervorgehoben sei, daſs sich zahlreiche Übungsbeispiele finden, und daſs diese auch in der Geometrie an bestimmte Zahlen geknüpft sind und so leicht zu der oben hervorgehobenen Wertschätzung recht exakten Zeichnens hinleiten können. Nicht glücklich ist die Behandlung der abgekürzten Dezimalbruchrechnung A S. 110/1, B S. 115/6. Es wird nur die Multiplikation und Division behandelt. Die Multiplikanden der Teilprodukte sind stets untere Grenzwerte.[1]) Ein solcher ist dann auch das Gesamtprodukt, während der Quotient als oberer Grenzwert erscheint. Müllers Verfahren vergröſsert im Vergleich mit dem sonst üblichen die Fehlergrenze und ist durchaus nicht zu empfehlen. Daſs die S. 110 angegebene Fehlergrenze falsch ist, zeigt der Verfasser selbst durch sein Beispiel. Sein Produkt ist 234, 132; dabei soll der Fehler „weniger als die Hälfte einer Einheit der letzten Stelle“ sein. Der Fehler beträgt aber, da der genaue Wert 234,133 748 38 ist, 1,748 38 Einheiten der letzten Stelle. In der Ausgabe B ist Abschnitt IV S. 167—199 für die Reformgymnasien überflüssig. Die Stereometrie ist in den Reformgymnasien erst in Prima zu behandeln, wenn auch sonst infolge der in Sekunda und Prima nun doch verkürzten Stundenzahl die Pensen leider nach unten verschoben werden müssen. Vielleicht ist im Bedürfnisfalle hier die Einrichtung einer dritten Ausgabe C zu erwägen, da sich der stereometrische Abschnitt ja leicht abtrennen läſst.

In der Ausdrucksweise strebt der Verfasser überall nach Klarheit und Einfachheit unter thunlichster Vermeidung von Fremdwörtern. S. 4 wäre wohl „Halbstrahl“ (vgl. Reye, Geom. d. Lage S. 19) statt „Strahl“ angemessener. Die gegebene Erklärung des Strahls, die man vielfach findet, paſst zwar allein zum Ursprung des Wortes, reicht aber schon in der Schulgeometrie nicht aus. In den Bemerkungen über die Bezeichnung der Zahlen A S. 91, B S. 96 vermiſst Referent die Hervorhebung des Begriffes „Positionssystem“. Die Unterscheidung zwischen Dezimalzahl und Dezimalbruch A S. 109/110, B S. 114/115 möchte Referent nicht empfehlen, noch weniger aber den Ausdruck „ausführbar“ A. S. 121, B S. 126.

Einige Druckfehler und dem gleich zu achtende Unebenheiten werden sich leicht beseitigen lassen.

Schöneberg b. Berlin. Ernst Kullrich.

---

1) Es ist Abkürzungsart I S. 5 in der Programmabhandlung 1898 der Realschule zu Schöneberg.

H. Müller und **M. Kutnewsky. Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie.** II. Teil. Ausgabe A für Gymnasien; Ausgabe B für reale Anstalten und Reformschulen. Leipzig und Berlin 1902, B. G. Teubner.

Das in neuerer Zeit mehrfach hervorgetretene Bestreben, den mathematischen Unterricht durch Aufgabensammlungen zu fördern, welche sich auf das gesamte in den mittleren und oberen Klassen unserer höheren Schulen notwendige Übungsmaterial erstrecken, ist nicht nur für die Schüler, sondern sicherlich auch für den Lehrer von praktischem Nutzen, während zugleich dadurch dem Konzentrationsprinzip Vorschub geleistet werden kann. Von diesem Standpunkte aus ist das Erscheinen des zweiten Teils dieser Sammlung durchaus zu billigen, obwohl an Aufgaben für die einzelnen im Titel genannten Disziplinen kein Mangel herrscht. Da Ausgabe A als verkürzter Abdruck der Ausgabe B angesehen werden kann, so genügt es, letztere allein zu besprechen.

An den Gesichtspunkten, nach denen die Sammlung in ihrem ersten Teile angelegt wurde, ist mit Recht auch hier festgehalten worden.

Dafs die Verf. einen grofsen Teil der Aufgaben nicht selbständig erdacht, sondern an bekannte spezielle Sammlungen sich angelehnt haben, kann ihnen nicht zum Vorwurf gemacht werden. Ref. hätte sogar gewünscht, dafs sie darin noch weiter, als es der Fall ist, gegangen wären. Für eine methodische Verarbeitung von Aufgaben z. B. über Maxima und Minima, welche das herangezogene Lüdtkesche Programm (Iserlohn 1898) nicht liefern will, wäre die Schrift von A. Maurer (Berlin 1897, J. Springer) nützlicher gewesen, welche Lüdtke ja auch nicht unbenutzt gelassen hat. Physikalische Aufgaben, über deren Bedeutung für den rechnenden Unterricht kein Zweifel herrscht, fehlen im zweiten Abschnitt gänzlich. Und welche Fülle von Übungsbeispielen bietet gerade die Physik der Trigonometrie dar! Im 9. Kapitel Nr. 12 wird z. B. die Gleichung

$$a \sin x + b \cos x = c$$

behandelt. Hier lag es doch nahe, Aufgaben aus der Lehre von der Reibung heranzuziehen, zumal da in einer Anmerkung durch eine Substitution, welche die Gleichung 2. Grades umgehen lehrt, geradezu der sogenannte Reibungswinkel eingeführt worden ist. Da die Verf. eine systematische Verwendung der aus der Naturlehre bekannten Thatsachen, besonders der physikalischen Gesetze, zum Ziele sich gesetzt haben, so wäre es wünschenswert, dafs die Aufgaben den in den Pensen vorgeschriebenen Gebieten sich enger anschlössen; es sollte das Nützliche von dem Unnötigen noch mehr getrennt werden, besonders aber dann, wenn die Gesetze einem arithmetischen Ausdruck zulieb aus zwar guten, aber älteren Lehrbüchern hergeholt werden müssen (vgl. S. 63, Fufsnote). Das bei den Verf. beliebte Zitieren von Lehrbüchern sollte überhaupt in solchen Aufgabensammlungen vermieden werden.

Um das Werk den neuesten Lehrplänen anzupassen, haben die Verf. aus dem ersten Teil diejenigen Gebiete herübergenommen, welche von dem Pensum der Untersekunda getrennt und demjenigen der Obersekunda einverleibt worden sind. Hierbei hätte aber noch sorgfältigere Kritik geübt oder mehr ausgemerzt werden müssen, als es geschehen ist

(vgl. bes. die Gleichungen auf S. 3). Ferner sind bekanntlich durch die Lehrpläne Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung zum Gegenstande des Unterrichts wieder gemacht worden. Ref. hätte gerade hier eine gröfsere Vielseitigkeit in den Aufgaben gewünscht, um diese Kapitel dem Lernenden schmackhaft zu machen, und um den Nutzen dieser Disziplinen denjenigen vor Augen zu bringen, welche von der Wiedereinführung derselben sich keinen Erfolg versprechen. Endlich ist zu bemerken, dafs die analytische Geometrie im 4. Abschnitt zwar herangezogen ist, dafs es sich aber nicht rechtfertigen läfst, wenn für Realanstalten (Ausgabe B) der Stoff in demselben Mafse wie für das Gymnasium (Ausgabe A) begrenzt wird.

Zum Schlufs sei besonders hervorgehoben, dafs dieser zweite Teil gegen den ersten durch die verhältnismäfsig verschwindende Zahl von Druckfehlern sich vorteilhaft abhebt.

Berlin. H. Opitz.

H. Fenkner. Arithmetische Aufgaben. Unter besonderer Berücksichtigung von Anwendungen aus dem Gebiete der Geometrie, Physik und Chemie. Ausgabe A, vornehmlich für den Gebrauch in Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen. Teil I: Pensum der Untertertia, Obertertia und Untersekunda. 4. durchgesehene Auflage. Berlin 1901, O. Salle.

Für den Wert dieser Sammlung spricht gewifs die Thatsache, dafs seit Ende 1889 bereits die 4. Auflage erschienen ist. Obgleich das Buch ein vollständiges Lehrbuch der Algebra nicht ersetzen soll, weil „die Beweise der den Aufgabengruppen voraufgehenden Lehrsätze vielfach nur durch Anwendung auf Zahlenbeispiele erläutert sind“, so hält Ref. es dennoch für überflüssig, ein Lehrbuch neben dieser Sammlung einzuführen. Durch die höchst geschickte Anordnung des Stoffes und die Vielseitigkeit der Anwendungen wird das Werk einen hervorragenden Platz unter den neueren methodischen Aufgabensammlungen bewahren.

Berlin. H. Opitz.

V. Bjerknes. Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte nach C. A. Bjerknes' Theorie. Bd. I. 338 S. mit 40 Figuren im Text. Leipzig 1900, J. A. Barth.

Das vorliegende Buch ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die V. Bjerknes, der Sohn und vieljährige Mitarbeiter von C. A. Bjerknes, über die bisher nicht im Zusammenhange publizierten Untersuchungen des letzteren an der Universität Stockholm gehalten hat. C. A. Bjerknes wurde bei seinen hydrodynamischen Untersuchungen von dem Gesichtspunkte geleitet, dafs man, um sich ein zusammenhängendes Bild von den physikalischen Erscheinungen — insbesondere den elektromagnetischen — zu machen, dieselben durchweg auf *mechanische* Vorgänge reduzieren müsse, und dafs dabei die Fernkräfte auf die unserem Vorstellungsvermögen vertrauteren Berührungskräfte zurückzuführen seien. Zu diesem Zwecke wird ein raumerfüllendes Medium angenommen, dem die Eigenschaften einer homogenen, reibungslosen, inkompressiblen Flüssigkeit beigelegt werden. In dieser Flüssigkeit denkt sich

Bjerknes ein System von beliebig vielen Kugeln schwimmend, welche aufser Translationsbewegungen auch Kontraktions- und Expansionsbewegungen ausführen können. Die Kugeln werden sich dann durch Vermittelung der Bewegungen der Flüssigkeit gegenseitig beeinflussen, und ein Beobachter, welcher wohl die Kugeln, aber nicht die Flüssigkeit wahrnehmen kann, wird den Eindruck haben, dafs die ersteren *Fernkräfte* auf einander ausüben. Die eingehende Untersuchung dieser scheinbaren Fernkräfte bildet den Inhalt des vorliegenden Buches. Ganz abgesehen von den sich dabei ergebenden Analogien zu den elektrischen und magnetischen Wirkungen ist die Untersuchung an sich von Interesse als ein vollständig durchgeführtes Beispiel zu dem von H. Hertz seiner Mechanik zu Grunde gelegten Prinzip der Zurückführung *aller* Kräfte auf *verborgene Bewegungen*. Es ist übrigens zu bemerken, dafs die Bjerknesschen Arbeiten längst abgeschlossen waren, als die Hertzsche Mechanik erschien, und dafs die Grundidee derselben aus einer Zeit stammt, wo noch nicht durch Maxwells bahnbrechende Forschungen die Überlegenheit der Feldwirkungsvorstellung über die Fernwirkungsvorstellung zur Geltung gebracht war.

Der Gang der im vorliegenden Bande enthaltenen Entwickelungen ist im wesentlichen folgender. Nachdem im 1. Teil die zu benutzenden allgemeinen Voraussetzungen aus der Theorie der Vektorfelder und die Grundgleichungen der Hydrodynamik zusammengestellt sind, wird im 2. Teil die rein *kinematische* Untersuchung der durch gegebene Bewegungen (Volumänderungen und Translationen) der Kugeln verursachten Flüssigkeitsströmungen durchgeführt. Nachdem der Einflufs einer einzelnen Kugel auf einen beliebigen sie treffenden Flüssigkeitsstrom behandelt ist — wobei die Strömungslinien in den charakteristischen Fällen stets graphisch veranschaulicht werden —, wird das Geschwindigkeitspotential für den allgemeinen Fall beliebig vieler Kugeln durch successive Annäherung gebildet, immer unter der Voraussetzung, dafs die Radien der Kugeln klein sind gegen ihre gegenseitigen Abstände. Die Annäherung wird jedoch höchstens bis zum 3. Grade getrieben, wobei die Rückwirkung der übrigen $n-1$ Kugeln auf die von der $n$ten in ihrer Umgebung erzeugten Strömung eben noch berücksichtigt wird.

Es folgt im 3. Teil die Berechnung des Druckes, welchen eine einzelne unter Volumänderung bewegte Kugel in einem gegebenen Flüssigkeitsstrome erfährt, und des Einflusses dieses Druckes auf die Bewegung der Kugel. Von besonderer Wichtigkeit erweist sich hier die Zerlegung der hydrodynamischen Druckkraft (d. h. der aus dem Flüssigkeitsdruck resultierenden Kraft) in zwei Partialkräfte, deren erste ein totaler Differentialquotient nach der Zeit ist und von Bjerknes als *Induktionskraft* bezeichnet wird, während die Komponenten der zweiten, welche *Energiekraft* genannt wird, aus Produkten von Geschwindigkeiten zusammengesetzt erscheinen und sich als partielle Ableitungen der kinetischen Energie der Flüssigkeit nach den Koordinaten des Kugelmittelpunktes darstellen lassen. Es ergiebt sich nämlich, dafs im Falle schwingender Bewegungen mit Amplituden, die klein sind im Vergleich zum Radius der Kugel, die „Induktionskraft“ selbst zwar sehr grofs ist im Verhältnis zur „Energiekraft“, aber den Mittelwert Null hat, während derjenige der „Energiekraft“ im allgemeinen von Null verschieden ist; insbesondere wird in dem Falle, dafs die Flüssigkeitsbewegung

von *synchronen* Schwingungen (Pulsationen, Oszillationen) des Kugelsystems herrührt, die „Energiekraft“ nach Richtung und Vorzeichen konstant und nur der Intensität nach periodisch schwankend. Die „Induktionskraft“ bestimmt also die gegenseitige Beeinflussung der Schwingungen der Kugeln, der Mittelwert der „Energiekraft“ hingegen deren dauernde gegenseitige Einwirkungen. Die letzteren sind für einen Beobachter, welcher die kleinen Schwingungen der Kugeln sowie die Flüssigkeit nicht wahrnehmen kann, die einzigen beobachtbaren Wirkungen — sie sind dann die gesamten „scheinbaren *Fernkräfte*“ zwischen den Kugeln. —

Im 4. Teile werden die hydrodynamischen Fernkräfte zunächst allgemein — ohne die spezielle Annahme periodischer Bewegungen — behandelt. Dabei wird die Induktionskraft zerlegt in die „selbstinduzierende“, welche nur von der Bewegung der einen behandelten Kugel abhängt und lediglich eine scheinbare Vermehrung ihrer *Trägheit* bewirkt, und in die „fremdinduzierende“, welche von der durch die anderen Kugeln erzeugten Flüssigkeitsströmung abhängt und daher der scheinbaren Fernkraft zuzurechnen ist.

Die *energetischen* Fernkräfte werden ihrerseits in „permanente“ und „temporäre“ eingeteilt; letztere sind in Bezug auf das Verhältnis der Kugelradien zu den Kugelabständen von 5. bis 7. Ordnung und werden daher auch als „Fernkräfte höherer Ordnung“ den „induzierenden“ und „permanent-energetischen“, welche von 2. bis 4. Ordnung sind, gegenübergestellt. Nur die letzteren — die Fernkräfte niederer Ordnung — besitzen die Eigenschaft der Superponierbarkeit; es tritt daher eine grofse Vereinfachung ein, wenn sie zunächst für sich betrachtet werden. Es zeigt sich nun, dafs für den energetischen Teil dieser Kräfte niederer Ordnung, welcher, wie schon oben betont wurde, im Falle kleiner Schwingungen allein zur Wirkung kommt, überhaupt die Grundeigenschaften gelten, welche in der Galilei-Newtonschen Mechanik für die Fernkräfte zwischen materiellen Punkten vorausgesetzt werden, insbesondere das gewöhnliche Trägheitsprinzip, die Unabhängigkeit der Kraft von der Bewegung ihres Angriffspunktes und die Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung.

Indem nun speziell die scheinbaren Fernkräfte niederer Ordnung zwischen synchron schwingenden Kugeln untersucht werden, ergeben sich grofse Analogien mit den elektrischen und magnetischen ponderomotorischen Kräften; und zwar wirken *pulsierende* Kugeln wie *elektrische bezw. magnetische Massenpunkte*, deren Masse der mittleren Volumänderungsgeschwindigkeit, und *oszillierende* Kugeln wie *magnetische Moleküle*, deren Moment dem Produkte aus dem Volumen und der mittleren Lineargeschwindigkeit der Kugeln proportional ist; die Analogie ist jedoch eine *inverse*, insofern mit *gleicher* Phase pulsierende bezw. oszillierende Kugeln auf einander wirken wie *entgegengesetzte* Pole bezw. entgegengesetzt gerichtete Elementarmagnete. Aufserdem sind die Wechselwirkungen der Flüssigkeitsdichte proportional, welche somit die Rolle der Dielektrizitätskonstante oder magnetischen Permeabilität des Zwischenmediums spielt. Auch die hydrodynamischen Fernkräfte höherer Ordnung zwischen synchron schwingenden Kugeln finden ihr (inverses) Analogon in elektrischen und magnetischen Kräften, nämlich in den Wirkungen auf ursprünglich neutrale kleine Kugeln, welche durch das Feld der Pole bezw. Elementarmagnete ein induziertes („*temporäres*“) elektrisches oder magnetisches

Moment erhalten haben. Hierbei zeigen die Kugeln, je nachdem ihre Dichte kleiner oder gröfser ist als die der Flüssigkeit, eine entsprechende Verschiedenheit des Verhaltens, wie paramagnetische und diamagnetische Körper im Magnetfelde. Eine Folge dieser Fernkräfte höherer Ordnung, welche an sich von Interesse ist, da sie z. B. die Erklärung der *Kundtschen Staubfiguren* enthält, ist die, dafs sich ursprünglich ruhende und regellos verteilte Kugeln in einem oszillierenden Strom in Flächen senkrecht zur Oszillationsrichtung anordnen.

Im letzten Abschnitt des Bandes giebt der Verf. eine Übersicht der historischen Entwickelung der Theorie der hydrodynamischen Fernkräfte, wobei besonders auch die Stellung der von Bjerknes bevorzugten rein hydrodynamischen Untersuchungsmethode zu der von Lord Kelvin und Kirchhoff angewandten Methode des Hamiltonschen Prinzips erörtert wird. Während die letztere Methode nur die gleichzeitige Betrachtung des ganzen Systems der in der Flüssigkeit vorhandenen starren Körper gestattet, ist die erstere auch brauchbar, um den Einflufs eines gegebenen Flüssigkeitsstromes auf eine einzelne Kugel zu untersuchen. Die sich an diese Untersuchung knüpfende Frage nach den Analogien der hydrodynamischen *Stromfelder* mit den elektrischen und magnetischen Feldern soll im 2. Bande, der aufserdem eine Darstellung der *experimentellen* Untersuchungen der hydrodynamischen Fernkräfte enthalten wird, eingehend behandelt werden.

Heidelberg. F. Pockels.

John Schröder. Darstellende Geometrie, I. Teil. Elemente der darstellenden Geometrie. Sammlung Schubert XII. Leipzig 1901, G. J. Göschen. 282 Seiten.

Auf den ersten 10 Bogen werden die Projektionen von Punkten, Geraden und Ebenen erörtert und die sogenannten Fundamentalaufgaben gelöst, auf den nächsten 5 Bogen die gewonnenen Ergebnisse auf die Darstellung ebener Vielflache angewendet, worauf ein mit dem Vorigen nur lose in Zusammenhang stehender Abschnitt über Kegelschnitte sowie über angenäherte zeichnerische Tangentenkonstruktion und Rektifikation ebener Kurven folgt. Die Darstellung ist im allgemeinen durchsichtig und sorgfältig, nur manchmal etwas zu weitschweifig; sie wird durch eine sehr grofse Anzahl von Figuren unterstützt. Die allzukonsequente Durchführung der einmal gewählten Bezeichnungsweise, ohne Rücksicht auf Häufung der Indices, scheint dem Referenten kaum geeignet, das Studium der Figuren zu erleichtern; sie hat auch etliche störende Druckfehler verschuldet. Sachliche Fehler finden sich z. B. auf S. 80 u. 93, wo übereinstimmend der merkwürdige Satz gelehrt wird, eine Ebene könne nicht gleichzeitig auf drei Projektionsebenen senkrecht stehen, von denen keine zwei einander parallel sind.

Alles in allem dürfte das Buch für den Anfäger ein ganz angenehmes Unterrichtsmittel und zum Selbststudium wohl zu empfehlen sein.

Halensee. R. Skutsch.

Ludwig Schlesinger. Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabeln. Leipzig, G. J. Göschen (Sammlung Schubert). VIII + 309 S. 8°.

Der vorliegende Band der „Sammlung Schubert" reiht sich den bereits erschienenen Bänden würdig an; sein Charakter ist hauptsächlich dadurch gekennzeichnet, dafs er eine im wesentlichen unveränderte Wiedergabe der Vorlesungen ist, die Verf. im W. S. 1899 an der Universität Klausenburg gehalten hat. Dadurch ist bedingt, dafs Verf. bei der Abfassung seines Buches mehr methodisch als systematisch zu Werke gegangen ist und sich von dem Prinzip „non multa, sed multum" hat leiten lassen. Der Leser wird daher vieles in dem Buche nicht finden, was in anderen Werken über Differentialgleichungen behandelt wird, so z. B. die Theorie des Eulerschen Multiplikators, die geometrischen Untersuchungen von Darboux, Picard und Poincaré und die nichtlinearen Differentialgleichungen höherer als erster Ordnung. Aber was er dort findet, ist so gründlich durchgearbeitet, dafs er mehr Nutzen davon hat, als wenn er irgend ein umfassendes Kompendium benutzt; denn er wird dadurch in den Stand gesetzt, das Wesen der Forschungsmethode kennen zu lernen. Ref. kann daher dem Verf. nur beistimmen, wenn dieser in dem Vorwort sagt: „Es kommt für den Anfänger nicht so sehr darauf an, dafs er gleich die ganze Tragweite einer bestimmten Methode kennen lernt, als vielmehr darauf, dafs er zunächst ihr Wesen richtig erfafst. Um dieses Ziel zu erreichen, genügt es aber, die betreffende Methode an Beispielen zu entwickeln, die einerseits so allgemein sind, dafs keine der Schwierigkeiten, die durch das Wesen jener Methode überwunden werden sollen, fehlt, und andererseits so speziell, dafs Schwierigkeiten accessorischer Natur möglichst vermieden werden." — Verf. hat sich also, abgesehen von der Einleitung, ausschliefslich auf die funktionentheoretische Behandlung der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, an denen er aber die ganze Theorie der allgemeinen linearen Differentialgleichungen entwickelt, und der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung beschränkt, „während darüber hinausgehende Fragen nur kurz formuliert und durch Litteraturnachweise belegt sind". Dabei war ihm der Gesichtspunkt mafsgebend, dafs die Grundlage für einen systematischen Aufbau der Theorie der Differentialgleichungen in der Unterscheidung zwischen festen und mit den Anfangswerten verschiebbaren Singularitäten zu finden ist.

Trotz der Beschränkung, die Verf. sich auferlegt, hat der Stoff sich noch reichhaltig genug gestaltet, und er ist durchweg mit Benutzung der neuesten, stets vom Verf. angegebenen Litteratur behandelt, so dafs der Leser auf der Höhe der Wissenschaft steht und sich über Gebiete, die ihn besonders interessieren, weiter unterrichten kann — ein nicht zu unterschätzender Vorteil. — Allerdings wird nur derjenige „Anfänger" den gewünschten Nutzen von dem Buche haben, der nicht nur, wie Verf. in der Einleitung meint, mit den „Elementen" der Infinitesimalrechnung, sondern auch mit den Hauptgebieten der Funktionentheorie wohl vertraut ist.

Charlottenburg. G. Wallenberg.

Laurent. L'élimination. Sammlung Scientia. Paris 1900, Carré et Naud. 8⁰. 75 S.

Zunächst wird gezeigt, wie man durch die Division $\varphi'(x) / \varphi(x)$ die Potenzsummen der Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$ und daraus als gewisse Determinante das Produkt der Wurzeln finden kann. Die Reihenentwicklung $\psi(x)\varphi'(x) / \varphi(x)$ führt in entsprechender Weise zu dem Produkt $\Pi\psi(\alpha)$. Durch dieses Produkt wird die Resultante $R(\varphi, \psi)$ erklärt und ihre Berechnung wird durch die vorher abgeleiteten Formeln auf möglichst einfache Weise versucht. Es folgen die allgemeinen Eliminationsmethoden und die Eigenschaften von R. Der Übergang zur Eliminante und die Auflösung zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten schliefst den ersten Teil. Der zweite Teil behandelt dieselben Fragen für mehrere Veränderliche und bringt in dieses Gebiet gehörige Formeln, wie die Jacobischen Formeln und die Interpolation. Einige besondere Fälle, z. B. Störungsgleichung, homogene Gleichungen, sowie ein kurzer Ausblick in die Elimination bei transzendenten Gleichungen, schliefsen das interessante kleine Werk, das mit grofser Schärfe und Klarheit geschrieben ist. Leider wird allerdings die Lektüre durch die vielen Druckfehler arg beeinflufst.

Dortmund. H. Kühne.

G. Holzmüller. Elemente der Stereometrie. II. Leipzig 1900, G. J. Göschen. 8⁰. 477 S.

Der zweite Teil enthält die Berechnung einfach gestalteter Körper. Er bietet eine aufserordentliche Fülle von Formeln und Übungsmaterial dar. Die beiden ersten Abschnitte betreffen prismatische und pyramidenartige Körper und ihre Abschrägungen. Besonders reichhaltig ist der dritte Abschnitt, der die unregelmäfsigen Vielflache und darunter genauer das Vierflach behandelt und der mit Hilfe des Cavalierischen Prinzips auch nichtebenflächige Körper in den Kreis seiner Betrachtung zieht. Den letzten Abschnitt bildet die Kugel mit ihren mannigfachen astronomischen, nautischen und geodätischen Anwendungen. Die Aufgaben nehmen durchweg Rücksicht auf die Anwendungen der Mathematik und umfassen alle Gebiete. Die der Darstellung eingestreuten geschichtlichen Bemerkungen werden manchem Leser willkommen sein. Überhaupt bietet dieser Band durch seine Reichhaltigkeit eine Fülle von Anregungen.

Dortmund. H. Kühne.

J. Henrici und **P. Treutlein. Lehrbuch der Elementar-Geometrie.** III, 2. Auflage, Leipzig 1901, B. G. Teubner. 8⁰. 192 S.

In dieser Neubearbeitung prägt sich der Grundgedanke, die geometrischen Wahrheiten von der Anschauung her durch den Begriff des Abbildens abzuleiten, noch schärfer aus. Der erste Abschnitt enthält die Elemente der Stereometrie, dabei in Verbindung mit der Kegelfläche die Erklärung der Kegelschnitte und im Anschlufs an das Dreikant die Kugeldreiecksrechnung. Der folgende Abschnitt behandelt die einfachen Körper. Der dritte endlich ist der Abbildung einer Ebene auf eine andere gewidmet und enthält hauptsächlich eine Betrachtung der Kegelschnitte. Die Auf-

gabensammlung ist vermehrt und um einige Aufgaben der darstellenden Geometrie bereichert.

Dortmund. H. Kühne.

W. Pflieger. Elementare Planimetrie. Sammlung Schubert. Leipzig 1901, G. J. Göschen. 8⁰. 430 S.

Dem praktischen Bedürfnis trägt der Verf. insofern Rechnung, als er die geometrischen Begriffe ihrer sonst üblichen abstrakten Form entkleidet und sie durch mechanische und andere Anschauungsmittel zum Verständnis zu führen sucht. Nach den Grundgebilden werden die Begriffe der Symmetrie, Kongruenz, Gleichheit erläutert. Es folgen die elementaren Kreissätze und im Anschlufs daran die Erklärung des Winkels als eines Sektors eines unendlich grofsen Kreises. Diese Erklärung mag manches Gute haben, für ein Lehrbuch, das mit leicht anschaulichen Mitteln arbeitet, halte ich sie für zu umständlich. Auch glaube ich nicht, dafs „der Winkel thatsächlich wie ein Sektor gemessen und verglichen" wird, sondern dafs es mit dem Bogen geschieht. Die Begriffe Sektor und Bogen sind aber doch sehr verschieden. Es folgen die Parallele und der Streifen, d. h. das Gebiet zwischen zwei Parallelen und im weiteren Verfaufe die üblichen einfachen planimetrischen Lehrsätze. Im Anschlufs an die harmonischen Gebilde befindet sich eine gute Darstellung der Kreisverwandtschaft. Das Lehrbuch ist einfach und klar geschrieben, auch regen die beigefügten Übungen zur Weiterbildung an.

Dortmund. H. Kühne.

F. Bolte. Die Nautik in elementarer Behandlung. Stuttgart 1900, J. Mayer. 8⁰. 196 S.

In übersichtlicher und leicht verständlicher Weise führt der Verf. in die Grundbegriffe und -lehren der Nautik ein. Worterklärungen und mathematische Begründungen begleiten die Darstellung. Die in der Praxis vorkommenden Aufgaben sind durch eine Reihe gelöster Beispiele erläutert; aufserdem enthält das Buch eine Sammlung ungelöster Aufgaben, die ihrer Anschaulichkeit wegen den Lehrern der Trigonometrie empfohlen seien. Nach der Besprechung von Kompafs und Logge und ihrer Bedeutung für Fahrtrichtung (Kurs) und durchfahrene Strecke (Distanz) wird zunächst die Küstenschiffahrt behandelt. Es folgt die Besteckrechnung, die Beziehungen zwischen Kurs und Distanz, einerseits Anfang und Ende der Bewegung andererseits herstellt. Der nächste Abschnitt behandelt die Schiffahrt nach astronomischen Beobachtungen und gipfelt schliefslich in der Lagenbestimmung [Standlinie] eines Schiffes durch eine oder zwei Gestirnhöhen. Hieran schliefst sich die Ermittelung der Elemente der Kompafsmifsweisung. Für die Rechnung nötige Tafeln vervollständigen das Buch. Darstellung und Begriffsbestimmung des Buches sind klar und scharf mit Ausnahme der Stellen, an denen der Verf. mechanische Begriffe streift. Ich würde z. B. bei der Stromschiffahrt nicht von einem Kräfte-, sondern von einem Geschwindigkeitsparallelogramm sprechen. Im übrigen dürfte das Buch für den Lehrer der Mathematik von grofsem Interesse sein, weil es eine Fülle anschaulicher Anwendungen dieser Wissenschaft zeigt.

Dortmund. H. Kühne.

H. Martus. Mathematische Aufgaben. III (Aufgaben) und **IV** (Ergebnisse). Dresden 1901, C. A. Koch. 182 S.

Der Nutzen, den die Martussche Sammlung beim Unterricht gewährt, und die Anregung und Förderung, die sie den jüngeren Mathematikbeflissenen darbietet, werden überall anerkannt. Es ist deshalb sehr schätzenswert, dafs der Verf. sich der zeitraubenden und mühseligen Arbeit noch einmal unterzogen und eine Fortsetzung der ersten Arbeit geliefert hat. Die Fortsetzung enthält unter 1300 Nummern 1363 Aufgaben, die sich mit der Dreiecksrechnung, der Körperlehre, den Reihen, der Kugeldreiecksrechnung und der Achsenraumlehre beschäftigen.

Dortmund. H. Kühne.

Thilo von Trotha. Die kubische Gleichung. Berlin 1900, Wilhelm Ernst & Sohn. 8°. 61 S.

Der Verf. nennt die vorliegende Abhandlung einen Versuch. Ich glaube, er hätte diesen Versuch unterlassen, wenn er die grofse Mühe, die die Arbeit ihm sicher gemacht hat, dazu verwendet hätte, sich vorher die bekannten Auflösungsmethoden der kubischen Gleichungen anzueignen. Das in dem Hefte mit grofser Weitschweifigkeit und vieler Rechnung auseinandergesetzte Verfahren ist folgendes: Ersetzt man in der Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ x durch $A - \frac{1}{3}a$, so verwandelt sie sich in $A^3 - 3sA - S = 0$. Die weitere Substitution $A = \sqrt{s}y$ würde zu $y^3 - 3y - E = 0$ führen. Ein vernünftiger Gedanke wäre es nun, für $y^3 - 3y$ als Funktion von y eine Tabelle aufzustellen, aus der sich y bei bekanntem E ablesen und x bestimmen liefse. Statt dessen setzt der Verf. $A = \sqrt{sz}$ und stellt für $\sqrt{(3-z)^2z}$ als Funktion von z eine Tabelle auf. So bestimmt er z und x. Die bei der Radizierung auftretende Zweideutigkeit führt den Verf. zu dem sonderbaren Begriff der Nebenwurzeln. Ausführliche Tabellen für E beschliefsen die Arbeit.

Dortmund. H. Kühne.

E. Jochmann, O. Hermes und **J. Spies. Grundrifs der Experimentalphysik.** Berlin 1900, Winckelmann & S. 8°. XIX + 523 S.

Die vorliegende vierzehnte Auflage des bekannten und beliebten Lehrbuches hat durch die Umarbeitung seitens seiner Herausgeber wiederum namhafte Verbesserungen erfahren, die sich hauptsächlich in seinem Abschnitte über Elektrizität bemerkbar machen.

Gerade dieser Abschnitt ist infolge der stetig sich mehrenden Neuentdeckungen und seiner immer engeren Verknüpfung mit der modernen Technik zu einem der wichtigsten der naturwissenschaftlichen Lehrgebiete geworden; er wird am ehesten durch veränderte Anschauungen veralten und ständiger Durchsicht bedürfen.

In der allgemeinen Anordnung des Stoffes ist nichts Wesentliches geändert. Im Paragraphen 4 finden wir neben den Grundmafsen als Hilfsmittel der Messung den Nonius erwähnt. Unserer Meinung nach könnte dieser Vorrichtung, die heute bereits ein Gemeingut der gesamten Technik

geworden ist, ein etwas breiterer Raum gewidmet werden, dieses Hülfsmittel in seinem Prinzip genau besprochen und durch einige klarere Abbildungen erläutert werden. Eine Schubleere würde die vorhandene Figur mit Vorteil ersetzen. Die trefflich zusammengestellten chemischen Grundbegriffe bedürfen keines Kommentars.

Als Überschrift des § 31 würde der Referent statt des Wortes „Beharrungsvermögen", das heute so ziemlich aus der Sprache der Physik verbannt ist, das Wort „Trägheit" vorgezogen wissen. In enger Anlehnung an den Versuch und mit bemerkenswerter Klarheit sind die Fallgesetze erläutert. Bei den Flaschenzügen wäre die Erwähnung des vielbenutzten Schraubenflaschenzuges und damit die Besprechung des Schraubengetriebes wohl erwünscht. Beim § 56 kommt in der Anmerkung mit einemmale der Begriff „Centripetalkraft" vor, ohne daſs seine Identität mit dem sonst gebrauchten Ausdruck „Centralkraft" festgestellt wäre. Die Ungenauigkeit hat jedenfalls nicht im Interesse des Herausgebers gelegen.

Im § 63 ist die Figur 58 unrichtig. Sie war bereits in der neunten Auflage falsch, ist zum Teil, aber nicht ganz, richtig gestellt worden. Das Steigerad hat zu viele und zu kleine Zähne. Der Ankerbügel ist zu weit offen, sodaſs beim Austritt des Ankers aus dem Rad an der rechten Seite das Rad ganz freigegeben wird, ehe sich die Sperre an der linken Seite einlegt. Gerade solche Abbildungen müſsten absolut korrekt sein, damit sie dem Schüler eventuell die richtige Nachahmung gestatten. Bei den Luftpumpen § 97 gefällt dem Referenten nicht, daſs so gar nicht auf die Konstruktionen der Technik Bedacht genommen ist. Das Blasenventil, das heute wohl kaum mehr angewandt wird, ist dagegen ausführlich beschrieben. Prinzipiell wichtige Dinge zur Steigerung des Vakuums wie das Pumpen eines Cylinders in den anderen sind gar nicht erwähnt. Als Quecksilberluftpumpe würde die Beschreibung einer richtigen Töpler-Hagen-Pumpe empfehlenswerter sein, wie auch an dieser Stelle die Sprengelpumpe angeführt werden müſste und nicht im § 105, wo sie gar nicht hingehört. Die Besprechung der Klangfarbe und des Phonographen bilden notwendige Bereicherungen des Inhaltes. Im § 232 ist bei Besprechung der Wärmeleitfähigkeit auf einen Versuch mit Loosers Differentialthermoskop hingewiesen und zur Orientierung die Publikation herangezogen. Für den Rahmen eines Werkes wie der „Jochmann" hält Referent das nicht für richtig, weil die angezogene Veröffentlichung wohl nur einem kleinen Leserkreise zur Verfügung stehen dürfte. Man sollte den Apparat entweder kurz beschreiben oder füglich ganz fortlassen. Der Platz, den die Beschreibung des Spielzeuges Trevelyans beansprucht, würde für eine kurze Erklärung des Thermoskopes wohl genügen.

Vortrefflich ist dem Herausgeber die Erklärung der Influenzmaschine gelungen und die begleitende Abbildung zur Verdeutlichung des Vorganges in ihrer Einfachheit höchst instruktiv. Ebenso gut sind die Umarbeitungen der folgenden Abschnitte, welche die Kondensatoren und den Entladungsvorgang behandeln. Die Bezugnahme auf das Gesetz von der Erhaltung der Energie bei der Besprechung der Voltaschen Gesetze ist höchst wichtig, weil dadurch ein für allemal Miſsverständnissen über Stromerzeugung vorgebeugt wird, die sich wohl gewöhnlich bei der bisherigen Darstellung bei dem Lernenden einstellten. Im Paragraphen 315a ist ein Kraftlinienbild 265a

dargestellt, das wirklich zweckmäſsig durch eine photographische Reproduktion ersetzt werden sollte; dasselbe entspricht einmal nicht der Wirklichkeit und vermag die leidige Anschauung, als sei eine magnetische Kraftlinie eine Art von Zwirnsfaden noch so recht zu unterstützen. Im Anschluſs an den § 316a vermisse ich die Besprechung des Galvanometers nach Deprez-d'Arsonval resp. Weston, die heute einer genauen Erklärung wohl wert sind; sie sind im nächsten Abschnitt erwähnt, würden aber organisch sich besser in den vorhergehenden einfügen. Die Abbildung der Röntgenröhre mit ihrem Strahlengang ist nicht gut gewählt; die Kathodenstrahlen vereinigen sich auf einen Punkt der Antikathode, das Bündel der Röntgenstrahlen geht dagegen von der ganzen Antikathodenoberfläche aus. Man sollte stets andeuten, daſs die Röntgenstrahlen, die von einer planen Antikathode ausgehen, ein Bündel bilden, das über die ganze Halbkugelzone gleichmäſsig verteilt ist. Bei der Nernstlampe ist Magnesia als Leuchtmaterial genannt; der Ausdruck Oxyd der seltenen Erde wäre jedenfalls treffender. Wichtig war die Besprechung des Accummulators und endlich und hauptsächlich die der klassischen Arbeiten von Hertz.

Zu den folgenden Abschnitten des Buches, welche mathematische Geographie und Astronomie behandeln, sind wesentliche Abänderungen in der Darstellung gegenüber den früheren Auflagen nicht vorgenommen; sie waren ohnehin von jeher durch Klarheit und Schärfe des Ausdrucks ausgezeichnet. Im allgemeinen hat das Werk in wesentlichen Punkten durch seine Umarbeitung gewonnen.

Es sollte den Referenten freuen, wenn seine hier und da ausgesprochenen Wünsche eine geneigte Beachtung in der Zukunft fänden. Jedenfalls wird das Buch jedem, der es zu ernstem Studium in die Hand nimmt, voll und ganz das halten, was er sich versprochen, und wird sich so einen immer weiteren Freundeskreis sichern.

Berlin. H. Boas (Oberingenieur).

Federico Amodeo. Aritmetica particolare e generale. Volume I degli Elementi di matematica. Opera destinata alle scuole secondarie del regno d'Italia. Napoli 1900, Luigi Pierro. XV + 415 p.

Seit Cremona im Jahre 1865 Baltzers Elementarlehrbücher ins Italienische übersetzte, hat sich auch in Italien eine strengere Art, die grundlegenden Sätze der Mathematik zu sichern, eingebürgert. Hr. Amodeo versichert dieses in seiner Vorrede, und zahlreiche italienische Schriften bestätigen es. Das heute uns vorliegende Buch ist eine neue Bestätigung. Es behandelt die Lehren der niederen Arithmetik mit vollkommener Strenge, so daſs man fast zu der Frage gelangen könnte, ob denn Schüler im stande seien, dieses Lehrbuch zu verstehen? Der Lehrer wird es unzweifelhaft auch auſserhalb Italien mit groſsem Interesse lesen und seinem Unterrichte so viel davon einverleiben, als er seinen Schülern bieten zu dürfen glaubt. Er wird dabei allerdings auf die Richtigkeit der Beispiele einige Aufmerksamkeit verwenden müssen, auch nachdem die im Druckfehlerverzeichnisse angegebenen Verbesserungen vorgenommen sind, da noch zahlreiche weitere Irrtümer recht störend wirken.

Heidelberg. M. Cantor.

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze.

48. Es ist ein Kreis vom Radius k gegeben, und es wird diejenige Kurve (*Traktorie*) gesucht, deren bis zum Schnitt mit dem Kreis verlängerte Tangenten eine gegebene Länge a besitzen. — Die Aufgabe ist, soweit dem Einsender bekannt, nur in dem Spezialfall $a = k$ näher behandelt und kann unter der allgemeinen Voraussetzung $a \lesseqgtr k$ den Herren Fachgenossen als Übungsaufgabe (oder etwa zur Semestralprüfung) vorgeschlagen werden.

Es soll insbesondere bewiesen werden:

I. Ist $k > a$, so giebt es zwei verschiedene Kurven, die der Aufgabe genügen.

1. Die eine derselben beginnt aufserhalb des Kreises in der Entfernung $k + a$ von dessen Zentrum, tritt später in den Kreis ein und wird zu einer Spirale mit unendlich vielen sich stets verengenden Windungen, welche sich schliefslich einem, dem gegebenen konzentrischen, Kreise vom Radius $\sqrt{k^2 - a^2}$ asymptotisch nähern. Die Tangente (a) ist in der Richtung (dem Sinne) der Kurve zu zeichnen.

2. Die andere beginnt im Inneren des Kreises in der Entfernung $k - a$ von dessen Zentrum und bildet ebenfalls eine Spirale mit unendlich vielen sich aber vergröfsernden Windungen, welche sich (von innen) demselben Kreise asymptotisch nähern. Die Tangente (a) ist entgegengesetzt zur Richtung der Kurve zu ziehen.

II. Ist $k = a$, so wird die erste Kurve zu einer Spirale, deren Windungen sich dem Mittelpunkt des gegebenen Kreises asymptotisch nähern, und die zweite Kurve schrumpft zum Mittelpunkt selbst zusammen.

III. Ist $k < a$, so beginnt die Traktorie in der Entfernung $a + k$ und endet in der Entfernung $a - k$ vom Kreiszentrum; sie ist wiederum eine Spirale, aber mit einer *endlichen* — ganzen oder gebrochenen — Anzahl von Windungen, welche sich mit der Vergröfserung von a bis zur Grenzzahl $\frac{1}{2}$ (für $a = \infty$) verringert. Die Kurve verläuft ganz aufserhalb des Kreises oder schneidet ihn einmal und endet innerhalb desselben, je nachdem $a > 2k$ oder $a < 2k$ ist; in beiden Fällen geht die hinreichend verlängerte Tangente im letzten Kurvenelement sowie diejenige im ersten Kurvenelement durch den Mittelpunkt des Kreises. Der vom Kreiszentrum ausgehende Radius vector der Traktorie bildet also anfangs und zuletzt mit dem Kurven-

element den Winkel Null, dazwischen und zwar *genau nach der Hälfte der Windungen* erreicht dieser Winkel ein Maximum (kleiner als 90^0).

Alle hier beschriebenen Kurven, mit Ausnahme derjenigen unter I,2 besitzen einen Inflexionspunkt, und die durch ihn gezogene Tangente (Wendetangente) *berührt zugleich den Kreis.*

Königsberg i. Pr. L. Saalschütz.

---

49. Gegeben sei ein Tetraeder T. Zu jedem Raumpunkte P gehört ein-eindeutig ein anderer Q, so dafs P, Q die Brennpunkte einer T einbeschriebenen Rotationsfläche 2. Ordnung sind. Dann sind P, Q zugleich konjugiert in Bezug auf das Flächennetz 2. Ordnung, dessen 8 Grundpunkte die 8 Mittelpunkte der T einbeschriebenen Kugeln sind. Und umgekehrt.

Königsberg i. Pr. W. Fr. Meyer.

---

50. Soit S l'un des centres de similitude de deux cercles C et C'. Une droite variable passant par S rencontre C suivant la corde AB, et C' suivant la corde $A'B'$. Trouver les lieux des centres de similitude des cercles ayant pour diamètres AB et $A'B'$.

Constantinople. E. N. Barisien.

---

51. On donne une parabole de sommet O et un point fixe P pris sur l'axe de la parabole. Par le point P on mène une droite variable qui rencontre la parabole en A et B. Montrer que le lieu des centres de quatre cercles tangents aux trois côtés du triangle AOB est une quartique. Déterminer la position du point P pour que cette quartique se décompose en deux droites doubles.

Constantinople. E. N. Barisien.

---

52. Untersuchung der Gestalt der Kurve $y = \sqrt[x]{x}$; Bestimmung der Zahlwerte der Koordinaten ihrer Wendepunkte auf fünf Stellen.

Berlin. E. Lampe.

---

53. Von dem Punkte C in der Ebene einer Parabel zieht man die Tangenten CB_1 und CB_2 (B_1 und B_2 die Berührungspunkte) an die Kurve und errichtet in B_1 und B_2 die Normalen, welche sich in Γ schneiden mögen. Die Koordinaten ξ, η von Γ aus denen von C (x, y) zu berechnen und dann die Verwandtschaft zu untersuchen, in welcher den Punkten C die Punkte Γ entsprechen; insbesondere einfache sich entsprechende Kurvenscharen zu bestimmen. Welche Punkte C fallen mit ihren entsprechenden Γ zusammen?

Gleiche Fragen für die Ellipse und die Hyperbel.

Berlin. E. Lampe.

---

54. Der Ausschlag α eines Pendels gegen die Ruhelage beträgt $179^0 59'$. Wie verhält sich seine Schwingungsdauer T zu der Schwingungsdauer T_0 für unendlich kleine Schwingungen? (Für $\alpha = 180^0$ ist bekanntlich $T = \infty$).

Berlin. E. Lampe.

B. Lösungen.

Zu **32** (Bd. II, S. 213) (Ed. Janisch). Zweite Lösung. Wir zeigen zunächst, dafs die drei Punkte (ma', bc), (mc', ab), s in einer Geraden liegen. Dies ist der Fall nach dem Pascalschen Satze, angewendet auf das Sechseck $c'ma'abc$. Derselbe Satz, angewendet auf das Sechseck $b'ma'acb$, beweist, dafs auch die drei Punkte (ma', bc), (mb', ac), s in einer Geraden liegen. Dies gilt für jeden Punkt von K, folglich auch für m'. Wir zeigen nun, dafs auch die Punkte $(m'a, b'c')$, $(m'b, c'a')$, $(m'c, a'b')$ auf μ liegen. Zu dem Zwecke betrachten wir das Seckseck $m'acc'b'm$. Nach dem Pascalschen Satze liegen die drei Punkte $(m'a, b'c')$, (mb', ac), s in einer Geraden; folglich alle sechs bisher betrachteten Punkte. Vertauscht man in sämtlichen Sechsecken a mit a', b mit b', c mit c', so erhält man den Beweis für die Gerade μ'.

Durch den Strahlenbüschel um s sind die Punktreihen m und m' involutorisch gepaart mit s als Involutionszentrum.

Bezeichnen wir kurz die Strahlenbüschel durch ihre Mittelpunkte, so erkennt man leicht, dafs $s(\mu) \barwedge s(\mu')$ ist, wie folgt. Es ist z. B. $c(m) \barwedge a'(m)$ und $c(m) \barwedge s(\mu')$, da sie dieselbe Punktreihe auf $a'b'$ projizieren. Ebenfalls ist $a'(m) \barwedge s(\mu)$, da sie dieselbe Punktreihe auf bc projizieren. Demnach ist auch $s(\mu) \barwedge s(\mu')$. Die Strahlenbüschel μ und μ' sind daher projektiv und involutorisch, da sich je zwei Strahlen, wie oben gezeigt wurde, gegenseitig entsprechen.

Der duale Satz lautet: Sind abc und $a'b'c'$ zwei perspektive, einem Kegelschnitt K umbeschriebene Dreiseite und ist m eine beliebige Tangente an K, dann gehen die drei Geraden (ma', bc), (mb', ca), (mc', ab) durch einen Punkt μ, welcher auf der Schnittgeraden s der homologen Seiten der Dreiseite liegt. Ist m' die zweite Tangente, welche aus dem Schnittpunkte von m und s an K gelegt wird, dann schneiden sich in demselben Punkte μ die drei Geraden $(m'a, b'c')$, $(m'b, c'a')$, $(m'c, a'b')$. Umgekehrt gehen durch einen anderen auf s liegenden Punkt μ' die sechs Geraden $(m'a', bc)$, $(m'b', ca)$, $(m'c', ab)$, $(ma, b'c')$, $(mb, c'a')$, $(mc, a'b')$. — Die Strahlenpaare (m, m') und die Punktepaare (μ, μ') bilden derart zwei projektive involutorische Gebilde.

Der direkte Beweis wird genau wie oben geführt, indem man statt der Punkte stets Geraden setzt, und umgekehrt.

Einbeck. R. Neuendorff.

Zu **36** (Bd. II, S. 214) (H. Bertram). — Die Strahlenbüschel um O und O_1 sind projektiv aufeinander bezogen, wenn man die Strahlen einander zuweist, welche denselben Punkt des Kegelschnitts projizieren. Dadurch sind dann auch die Punktreihen, welche die Strahlenbüschel in der Geraden μ

durch G einschneiden, projektiv aufeinander bezogen. Sei H der Schnittpunkt (μ, OO_1), so entsprechen die Punkte H und G einander doppelt; denn ist OO_1 ein Strahl des Büschels um O, so entspricht ihm die Tangente in O_1, und umgekehrt. Demnach sind die projektiven Punktreihen involutorisch.

Ist die Gerade GH parallel einer Asymptote, so ist der unendlich ferne Punkt ein Doppelelement der Involution ebenso wie der Schnittpunkt M mit der Kurve. Da demnach je zwei konjugierte Punkte durch M und den unendlich fernen Punkt harmonisch getrennt werden, so müssen sie gleichen Abstand von M haben.

Die in der Aufgabe angegebene Konstruktion liefert in der That eine Hyperbel, da die Strahlenbüschel um O und O_1 entgegengesetzt projektiv sind (die Punktinvolution auf μ besitzt zwei reelle Doppelelemente) und demnach 2 Paar konjugierte parallele Strahlen besitzen, welche die unendlich fernen Punkte der Hyperbel liefern. Trägt man die Strecke OH von O_1 in entgegengesetzter Richtung auf OO_1 ab bis H_1, so ist GH_1 die Richtung der zweiten Asymptote; denn zieht man durch O und O_1 Parallelen zu GH_1, so liegen deren Schnittpunkte gleich weit von M entfernt, da die einzelnen Strecken proportional sind. — H fällt mit H_1 zusammen, wenn H der Mittelpunkt von OO_1 ist. In diesem Falle hat die Kurve nur einen unendlich fernen Punkt (zwei zusammenfallende), ist also eine Parabel.

Unmittelbar folgt daraus die Konstruktion einer Parabel, von welcher zwei Tangenten mit ihren Berührungspunkten O und O_1 gegeben sind. Man halbiere die Sehne OO_1 in H. Den Schnittpunkt der Tangenten G verbindet man mit H und halbiert GH in M. Dann bezieht man 2 Strahlenbüschel um O und O_1 so projektiv aufeinander, dafs je 2 Strahlen konjugiert sind, welche 2 gleich weit von M entfernte, auf GH liegende Punkte projizieren. Diese Strahlenbüschel erzeugen die Parabel.

Einbeck. R. Neuendorff.

Auszug aus einem Schreiben an Herrn F. Meyer.

Zu **37** (Bd II, S. 356) (S. Gundelfinger). Anknüpfend an den Satz des Herrn Gundelfinger, dafs die Lemniskate analog dem Kreise für jeden Punkt eine „Potenz", d. h. ein konstantes Produkt der Sehnenabschnitte liefert, kann man nach allen algebraischen Kurven dieser Art fragen. Ist $F(x, y) = 0$ die Gleichung einer solchen in rechtwinkligen Koordinaten, so müssen die Wurzeln ξ des Systems $F(a + \xi \cos\varphi + \eta \sin\varphi, b + \xi \sin\varphi - \eta \cos\varphi) = 0, \eta = 0$ d. h. der Gleichung $F(a + \xi \cos\varphi,\ b + \xi \sin\varphi) = 0$ ein von φ unabhängiges Produkt haben. Das Produkt der Wurzeln ist $\frac{F(a, b)}{f(\cos\varphi, \sin\varphi)}$, wenn $f(x, y)$ das Aggregat der Glieder höchster Ordnung von $F(x, y)$ ist. Es mufs also $f(x, y)$ konstant sein, wenn $x^2 + y^2 = 1$ ist; d. h. $f(x, y) = c(x^2 + y^2)^n$: die gesuchten Kurven sind die „zyklischen", welche keine anderen unendlich fernen Punkte als die Kreispunkte haben. Dieser Satz ist sofort auf mehr Dimensionen zu übertragen, entweder durch Betrachtung der ebenen Schnitte, die Kurven von der gefundenen Art sein müssen, oder durch einen dem obigen analogen Beweis; denn z. B. aus $f(x, y, z) =$ konst., für $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ folgt $f(x, y, z) = c(x^2 + y^2 + z^2)^n$. Die gesuchten

Flächen im Raume sind also diejenigen, die keine unendlich ferne Kurve als den Kugelkreis haben, z. B. die Zykliden.

Aber wie heifst der analoge Satz für Raumkurven etc.? Übrigens läfst der Satz die affine Verallgemeinerung zu: Mifst man jede Strecke mit dem zu ihr parallelen Radius der „Aichfläche“ $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$, so liefern die und nur die Flächen für jeden Punkt eine konstante Potenz, deren Glieder höchster Ordnung die Form haben: $C(ax^2 + by^2 + cz^2)^n$.

Königsberg i. Pr. TH. VAHLEN.

---

2. Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.

[Einsendungen für den Sprechsaal erbittet Franz Meyer, Königsberg i. Pr., Mitteltragheim 51.]

Zu I A 2. Kombinatorik.

I. S. 40, Anm. 84 ist beizufügen:
A. Hurwitz, Zur Invariantentheorie, Math. Annalen **45** (1894), 389. Es sei gestattet, bei dieser Gelegenheit auch auf die erst nach Erscheinen des Heftes der Encyklopädie publizierte Arbeit von Cyp. Stephanos, Sur une extension du calcul des substitutions linéaires, Journ. de math., 5ᵉ sér., **6** (1900) zu verweisen. — Im Texte wäre vielleicht erwünscht, noch eine Art der mehrfachen Verknüpfung einer Determinante mit sich selbst zu erwähnen; für einen Spezialfall bezeichnet Pascal in seinen Determinanten (Deutsche Ausg. Leipzig, 1900) diese Beziehung als Scholtzschen Satz. Litteratur bei Pascal, a. a. O., S. 104. Beizufügen zu der von Pascal angeführten Litteratur ist noch A. Hurwitz, Math. Annalen, **45**, S. 390. Man bezeichnet die fragliche Determinante passend nach Hurwitz als die Determinante der so und sovielten Potenztransformation.

I. S. 43, letzte Zeile. Das Symbol $(1, 2, \ldots, n)$ tritt schon bei Jacobi auf und zwar an dem in Anm. 105 angeführten Orte, wozu noch beizufügen: Jacobi, Journ. f. d. r. u. ang. Math., **29**, 237.

I. S. 43, Anm. 105. Beweise für den Cayleyschen Satz haben auch Scheibner, Über Halbdeterminanten, Sächsische Berichte (1859), Mertens, Journ. f. d. r. u. ang. Math., **82** gegeben.

Zu I A 6. Endliche diskrete Gruppen.

I. S. 218, Anm. 75. Da der Satz nur implizite bei C. Jordan a. a. O. steht, so wäre Cayley, Americ. J. **1** (1878), 50 = coll. math. papers, X, S. 403 anzuführen; Cayley hat den fraglichen Satz wohl zum ersten Male explizite angegeben. Ferner wäre vor Dyck anzuführen: Frobenius und Stickelberger, Über Gruppen von vertauschbaren Elementen, Journ. f. d. r. u. ang. Math., **86**, S. 230 Anmerkung.

I. S. 220, Z. 6 v. u. des Textes: Lies BAB^{-1}.

I. S. 224, Z. 9 v. u. Cole hat die Gruppen bis zur Ordnungszahl 660 behandelt.

Zu I B 3a. **Separation und Approximation der Wurzeln.**

I. S. 408, Z. 21 v. o. Lies $a + m\triangle \geqq b$.

I. S. 409, Z. 5 v. o. Nach den eingehenden Auseinandersetzungen von G. Darboux (Oeuvres de Fourier, Bd. II, S. 310) verdient das Theorem nur den Namen Fouriers zu führen.

I. S. 411, Z. 14 v. u. Der Satz, „dafs mit wachsendem x die Anzahl der Zeichenwechsel beim Passieren einer Wurzel der Gleichung um eine ungerade Zahl abnimmt und sonst nur um eine gerade Zahl abnehmen kann,“ setzt voraus, dafs die passierte Wurzel einfache Wurzel der Gleichung ist. Es wäre auch Z. 7 v. u. zu bemerken, dafs beim Fourierschen Satze bei der Bestimmung der Zahl der Wurzeln einer Gleichung $f(x) = 0$, die zwischen einer beliebigen Zahl x_1 und einer gröfseren Zahl x_2 liegen, eine jede Wurzel so oft zu zählen ist, wie der Grad ihrer Vielfachheit es angiebt. Dieselbe Bemerkung gilt auch für S. 411, letzte Zeile des Textes.

I. S. 411, Anm. 7. Es wäre noch beizufügen: Fourier, Sur l'usage du théorème de Descartes dans la recherche des limites des racines (1820). Oeuvres de Fourier II, S. 291.

I. S. 412, Anm. 8. Hier wäre auch die Besprechung von Fouriers Analyse des équ. déterm. von Gaufs, ges. Werke III, S. 120 zu erwähnen.

I. S. 428, Z. 10 v. u. Der angeführte Satz ist aus der Arbeit von Cayley, Journ. de math., **11**, 297 zu entnehmen; explizite ausgesprochen wurde er von Borchardt, ebenda, **12**, 58 (1847).

I. S. 433, Z. 6 v. u. Fourier hat thatsächlich die Funktion $f(x)$ durch Funktionen zweiten und höheren Grades ersetzt. Vorzüglich hat er auf diese Weise Betrachtungen für die durch Funktionen zweiten Grades vermittelte Annäherung, die den in I, S. 416 angeführten Sätzen über die lineare Annäherung ähnlich sind, angestellt. Vgl. Fourier, Analyse des équ. déterm.: Artikel 33, 34, 41 ff. des zweiten Buches. (Deutsche Ausgabe von A. Loewy in Ostwalds Klassikern der exakten Wiss. Nr. 127.)

I. S. 439, Z. 1 v. o. Es sollte nicht nur von der gröfsten Wurzel die Rede sein. Da die Notiz über Kettenbrüche sehr kurz ist, sei gestattet, das Folgende zur Ergänzung anzugeben:

Ist die in einen Kettenbruch zu entwickelnde positive Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ mit x bezeichnet, so bestimme man die nächst kleinere positive ganze Zahl a und setze: $x = a + \frac{1}{y}\cdot$ Die sich für y ergebende Gleichung, die mit $f_1(y) = 0$ bezeichnet sei, hat soviel reelle positive Wurzeln, die > 1 sind, als $f(x) = 0$ reelle positive Wurzeln zwischen a und $a + 1$ hat. Man bestimmt eine ganze positive Zahl $a_1 \geqq 1$, so dafs zwischen a_1 und $a_1 + 1$ eine Wurzel von $f_1(y) = 0$ liegt. Setzt man $y = a_1 + \frac{1}{y_1}$, so genügt y_1 einer Gleichung $f_2(y_1) = 0$, die soviel reelle Wurzeln, die > 1 sind, besitzt, wie $f_1(y) = 0$ reelle Wurzeln zwischen a_1 und $a_1 + 1$ hat. Fährt man so fort, so weisen nach einer gewissen Anzahl von Schritten die transformierten Gleichungen nur einen einzigen Zeichenwechsel auf und besitzen daher nach dem Satze von Descartes

nur eine einzige positive Wurzel.[1]) — Vincent hat auch an dem unter 1) angeführten Orte gezeigt: Setzt man in eine Gleichung ohne mehrfache Wurzeln entsprechend dem Lagrangeschen Prozefs der Reihe nach:

$$x = a + \frac{1}{y}; \quad y = a_1 + \frac{1}{y_1}; \quad y_1 = a_2 + \frac{1}{y_2}, \ldots,$$

so gelangt man, wie auch immer sonst die Zahlen a, a_1, ..., die nur positiv und gröfser als 1 vorausgesetzt sind, sein mögen, schliefslich zu transformierten Gleichungen, die entweder nur Zeichenfolgen oder einen einzigen Zeichenwechsel aufweisen. Im zweiten Falle hat die vorgelegte Gleichung den Kettenbruch $a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}}$ zur Wurzel; der erste Fall tritt jedesmal dann ein, wenn der angegebene Kettenbruch keine Wurzel der vorgelegten Gleichung ist. — Lagrange hat auch ein Verfahren angegeben, um die Teilnenner a des Kettenbruches, wenn einige derselben bekannt sind, ohne Probieren zu finden (Oeuvres **8**, S. 120); ist die Rechnung weit genug vorgeschritten, so liefert eine einzige Operation bald mehrere Teilnenner. Vgl. auch Legendre, Théorie des nombres, 3ᵉ éd., I, S. 143; ferner M. A. Stern, Theorie der Kettenbrüche und ihre Anwendung, Journ. f. d. r. u. ang. Math., **11**, S. 277. — Die ganzzahligen quadratischen Gleichungen und die periodischen Kettenbrüche sind in I A 3 (S. 132) behandelt. Die Frage nach den irreduktiblen Gleichungen, welche die Eigenschaft haben, dafs, wenn man ihre reellen Wurzeln nach Lagranges Methode in Kettenbrüche entwickelt, zwei oder mehrere der sich ergebenden Kettenbrüche schliefslich dieselben Teilnenner aufweisen, wurde von Vincent, a. a. O., angeregt und von J. A. Serret, Développements sur une classe d'équations, Journ. de math., **15**, 152 (1850), erledigt. Vgl. J. A. Serret, Cours d'algèbre, II, S. 515 ff. (3ᵉ éd. 1866). Bezüglich der Gleichungen dritten Grades dieser Art vgl. Lobatto, Note sur une propriété relative aux racines d'une classe particulière d'équations du troisième degré, Journ. de math. **9**, 177.

I. S. 439, Z. 6 v. o. Bernoullis Verfahren. Die allgemein D. Bernoulli zugeschriebene Methode geht in Wahrheit auf Lagrange (Traité de la rés. des équ. numériques, Note 6, Sur la méthode d'approximation tirée des séries récurrentes, Oeuvres de Lagrange, 8, S. 168) zurück. Bernoulli behandelt an dem in Anm. 34 erwähnten Orte die Berechnung der Gleichungswurzeln durch rekurrente Reihen. Er giebt den Satz (a. a. O. S. 98): Hat man die Gleichung:

$$x^n = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n$$

und bildet in rekurrenter Weise:

$$P_{n+\nu} = a_1 P_{n+\nu-1} + a_2 P_{n+\nu-2} + \cdots + a_n P_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

1) Lagrange, Traité de la résolution des équ. numériques, Chap. 3 sowie Note 12 (Oeuvres de Lagrange, Bd. 8). Vincent, Note sur la résolution des équations, Journ. de Liouville, 1, 341 (1836).

wobei $P_1, P_2, \ldots, P_n$ n willkürliche Gröfsen sind, so nähert sich der Quotient $\frac{P_{\nu+1}}{P_\nu}$ mit wachsendem ν, falls nicht zwei Wurzeln der Gleichung denselben gröfsten absoluten Betrag haben, einem Grenzwerte, der die gröfste Wurzel der Gleichung ist. Ein analoges Theorem giebt Bernoulli (a. a. O. S. 92) für die absolut kleinste Wurzel der Gleichung. — Die Methode des Textes, wobei die P_ν die νten Potenzsummen s_ν der Gleichungswurzeln sind, findet sich erst bei Lagrange (Oeuvres **8**, S. 170) mit der Bemerkung „Cette méthode rentre dans celle que Daniel Bernoulli a déduite de la considération des suites récurrentes et qu' Euler a exposée en détail dans son Introduction." Die uns heute so geläufige Thatsache, dafs sich durch die ersten n Potenzsummen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung $n$ten Grades die folgenden in rekurrenter Weise ausdrücken lassen, war D. Bernoulli, als er 1728 die fragliche Arbeit veröffentlichte, überhaupt vielleicht nicht bekannt; jedenfalls war dieses Resultat noch nicht publiziert. Die Arithmetica universalis, die 1707 erschienen war, enthält die Newtonschen Formeln bis zur sechsten Potenz mit der Bemerkung et sic in infinitum observata serie progressionis ohne Beweis. Die Summen der $(n+1)$ten und folgenden Potenzen, auf die es bei der rekurrenten Beziehung ankommt, drücken sich ein wenig anders aus; man kann daher sogar vielleicht zweifeln, ob Newton selbst das Gesetz für die Summen der höheren als $n$ten Potenzen kannte. Bewiesen wurden die Newtonschen Formeln erst 1745 von G. F. Bärmann (Bärmanns Arbeit ist abgedruckt in Newtons Arithmetica universalis, ed. Castillioneus (1761), Add., S. 110.) Vor Bärmann erwähnt nur Johann Bernoulli, dafs er einen Beweis für das sehr elegante, von Newton ohne Beweis gegebene Theorem besitze. (Opera IV, S. 22 (ed. 1742)). — An weiterer Litteratur wäre in Anmerkung 34 aufser Lagrange noch beizufügen: Legendre, Théorie des nombres I, Artikel 113, S. 168, 3e éd. — Eine Fortbildung der Methode zur Berechnung sämtlicher Gleichungswurzeln ist zuerst von Fourier, Analyse des équ. déterm. (Deutsche Ausgabe in Ostwalds Klassikern der exakt. Wiss. Nr. 127, S. 63 ff.) angedeutet worden; ausgeführt wurde sie von M. A. Stern, Journ. f. d. r. u. ang. Math., **11**, 294 und Jacobi, ebenda, **13**, 349. Vgl. noch vorzüglich die in Anm. 36 zitierte Arbeit von F. Cohn.

Zu I B 3b. Rationale Funktionen der Wurzeln. Symmetrische und Affektfunktionen.

I. S. 451, Anm. 6 ist beizufügen:

Lagrange, Traité de la résol. des équ. numériques. Note 6, Oeuvres de Lagrange **8**, S. 168. — Grunert, Supplemente zu Klügels math. Wörterbuche, II, S. 424. — Auf die zwei genannten Autoren scheinen die heute üblichen Beweise der Newtonschen Formeln zurückzugehen.

Freiburg i. B. A. Loewy.

Gedächtnisrede auf Immanuel Lazarus Fuchs

(geb. am 5. Mai 1833, gest. am 26. April 1902).

Von M. HAMBURGER.

Gehalten im Mathematischen Verein der Universität Berlin am 5. Mai 1902.

Als vor fünf Jahren der greise Weierstraſs in dem unbestrittenen Ruhme des ersten Analysten seiner Zeit aus dem Leben schied, da war bereits seit lange glänzender Ersatz geschaffen in dem Manne, dessen plötzlichen Heimgang wir jetzt beklagen, in Fuchs, dessen Name in der Geschichte der Mathematik mit einer der wichtigsten Disziplinen der Analysis, der Theorie der linearen Differentialgleichungen, stets ruhmreich verknüpft sein wird.

Das oft zitierte Wort aus der Erwiderung auf seine Antrittsrede als Mitglied der Berliner Akademie der Wissenschaften, daſs er dem mathematischen Königreiche eine neue Provinz hinzugefügt habe, konnte später bei der Überschau der groſsen Reihe bedeutungsvoller Ergebnisse, die bei dem Aufbau und der Durchforschung des Gebietes in regster Wechselbeziehung mit den verwandten Disziplinen gewonnen wurden, dahin ergänzt werden, daſs die Theorie der linearen Differentialgleichungen seit ihrer Begründung einem groſsen und wichtigen Teile der analytischen Forschung ihr Gepräge aufgedrückt hat.

Die Darstellung der wissenschaftlichen Leistungen von Fuchs, die nicht allein durch die Zahl ihrer Ergebnisse, sondern auch durch die Stellung neuer Probleme und Einführung neuer Methoden hervorragen, ist eine Aufgabe, von der ich mir nur zu wohl bewuſst bin, wie wenig ich ihr gewachsen bin, und wenn ich der ehrenvollen Aufforderung des Mathematischen Vereins, die Gedächtnisrede zu halten, gefolgt bin, so habe ich meine Bedenken zurückgedrängt in dem tiefen Gefühl der Dankbarkeit für die Freundschaft, die der Dahingeschiedene, zu dem ich stets mit Verehrung aufgeblickt, mehr als 50 Jahre mir geschenkt hat.

Immanuel Lazarus Fuchs ist den 5. Mai 1833 zu Moschin in der Provinz Posen geboren. Schon in dem frühen Alter von 14 Jahren

verliefs er das Elternhaus, um das Friedrich-Wilhelms-Gymnasium in Posen zu besuchen, wobei er genötigt war, bei den dürftigen Verhältnissen, in denen sich seine Eltern befanden, neben der Arbeit für die Schule für seinen Unterhalt zu sorgen. Die ausgezeichneten Fortschritte, die er trotz mangelhafter Vorbereitung auf dem Gymnasium machte, ermöglichten es ihm sehr bald, durch Unterricht sich Erwerb zu schaffen. Er war ein gesuchter Lehrer, ausgezeichnet durch die Kunst, im Schüler die verborgenen Fähigkeiten zu erwecken und zu entwickeln, und den Eltern empfohlen durch den Ernst, zu dem er in dem schwierigen Kampfe mit der Not des Lebens weit vor seinen Altersgenossen herangereift war. Zu dieser Zeit war es, wo er zuerst mit Koenigsberger in Berührung kam. Als Erzieher in dessen Haus berufen, verstand er es, in seinem Zögling das Interesse für Mathematik zu erwecken. Der mächtige Einflufs, den er dadurch über ihn gewann, war ausschlaggebend dafür, dafs sich Koenigsberger der wissenschaftlichen Berufsbahn zuwendete, die sich so glänzend gestalten sollte.

1853 erhielt er das Zeugnis der Reife, blieb aber dann zunächst ein Jahr in Posen als Hauslehrer im Koenigsbergerschen Hause. Auf der Universität hatte er noch das Glück, zu den Füfsen Dirichlets zu sitzen. Aufserdem hörte er Kummer, Borchardt und von 1856 an Weierstrafs. Neben dem Hören von Vorlesungen studierte er fleifsig Gaufs' Disquisitiones arithmeticae, sowie die Werke der französischen Meister, wie Fourier, Laplace. Hervorheben möchte ich noch, dafs ich als junger Student ihn besonders eifrig mit Cauchys Exercices beschäftigt fand, die er als aufserordentlich instruktiv pries. Es scheint mir das vorbedeutend für seine spätere wissenschaftliche Richtung, die ja doch vornehmlich von den Cauchyschen Prinzipien bestimmt wurde. Auf der Universität machte er sich bemerkbar durch eine Bewerbung um eine Preisaufgabe, bei der er den zweiten Preis davontrug. Sie betraf das Gebiet der Geometrie, und zwar den Teil desselben, der mit der Theorie der partiellen Differentialgleichungen zusammenhängt. Mit dieser Arbeit promovierte er auch 1858. Abgesehen von einer zweiten Arbeit auf demselben Gebiete bewegten sich seine ersten selbständigen Arbeiten auf dem Felde der Zahlentheorie. Die Wahl der Aufgabe in einer derselben, die Bestimmung der Klassenzahl der aus den Einheitswurzeln gebildeten komplexen Zahlen von periodischem Verhalten, zeigt, wie tief er in die Kummersche Theorie eingedrungen war.

Nachdem er an mehreren Anstalten Hilfslehrer gewesen war, auch an der Vereinigten Artillerie- und Ingenieurschule Unterricht erteilt

hatte, trat er in das Kollegium der Friedrichs-Werderschen Gewerbeschule ein. 1865 habilitierte er sich an der hiesigen Universität als Privatdozent. Zu Ostern desselben Jahres erschien in dem Programm der Friedrichs-Werderschen Gewerbeschule eine Arbeit von Fuchs unter dem Titel: „Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten", die zuerst die Aufmerksamkeit der mathematischen Welt auf ihn lenkte und ihm auch bald darauf die aufserordentliche Professur eintrug. Sie begründet die moderne Theorie der linearen Differentialgleichungen. Das neue Licht, das von Riemanns wegen der Originalität und Tiefe gleich bewundernswerten Methoden und Prinzipien ausging und auf alle Gebiete der Analysis seine glänzenden Strahlen warf, sollte auch hier seine zündende Kraft bewähren. Die ihm eigentümliche Bestimmungsweise einer Funktion durch Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen hatte Riemann, wie in der Theorie der Abelschen Funktionen, so auch für die Untersuchung der durch die Gaufssche Reihe darstellbaren Funktionen in Anwendung gebracht. Die Abhandlung über den letzteren Gegenstand war schon im Jahre 1857 erschienen. Doch noch war die neue Denk- und Anschauungsweise zu wenig in weitere Kreise eingedrungen, und so blieb diese jetzt so berühmte Schrift ohne merkbaren Einflufs. Selbst Kummer, mit dessen Arbeit über die hypergeometrische Reihe die Abhandlung die nächste Beziehung hatte, konnte Fuchs auf sein Befragen keine Auskunft über den Inhalt derselben geben. Das eindringliche Studium dieser Schrift veranlafste Fuchs zu seinen Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen. Hier entwickelt er zum ersten Male präzis den Begriff eines Fundamentalsystems von Integralen, zeigt, dafs die Integrale eines solchen Systems bei Umläufen der unabhängigen Variablen um die singulären Punkte, die hier mit den Koeffizienten der Differentialgleichung gegeben sind, in lineare homogene Verbindungen ihrer selbst übergehen, woraus dann folgt, dafs es stets Integrale giebt, die bei einer Umkreisung eines singulären Punktes in sich selbst mit einer Konstanten multipliziert übergehen. Der Augenblick ist mir in lebhafter Erinnerung, da Fuchs den Satz fand. Wir wohnten zur Zeit vorübergehend zusammen, und ich hörte, wie er, mitten in der Arbeit sich aufrichtend, in freudiger Erregung sagte: „Eben habe ich einen schönen Satz gefunden." Da er vor der Veröffentlichung einer Arbeit sich nie über dieselbe äufserte, so mufste ich mich schon gedulden, bis die Arbeit publiziert war. Dieser Satz war in der That fundamental für die Theorie der linearen Differentialgleichungen; denn er führte unmittelbar zu dem Ergebnis, dafs sich die Integrale in der Umgebung der singulären Punkte wie Potenzen und Logarithmen verhalten. Von

der gröſsten Wichtigkeit war die Abgrenzung einer gewissen wohldefinierten, jetzt sogenannten Fuchsschen Klasse von linearen Differentialgleichungen, bei der nach dem heutigen Ausdruck die Integrale keine Unbestimmtheitsstellen besitzen und daher in ihren Eigenschaften den algebraischen Funktionen am nächsten kommen. Für sie beherrscht man das Verhalten der Integrale für alle Werte der unabhängigen Variablen. Namentlich konnte man auf algebraischem Wege die Exponenten des Anfangsgliedes in der Entwickelung der Integrale in der Umgebung der singulären Punkte bestimmen.

Nachdem die Grundlagen der Theorie der linearen Differentialgleichungen entwickelt waren, zeigte sich bald, daſs dieselbe nicht nur auf bereits erforschte Gebiete neues Licht warf, sondern auch zu neuen Problemen und Zielen hinzuführen geeignet war. In einer nachfolgenden Abhandlung betrachtet Fuchs die Periodizitätsmoduln des hyperelliptischen Integrals als Funktionen eines Parameters, indem die Verzweigungspunkte des Integrals als von einem Parameter abhängig angenommen werden. Diese Funktionen genügen einer linearen Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse, deren Herleitung gegeben wird. Um aber die Anwendung der neu gewonnenen Prinzipien fruchtbar zu gestalten, wird das neue Problem gestellt, aus der Integralform selbst die Veränderungen zu bestimmen, die die Funktion bei beliebigen Umläufen erfährt. Die Lösung dieses Problems mittels der von ihm begründeten Methode der veränderlichen Integrationswege, kombiniert mit den erwähnten Prinzipien, bietet das Mittel dar, die Periodizitätsmoduln als lineare homogene Funktionen der Elemente eines beliebig fixierten Fundamentalsystems der Integrale der linearen Differentialgleichung darzustellen. Die erhaltenen Resultate werden später auf die Periodizitätsmoduln Abelscher Integrale ausgedehnt. Für die Periodizitätsmoduln eines elliptischen Integrals als Funktionen des Moduls führt Fuchs die Untersuchung in einem klassischen Aufsatz, der an Hermite gerichtet ist, weiter fort, und indem er umgekehrt den Modul als Funktion des Quotienten der Periodizitätsmoduln betrachtet, gewinnt er für den Fall, daſs das elliptische Integral von der ersten Gattung ist, den Eingang in die Theorie der Modulfunktionen, für deren schon bekannte Eigenschaften, die aber hier aus einem weit allgemeineren Theorem abgeleitet werden, er so die wahre Quelle entdeckt. Damit im Zusammenhange steht eine neue Reihe von Untersuchungen, die die Verallgemeinerung des Jacobischen Umkehrungsproblems im Auge haben, und wo es sich um die Frage handelt, welcher Art die Funktionen sein müssen, die die Stelle der algebraischen Funktionen einnehmen dürfen, wenn die Umkehrbarkeit erhalten bleiben soll. Ich hebe

daraus nur den Fall hervor, wo es sich um Funktionen handelt, die durch Umkehrung der Integrale zweier Lösungen linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung entstehen. Hier wird ebenfalls die unabhängige Variable als Funktion des Quotienten der beiden Lösungen eingeführt und einer eingehenden Behandlung unterworfen, wobei sich ergiebt, daſs dieselbe unter den für die Umkehrbarkeit erfüllten Bedingungen eine eindeutige Funktion dieses Quotienten ist. Diese Arbeit hat Herrn Poincaré zu seinen ausgezeichneten Untersuchungen über die Funktionen, welche durch lineare Substitutionen unverändert bleiben, den direkten Anlaſs gegeben. Mit Hilfe dieser Funktionen, von denen er eine gewisse Klasse mit dem Namen der Fuchsschen Funktionen bezeichnet, gelingt es ihm zur Bewunderung der mathematischen Welt zu zeigen, wie man abhängige und unabhängige Variable einer linearen Differentialgleichung mit algebraischen Koeffizienten und ebenso zwei durch eine beliebige algebraische Gleichung verknüpfte Veränderliche als eindeutige Funktionen eines Parameters darstellen kann.

Die Frage nach der algebraischen Integrierbarkeit linearer Differentialgleichungen war für die spezielle Differentialgleichung, der die Gauſssche Reihe genügt, zum ersten Male von Herrn Schwarz in einer berühmten Abhandlung gelöst worden. Fuchs löste diese Frage für die allgemeine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die Methode, die er dabei anwandte, ergab Beziehungen zur Invariantentheorie algebraischer Formen. Bei Gelegenheit der Herstellung der dabei in Frage kommenden sogenannten Primformen stellt er den Algebraikern das Problem, die Formen $n$ten Grades zu bestimmen, deren Kovarianten von niedrigerem als $n$ten Grade verschwinden. Denn durch diese Eigenschaft konnten die Primformen definiert werden. Die Lösung dieses Problems würde ihm die Bestimmung der Primformen, die er auf einem anderen Wege gab, erleichtert haben. Herr Gordan löste in der That später das gestellte Problem. Für die linearen Differentialgleichungen höherer als zweiter Ordnung nahm Fuchs die Frage auf andere Weise in Angriff, indem er die Voraussetzung machte, die für algebraische integrierbare Differentialgleichungen stets erfüllt ist, daſs zwischen den Elementen eines Fundamentalsystems eine oder mehrere homogene Gleichungen höheren als ersten Grades bestehen, und sich die Aufgabe stellte, die Natur der Integrale unter dieser Voraussetzung zu ergründen. Er führte die Untersuchung für den Fall der dritten Ordnung aus, wo nicht mehr als eine solche Relation bestehen kann. Ohne auf das Nähere hier einzugehen, will ich nur bemerken, daſs gerade diese Arbeit eine groſse Anzahl von Mathematikern zur Nachfolge anregte. Die Differentialausdrücke in-

varianter Natur, die hier eine Rolle spielen, die sogenannten Differentialinvarianten, sind infolge dieser Anregung Gegenstand eingehender Untersuchungen geworden.

Auch auf nichtlineare Differentialgleichungen richtete Fuchs seine Aufmerksamkeit. Hier ist wiederum die präzise Fragestellung und der methodische Gang seiner Untersuchung bezeichnend. Die linearen Differentialgleichungen sind dadurch ausgezeichnet, daſs die Verzweigungspunkte ihrer Integrale von den gewählten Anfangswerten unabhängig sind. Fuchs stellt nun die Frage allgemein nach den Differentialgleichungen, deren Integrale sich derselben Eigenschaften erfreuen, und beantwortet sie für die Differentialgleichungen erster Ordnung, indem er die Form einer solchen Differentialgleichung und die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Koeffizienten genau feststellt. Es zeigt sich dabei, daſs das Geschlecht der Differentialgleichung als algebraischer Gleichung für die Funktion und ihre erste Ableitung, in der die unabhängige Variable als Parameter angesehen wird, eine Rolle spielt. Diesen Gedanken faſst Herr Poincaré auf und gelangt zu der überraschenden Entdeckung, daſs, falls das Geschlecht gröſser als Eins ist, das Integral einer solchen Differentialgleichung stets algebraisch ist. Eine schöne Reihe von Arbeiten deutscher und französischer Mathematiker, die der betretenen Bahn folgten und die Methode auf Differentialgleichungen höherer Ordnung auszudehnen suchten, wobei allerdings so abschlieſsende Resultate nicht zu erlangen waren, zeigt die Fruchtbarkeit der gewählten Fragestellung. Denn das ist eben das Bemerkenswerte an dem Gange seiner Untersuchungen, daſs sie auch den mitstrebenden Mathematikern ein dankbares Arbeitsfeld erschlieſsen. Kurz berühren will ich noch die Anregung, die Fuchs ebenfalls auf dem Gebiete der nicht linearen Differentialgleichungen dadurch zur weiteren Forschung gegeben hat, daſs er auf manche Lücke in den Entwickelungen von Briot und Bouquet aufmerksam gemacht hat, namentlich in der Frage, ob das holomorphe Integral, das durch gewisse Anfangswerte definiert ist, auch wirklich das einzige ist, welches diesen Anfangsbedingungen genügt, wie Briot und Bouquet bewiesen zu haben glaubten. Die Untersuchung ergab, daſs es in der That im allgemeinen mehr als ein Integral giebt, das vorgeschriebenen Anfangsbedingungen entspricht.

Eine ganz neue Reihe von höchst folgenreichen Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen beginnt mit der Einführung der sogenannten Assoziierten einer linearen Differentialgleichung, denen die Unterdeterminanten, die aus der Determinante eines Fundamentalsystems von Integralen der ursprünglichen Differentialgleichung gebildet werden

können, genügen. Hier faſst Fuchs besonders den Fall ins Auge, daſs die ursprüngliche Differentialgleichung zu denen gehört, deren Substitutionsgruppe von einem in den Koeffizienten auftretenden Parameter unabhängig ist. Nun gehören zu den Differentialgleichungen der bezeichneten Kategorie diejenigen, welchen die Periodizitätsmoduln der hyperelliptischen und überhaupt der Abelschen Integrale genügen. Für den Fall, daſs das Geschlecht gleich 2 ist, findet Fuchs die Reduktibilität der zweiten Assoziierten in dem von Herrn Frobenius fixierten Sinne, dem man überhaupt die Einführung des wichtigen Begriffs der Reduktibilität in die Theorie der linearen Differentialgleichungen verdankt. Hieraus ergeben sich die Weierstraſsschen Relationen zwischen den Periodizitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale erster und zweiter Gattung, so daſs auch für diese berühmten Relationen eine neue Quelle in der Theorie der linearen Differentialgleichungen gefunden war. Fuchs hatte die groſse Freude, daſs sein Sohn in seiner Doktordissertation die analoge Untersuchung für die Differentialgleichungen, denen die Periodizitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale von beliebigem Geschlecht genügen, durchführte, indem er den Reduktibilitätssatz auf alle Assoziierten ausdehnte. Aus den Ergebnissen dieser Untersuchung folgen die Weierstraſsschen Relationen im allgemeinen Falle.

Abgesehen von dieser Anwendung ist die Betrachtung der Kategorie von linearen Differentialgleichungen, deren Substitutionsgruppe von einem in den Koeffizienten auftretenden Parameter unabhängig ist, an sich nach zwei Seiten hin von Wichtigkeit. Einmal giebt sie Aufschluſs über die Eigenschaften gewisser simultaner partieller Differentialgleichungen, die bereits von anderer Seite her den Mathematikern sich dargeboten hatten, und hier hatte wieder Fuchs die Freude, daſs die jüngst im Programm des Bismarck-Gymnasiums erschienene Arbeit seines Sohnes es sich zur dankenswerten Aufgabe machte, die Darstellung der bezüglichen Untersuchungen in einer durchsichtigen, weiteren Kreisen zugänglichen Weise zu geben, wobei er den Gegenstand von neuen Gesichtspunkten aus behandelt und zu einem wichtigen ohne Beweis gegebenen Satze den Beweis hinzufügt. Andrerseits ergiebt sich die allgemeine Bedeutung der bezeichneten Kategorie von Differentialgleichungen durch die neuesten Arbeiten des Herrn Schlesinger, in denen er ein Problem, das bereits Riemann, wie aus seinen nachgelassenen Schriften hervorgeht, beschäftigt hatte, mit den neu gewonnenen Hilfsmitteln wieder aufnimmt. Das Problem besteht darin, ein System von n Funktionen zu bestimmen, für welche die Lage ihrer Verzweigungspunkte und die Gruppe der linearen Substitutionen, welche sie bei Umläufen der unabhängigen Variablen erfahren sollen, willkürlich vorgeschrieben sind.

Unter gewissen Bedingungen, die nur die Substitutionen betreffen, erbringt Herr Schlesinger den Existenzbeweis für die Funktionen, dieselben genügen einer linearen Differentialgleichung $n$ter Ordnung. Betrachtet man jetzt die Substitutionen als fest gegeben, die Verzweigungspunkte aber als variabel, etwa als Funktionen eines Parameters, so werden wir hier gerade auf Differentialgleichungen geführt, deren Substitutionsgruppe von dem in ihren Koeffizienten enthaltenen Parameter unabhängig sind. Demnach erscheinen, wenn man vom Riemannschen Problem ausgeht, die Differentialgleichungen der bezeichneten Kategorie als der allgemeine Fall, während sie, von Seiten der Differentialgleichung angesehen, sich als besonderen Fall darstellen — eine Erscheinung, die auch auf anderen Gebieten der Mathematik oft beobachtet wird.

Indem ich hiermit die gegenüber der Fülle des Stoffs nur zu lückenhafte Schilderung der wissenschaftlichen Werke von Fuchs schliefse, ist es mein Wunsch, dafs es mir gelungen sein möge, Ihnen von dem Reichtum, der Tiefe und der Fruchtbarkeit seiner Schöpfungen eine Vorstellung zu geben.

Sein Lebensgang erfuhr 1869 eine Wendung, indem er nach Greifswald als ordentlicher Professor berufen wurde. Vorher aber war ein beglückendes Ereignis in sein Leben eingetreten, indem er die Erkorene seines Herzens, Marie Anders, als Gattin heimführte. Sie verlieh der zweiten Hälfte seines Lebens sonnigen Glanz durch die sorglichste Pflege, die sie in unbegrenzter Verehrung ihm widmete, und durch die muntere Lebhaftigkeit ihres Geistes, mit der sie sein Gemüt erhellte und, alles Widrige von ihm fernhaltend, die Bahn für sein geistiges Schaffen ebnete. 1874 kam er nach Göttingen und im Jahre darauf nach Heidelberg, der Stadt, in der seine Erinnerungen am liebsten weilten. Hier traf auch alles zusammen, was seinem Geist und Gemüt im Innersten zusagte: Herrlichkeit der Naturumgebung, für die er bei seinem ausgeprägten tiefen Naturgefühl besonders empfänglich war, der persönliche Verkehr mit den Studenten, die Freiheit, mit der er als der einzige ordentliche Professor in seinem Fache seiner wissenschaftlichen Denkweise Geltung verschaffen konnte — wie denn auch die meisten Schüler, die sich einen Namen gemacht haben, von da entstammen — endlich und nicht zum mindesten die herzlichen Beziehungen zu den Kollegen aus den verschiedensten Fakultäten, die auch über die Zeit seines Aufenthalts erhalten blieben. 1884 kehrte er, einem ehrenvollen Rufe folgend, nach Berlin zurück, wo er denn allerdings erst den seiner Bedeutung angemessenen Wirkungskreis fand.

Von seiner Lehrthätigkeit als Dozent rühmen seine Hörer die Klarheit seines Vortrags, der in langsamer Rede dahinflofs. Es kam ihm nicht darauf an, seine Hörer mit einer Fülle von fertigen Resultaten zu belasten; er war vielmehr darauf bedacht, ihnen den Weg zur präzisen Stellung des Problems zu weisen und die entsprechende Methode der Untersuchung einzuprägen — die beste Weise, den Empfangenden zur selbständigen Forschung anzuregen. Als bemerkenswert verdient hervorgehoben zu werden, dafs Fuchs in Berlin zuerst in seinen Vorlesungen die Studierenden in die Riemannsche Anschauungsweise einführte, für deren Kenntnis sie vor ihm auf Lehrbücher angewiesen waren.

Wie er in der Wissenschaft auf Strenge hielt, so war er auch als Mensch durch Gediegenheit seines Wesens und Liebe zur Wahrheit ausgezeichnet. Bei allen Fragen seines Faches hatte er nur die Sache und die Würde der Wissenschaft im Auge, persönliche Rücksichten lagen ihm fern. Für seine Person strebte er nicht nach äufseren Ehren. Er war stets der Ansicht, dafs der wahre Lohn der Arbeit in der Freude an dieser selbst liege. „Dieser Lohn“, so schrieb er mir einmal, „ist invariabel und namentlich keine Funktion des Wohlwollens der Mitmenschen.“ Wahres Verdienst erkannte er gern bei anderen an. Namentlich verfolgte er mit grofser Teilnahme die Fortschritte jüngerer Talente, die er in jeder Beziehung zu fördern suchte. Für seine Studierenden war sein gastfreies Haus jederzeit offen. Viele werden gern der geselligen Zusammenkünfte in seinem Hause gedenken, wo er durch sein gemütliches Wesen im Verein mit der Liebenswürdigkeit seiner Gattin eine wohlthuende Behaglichkeit um sich verbreitete, gewürzt durch einen feinen Humor, mit dem er aus dem reichen Schatz seiner Erinnerungen so manches zum Besten gab.

Er hatte ein weiches Gemüt, das sich demjenigen erschlofs, der das Glück hatte, ihm näher zu treten, und in der Freundschaft erwies er sich treu wie Gold. Er war ein überaus zärtlicher Gatte und Vater, und seine Liebe wurde ihm von den Angehörigen mit Verehrung und Dankbarkeit vergolten. Das reine Glück, das er in der Familie fand, wurde durch einen schweren Schlag getrübt, da ihm ein prächtig entwickeltes Kind, der Liebling des Hauses, im zarten Alter durch den Tod entrissen wurde. Den Schmerz darüber hat er nie verwunden und das Andenken an den Heimgegangenen bis zu seinem letzten Atemzuge heilig gehalten.

Wenn er aber in den letzten Tagen seines Lebens an der Seite der geliebten Gattin um sich blickte, so konnte er wohl die vollste Befriedigung empfinden. Zwei liebe Töchter waren an treffliche

Männer verheiratet, und zwei Enkelinnen durfte er in seine Arme drücken. Drei erwachsene wohlgeratene Söhne bildeten seinen Stolz, den ältesten sah er bereits in Amt und Würden und als treuen und erfolgreichen Mitarbeiter in der Wissenschaft seines Faches. Die jüngste Tochter, der Sonnenstrahl des Hauses, war die Erquickung seines Herzens. Er selbst war noch in rüstiger Schaffenskraft, voll von Gedanken und Entwürfen, als ihn der Genius des Todes mit sanftem Flügelschlag dem irdischen Sein entrückte.

Das Bild des teuren Entschlafenen wird in unserem Herzen fortleben, durch seine Werke hat er sich ein Denkmal für alle Zeiten errichtet.

Zur nichteuklidischen Geometrie.

Von Paul Stäckel in Kiel.

In der Euklidischen Geometrie gilt für die Projektionen einer Strecke auf eine Gerade der Satz:

Wenn eine Gerade AB von konstanter Länge in der Ebene derart verschoben wird, daſs der eine Endpunkt A in einer zweiten Geraden A_1A bleibt, während der Winkel A_1AB beständig wächst, ohne jedoch einen Rechten zu überschreiten, so hat die Projektion A_1B_1 von AB auf eine zu A_1A senkrechte Gerade die Eigenschaft ebenfalls beständig zu wachsen.

Zu den Paradoxien der Lobatschefskijschen Geometrie gehört es, daſs in ihr die Projektionen einer Strecke konstanter Länge ein ganz anderes Verhalten zeigen.

Von B möge auf A_1A das Lot BC gefällt werden. Man bezeichne AB, BC, CA der Reihe nach mit c, a, b und setze $A_1A = d$, $\sphericalangle A_1AB = \alpha$, $A_1B_1 = x$. Da das Viereck B_1A_1CB in B_1, A_1, C rechte Winkel hat, so gilt in der Lobatschefskijschen Geometrie die Gleichung[1]):

$$\cos \Pi(x) = \sin \Pi(d-b) \cos \Pi(a) = \frac{\sin \Pi(d) \sin \Pi(b) \cos \Pi(a)}{1 - \cos \Pi(d) \cos \Pi(b)}.$$

Nun ist in der Euklidischen Geometrie

$$x = c \sin \alpha.$$

Man wird deshalb die Gleichung für $\cos \Pi(x)$ in der Form schreiben:

$$\cos \Pi(x) = \cos \Pi(c) \sin \alpha \cdot \frac{\sin \Pi(d)}{1 - \cos \Pi(d) \cos \Pi(b)} \cdot \frac{\sin \Pi(b) \cos \Pi(a)}{\cos \Pi(c) \sin \alpha}.$$

1) Vergl. F. Engel: *N. J. Lobatschefskij, zwei geometrische Abhandlungen.* Zweiter Teil, Leipzig 1899. S. 347. Die Regel Engels, nach der man die Relationen zwischen den fünf Stücken eines Vierecks mit drei rechten Winkeln sofort hinschreiben kann, wird auch von Herrn P. Barbarin in dem Buche: *Études de géométrie analytique non euclidienne.* Bruxelles 1900. S. 7 angegeben, der sie durch Herrn de Lagrandval in Bordeaux kennen gelernt hatte.

Für das rechtwinklige Dreieck ABC bestehen aber die Relationen:

$$\operatorname{tg} \Pi(c) = \sin \alpha \operatorname{tg} \Pi(a), \quad \sin \Pi(c) = \sin \Pi(a) \sin \Pi(b),$$

aus denen sofort hervorgeht, dafs der dritte Faktor in dem Ausdrucke für $\cos \Pi(x)$ den Wert 1 hat. Beachtet man noch die Relation:

$$\cos \Pi(b) = \cos \Pi(c) \cos \alpha,$$

so ergiebt sich:

$$\cos \Pi(x) = \cos \Pi(c) \frac{\sin \alpha \sin \Pi(d)}{1 - \cos \Pi(c) \cdot \cos \alpha \cos \Pi(d)}.$$

Um die Untersuchung zu vereinfachen, soll angenommen werden, dafs zwischen d und α die Relation

$$\cos \alpha \cos \Pi(d) = \cos \lambda$$

bestehe, in der λ einen gegebenen spitzen Winkel bedeute. Damit diese Relation erfüllt sein kann, mufs $\Pi(d) \leqq \lambda$ sein. Es sei etwa $\Pi(d_0) = \lambda$; die durch A_0 in dem Abstande $A_1 A_0 = d_0$ von $A_1 B_1$ unter dem Winkel λ gezogene Gerade ist dann asymptotisch zu $A_1 B_1$. Wächst d von d_0 bis ∞, so nimmt $\Pi(d)$ von λ bis 0 ab, α nimmt also von 0 bis λ zu. Wenn man daher den Punkt A auf $A_1 A$ von A_0 bis ins Unendliche verschiebt, so wächst der Winkel $A_1 AB$ von 0 bis λ.

Die Projektion x von AB wird durch die Gleichung gegeben:

$$\cos \Pi(x) = \cos \Pi(c) \cdot \frac{\sin \alpha \sin \Pi(d)}{1 - \cos \Pi(c) \cos \lambda},$$

die erkennen läfst, dafs $\cos \Pi(x)$ und damit x selbst für $d = d_0$ (wegen $\alpha = 0$) und für $d = \infty$ (wegen $\sin \Pi(d) = 0$) verschwindet. Weiter ergiebt sich leicht, dafs der Ausdruck $\sin \alpha \sin \Pi(d)$, wenn zwischen α und d die Relation $\cos \alpha \cos \Pi(d) = \cos \lambda$ besteht, für $\alpha = \Pi(d)$ den gröfsten Wert annimmt, und zwar wird dann

$$\cos \alpha = \sqrt{\cos \lambda}.$$

Hieraus folgt schliefslich, dafs allerdings $\cos \Pi(x)$ von 0 bis

$$\cos \Pi(c) \frac{1 - \cos \lambda}{1 - \cos \Pi(c) \cos \lambda}$$

zunimmt, wenn α von 0 bis zu dem Werte $\operatorname{arc} \cos (\sqrt{\cos \lambda})$ wächst, wo $\alpha = \Pi(d)$ wird, wo also die Gerade AB Asymptote zu $A_1 B_1$ wird, während vorher die Verlängerung von AB die Verlängerung von $A_1 B_1$ geschnitten hatte. Wenn α aber über den Wert $\operatorname{arc} \cos (\sqrt{\cos \lambda})$ hinaus wächst, so nimmt x von dem Maximalwerte bis zu Null ab; die Verlängerungen von AB und $A_1 B_1$ sind dann divergent.

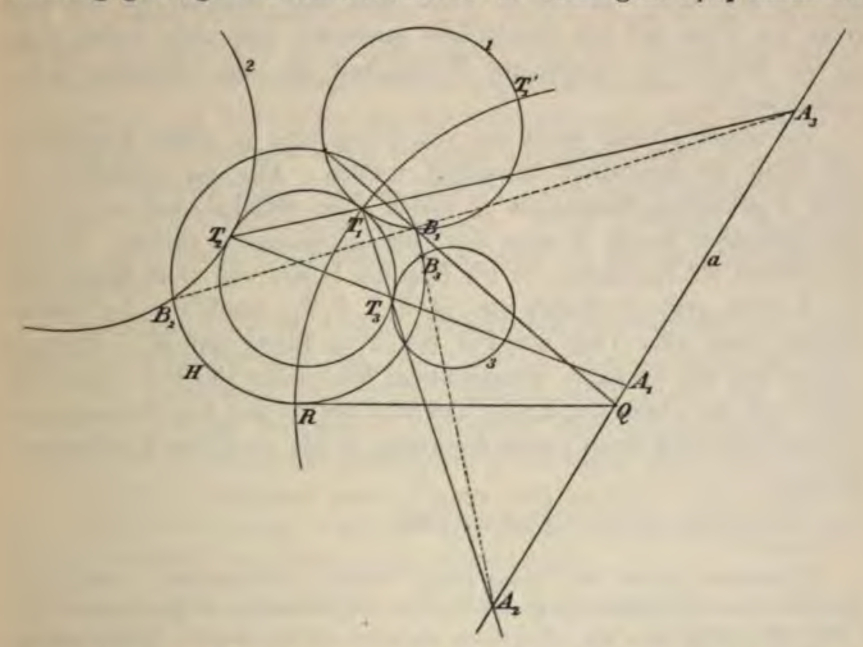
Kiel, den 29. Januar 1902.

Eine einfache Lösung des Apollonischen Berührungsproblems in der Ebene.[1])

Von A. Massfeller in Montabaur.

(Aus dem Jahresbericht des Kaiser Wilhelms Gymnasiums zu Montabaur, Ostern 1901).

Die gegebenen Kreise K_1, K_2, K_3 mögen von einem gesuchten Kreise X in den Punkten T_1, T_2, T_3 berührt werden; die zu der Berührung gehörige Ähnlichkeitsachse sei a. Dann geht $T_1 T_2$ durch den



auf a liegenden Ähnlichkeitspunkt A_3 von K_1 und K_2, $T_1 T_3$ durch den ebenfalls auf a liegenden Ähnlichkeitspunkt A_2 von K_1 und K_3. Jetzt wähle man auf K_1 beliebig den Punkt B_1 und ziehe die Ähnlichkeitsstrahlen $A_2 B_1$ und $A_3 B_1$, welche die Kreise K_3 und K_2 in den

1) Herr J. Lange, dem ich von meiner Lösung Kenntnis gab, war so freundlich, mir einige Vereinfachungen vorzuschlagen, die ich mit Dank acceptiert habe.

zu B_1 inversen Punkten B_3 und B_2 schneiden, und lege durch die Punkte B_1, B_2, B_3 den Hülfskreis H. Dann ist wegen $A_2T_1 \cdot A_2T_2 = A_2B_1 \cdot A_2B_3$ und $A_3T_1 \cdot A_3T_2 = A_3B_1 \cdot A_3B_2$ die Ähnlichkeitsachse a die Potenzlinie der Kreise X und H. H schneidet stets alle 3 Kreise, wenn er nicht schon zufällig der gesuchte Kreis ist; seine mit K_1 gemeinsame Sehne trifft a im Potenzpunkt Q von K_1, H und X; daher geht auch die Potenzlinie von K_1 und X, d. i. die gemeinschaftliche Tangente derselben in T_1, durch den Punkt Q. Dadurch ist aber T_1 gegeben und mit ihm T_2 und T_3. Da von Q zwei Tangenten an K_1 gezogen werden können, so erhält man einen zweiten Kreis mit den Berührungspunkten T_1', T_2', T_3'.

Statt von dem gefundenen Punkte Q an K_1 die Tangente zu ziehen, ist es, wie Herr J. Lange mich aufmerksam macht, vorteilhafter[1], an H die Tangente QR zu legen und um Q mit QR den Kreis zu beschreiben, welcher wegen der Gleichheit von QR und QT_1 K_1 in T_1 und T_1' schneidet. In diesem Falle läfst sich nämlich die Lösung Wort für Wort auf alle Sonderfälle anwenden und giebt dabei, was für die Schule von besonderer Wichtigkeit ist, die bekannten Konstruktionen.[2]

Zu dieser Lösung steht die von Gergonne in naher Beziehung und kann als Spezialfall betrachtet werden. Alle zur Ähnlichkeitsachse a gehörigen Hülfskreise H bilden einen Büschel, welcher aufser dem gesuchten Kreise X auch den Orthogonalkreis O enthält. Wählt man diesen als Hülfskreis, so ist B_1Q die Polare von O in Bezug auf K_1; folglich geht die Polare von Q, d. i. T_1T_1', durch O. Auf dieser Geraden liegt aber auch der Pol von a in Bezug auf K_1. Hieraus ergiebt sich die bekannte Konstruktion: Man suche die Pole von a in Bezug auf die gegebenen Kreise und verbinde sie mit dem Potenzpunkt O, dann schneiden diese Linien die Kreise in den gesuchten Berührungspunkten.

Montabaur, den 5. Februar 1902.

---

1) Dadurch gewinnt die Lösung einige Vorzüge vor derjenigen, welche Herr Fouché (Nouv. Ann. 1892; vgl. auch Rouché et de Comberousse, Traité de Géométrie I, 297, 1900) mitgeteilt hat, mit welcher sie sonst im wesentlichen übereinstimmt. (Anm. der Red.)

2) Zu derselben Lösung gelangt v. Miorini auf dem Wege räumlicher Konstruktion in dem Jahresberichte der K. K. Marine-Unterrealschule zu Pola 189[illegible], wie mir nachträglich bekannt geworden ist.

Beiträge zur Geometrographie I.

Von R. Güntsche in Berlin.

Herr E. Lemoine hat seit 1888 Prinzipien aufgestellt, nach denen sich die verschiedenen Konstruktionen einer geometrischen Aufgabe in Bezug auf ihre Einfachheit mit einander vergleichen lassen. Das überraschende Ergebnis der daran geknüpften Untersuchungen war, daſs bei fast sämtlichen, auch ganz elementaren, Aufgaben den gebräuchlichen klassischen Konstruktionen neue, einfachere an die Seite gestellt werden können. Der glänzende Aufschwung, den die so entstandene neue Lehre, die ihr Begründer Geometrographie genannt hat, in Frankreich nahm, ist trotz ihrer wissenschaftlichen und pädagogischen Bedeutung in Deutschland wenig beachtet worden, bis Herr E. Lemoine in einer Abhandlung dieser Zeitschrift[1]) ihre Grundgedanken nebst einer Reihe von Beispielen entwickelte. Diese Prinzipien sollen zunächst kurz wiederholt werden; im übrigen sei auf diese Abhandlung hingewiesen.

Anlegen des Lineals (règle) an einen bestimmten Punkt der Zeichnungsebene ist die Operation R_1, kurz Op: (R_1); Ziehen einer Linie längs des Lineals ist Op: (R_2); Einsetzen einer Spitze des Zirkels (compas) in einem bestimmten Punkte ist Op: (C_1); Einsetzen einer Zirkelspitze in einem unbestimmten Punkte einer gezeichneten Linie ist Op: (C_2); Beschreiben eines Kreises ist Op: (C_3). Jede Konstruktion läſst sich nunmehr, wenn man die Anzahl der gleichartigen Operationen feststellt, ausdrücken durch das Symbol:

$$\text{Op: } (l_1 R_1 + l_2 R_2 + m_1 C_1 + m_2 C_2 + m_3 C_3);$$

hierbei wird $l_1 + l_2 + m_1 + m_2 + m_3$ der Einfachheitskoeffizient S (Simplicité) und $l_1 + m_1 + m_2$ der Genauigkeitskoeffizient E (Exactitude) genannt; l_2 und m_3 geben bezw. die Anzahl der gezeichneten Geraden und Kreise an. Von den bekannten Konstruktionen einer Aufgabe

1) E. Lemoine: Principes de Géométrografie. Archiv (3) **1**, 1901, S. 99 ff; auf diese Abhandlung beziehen sich die im Text angegebenen Zitate.

heifst diejenige (oder diejenigen), für welche S am kleinsten ist, *geometrographische Konstruktion*, vorausgesetzt, dafs sie allgemein gilt; solche, die ein noch kleineres S haben, aber nur in gewissen Fällen anwendbar sind, werden *partikuläre Konstruktionen* genannt.

Zu einigen Aufgaben, für welche in der erwähnten Abhandlung einfache Konstruktionen angegeben sind, sollen im folgenden Konstruktionen mitgeteilt werden, die eine erweiterte Anwendbarkeit oder gröfsere Einfachheit besitzen.

XVIII[a] (S. 111). *Die vierte Proportionale X zu drei gegebenen Strecken M, N und P zu konstruieren*; $X = \frac{N \cdot P}{M}$.

(*Partikuläre Konstruktion*, Fig. 1). — Man nehme in der Ebene zwei beliebige Punkte O und O' an und beschreibe die Kreise $O(M)$ und $O'(N)$, die sich in S und S' schneiden $(4C_1 + 2C_3)$, sowie den Kreis $S(P)$ $(3C_1 + C_3)$, der $O(M)$ in zwei Punkten schneidet, von denen irgend einer T sei; man ziehe die Gerade $S'T$ $(2R_1 + R_2)$, die $O'(N)$ in U trifft; da die Dreiecke SOT und $SO'U$ einander ähnlich sind[1]), ist SU die verlangte Strecke; Op: $(2R_1 + R_2 + 7C_1 + 3C_3)$; $S:13$; $E:9$; 1 Gerade, 3 Kreise.

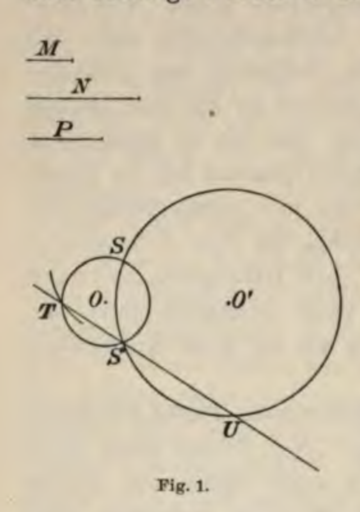


Fig. 1.

Bemerkung: Da die Strecken N und P mit einander vertauscht werden können, ist diese partikuläre Konstruktion, von der weiter unten (XIV[a]) eine Anwendung gegeben wird, für $N > P$ in allen Fällen zulässig, in denen $M > \frac{P}{2}$ ist, während die Konstruktion a. a. O. auf S. 111 $M > \frac{N}{2}$ erfordert.

XIX[a] (S. 111). *Die dritte Proportionale X zu zwei gegebenen Strecken N und M zu finden;* $X = \frac{N^2}{M}$.

(*Partikuläre Konstruktion*, für den Fall $2M > N$, Fig. 2). — Man beschreibe um einen beliebigen Punkt O der Ebene den Kreis $O(M)$ $(2C_1 + C_3)$ und um irgend einen Punkt C von $O(M)$ den Kreis $C(N)$ $(2C_1 + C_2 + C_3)$, der $O(M)$ in S und S' schneidet; dann ziehe man die Gerade $S'C$ $(2R_1 + R_2)$, die $C(N)$ in U trifft; SU ist die ver-

1) Vgl. A. F. Möbius, Statik § 118, S. 276 (Ges. W. III).

langte Strecke; Op: $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + C_2 + 2C_3)$; $S:10$; $E:7$; 1 Gerade, 2 Kreise.

Der Einfachheitskoeffizient ist für diese Konstruktion um eine Einheit geringer als für die S. 111 angegebene.

XIV^a (S. 105). *Über einer gegebenen Strecke AB als Sehne das Kreissegment zu beschreiben, das eines gegebenen Winkels $\varepsilon\gamma\alpha$ fähig ist.*

(Auflösung). — O sei der Mittelpunkt des Kreises, zu dem das verlangte Segment gehört. Um einen beliebigen Punkt ω beschreibe man den Kreis, der durch γ geht; hierdurch werden auf den Schenkeln des Winkels γ die Punkte α und ε festgelegt. Die Dreiecke $\alpha\omega\varepsilon$ und AOB sind ähnlich, da die Winkel ω und O gleich 2γ sind; folglich ist $\frac{\alpha\varepsilon}{\omega\varepsilon} = \frac{AB}{AO}$. Man hat mithin AO als vierte Proportionale zu den bekannten Strecken $\alpha\varepsilon$, $\omega\varepsilon$ und AB zu konstruieren. Die partikuläre Konstruktion XVIII^a ist hier anwendbar, da die Bedingung $\varepsilon\alpha > \frac{1}{2}AB$ stets erfüllt werden kann, wenn man nur $\omega\gamma$ grofs genug wählt.

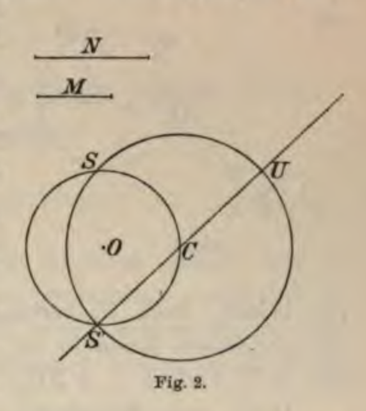


Fig. 2.

(Geometrographische Konstruktion, Fig. 3). — Um einen beliebigen, von γ hinreichend entfernten Punkt ω der Ebene beschreibe man den Kreis $\omega(\omega\gamma)$, der auf den Schenkeln des gegebenen Winkels die Punkte α und ε festlegt $(C_1 + C_3)$; alsdann beschreibe man den Kreis $\alpha(\alpha\varepsilon)(2C_1 + C_3)$, der $\omega(\omega\gamma)$ in ε' trifft, und $\varepsilon(AB)(3C_1 + C_3)$, der $\alpha(\alpha\varepsilon)$ in zwei Punkten schneidet, deren einer, gleichviel welcher, ζ sei; man ziehe die Gerade $\varepsilon'\zeta(2R_1 + R_2)$, die $\omega(\omega\gamma)$ in ξ trifft; nun zeichne man $A(\varepsilon\xi)(3C_1 + C_3)$ und $B(\varepsilon\xi)(C_1 + C_3)$; um einen Schnittpunkt O dieser beiden Kreise beschreibe man $O(\varepsilon\xi)$ $(C_1 + C_3)$; dieser Kreis bestimmt das gesuchte Segment; Op: $(2R_1 + R_2 + 11C_1 + 6C_3)$; $S:20$; $E:13$; 1 Gerade, 6 Kreise.

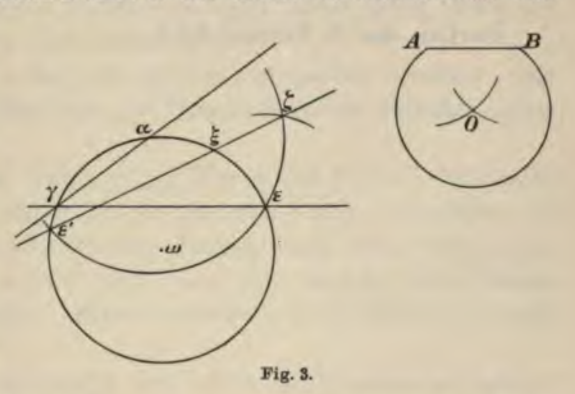


Fig. 3.

Für die vorliegende Aufgabe wird hierdurch der bisherige Einfachheitskoeffizient um eine Einheit vermindert. (S. 341, Note 2).

IV^a und V^a (Fig. 4). — Das Prinzip der Konstruktion XVIII^a ist demjenigen analog, das Herr Lemoine (S. 102) zur Konstruktion der Aufgabe IV: *Die Länge des Radius eines Kreises zu finden, dessen Mittelpunkt nicht gegeben ist*, verwendet hat. Diese Konstruktion, die die Einfachheit 7 besitzt, läßt sich folgendermaßen abändern:

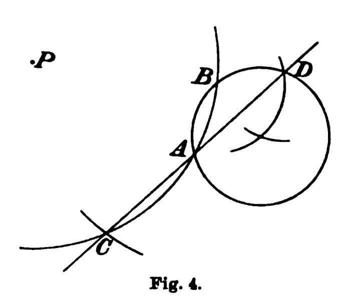


Fig. 4.

Um irgend einen Punkt P der Ebene beschreibe man mit einem beliebigen Radius ϱ den Kreis $P(\varrho)(C_3)$, der den gegebenen Kreis in A und B schneidet; hierauf ziehe man $B(\varrho)(C_1 + C_3)$, der $P(\varrho)$ in zwei Punkten trifft; irgend einen von beiden, etwa C, verbinde man mit $A(2R_1 + R_2)$; AC schneide den gegebenen Kreis in D; DB ist die verlangte Länge des Radius; Op: $(2R_1 + R_2 + C_1 + 2C_3)$; $S:6$; $E:3$; 1 Gerade, 2 Kreise.

Diese neue Konstruktion der Aufgabe IV wird ihre geometrographische Konstruktion. Hierdurch reduziert sich das Symbol der ersten geometrographischen Konstruktion der Aufgabe V: *den Mittelpunkt eines Kreises zu finden, wenn dieser Mittelpunkt nicht gegeben ist*, von 12 auf 11. Die zweite Konstruktion derselben Aufgabe (S. 103), die das Symbol 12 beibehält, hört auf geometrographisch zu sein.

Berlin, den 6. Februar 1902.

(Fortsetzung folgt.)

Über die Anzahl der Zerlegungen einer ganzen Zahl in sechs Summanden.

Von R. v. STERNECK in Wien.

Für die Anzahl der Zerlegungen einer positiven ganzen Zahl in sechs (verschiedene oder zum Teil gleiche) ganzzahlige positive Summanden sind bisher independente Formeln nicht aufgestellt worden; die Ableitung solcher Formeln auf vollkommen elementarem Wege bildet den Inhalt der folgenden Zeilen.

Zieht man auch jene Zerlegungen in Betracht, bei denen einige der Summanden gleich Null sind, so erhält man Darstellungen durch weniger als sechs Elemente; obwohl für die Anzahl der Zerlegungen einer Zahl in 3, 4 oder 5 beliebige Summanden in den Arbeiten von Sylvester[1]), Zuchristian[2]) und Glösel[3]) bereits Formeln aufgestellt worden sind, ist es doch des Zusammenhanges halber nötig, auch auf diese Darstellungsanzahlen zurückzukommen.

Zwei Darstellungen sollen als identisch angesehen werden, wenn sie sich blofs in der Reihenfolge der Summanden von einander unterscheiden.

Wir bezeichnen (nach Vahlen) mit $N(n = \alpha + \beta + \cdots)$ die Anzahl der Darstellungen der Zahl n in der Form $\alpha + \beta + \cdots$; hierbei sei bemerkt, dafs in einer und derselben Formel durch zwei verschiedene griechische Buchstaben immer auch zwei von einander verschiedene Elemente bezeichnet werden. Ferner bedeute $[x]$ die gröfste in x enthaltene ganze Zahl.

Ordnet man die Darstellungen der Zahl n durch sechs und weniger Elemente nach den in denselben vorkommenden Gruppen gleicher Elemente, so lassen sich 29 verschiedene Typen unterscheiden; die

1) Amer. Journ. of math. 5, 79 ff., 1882.
2) Monatshefte f. Math. u. Ph. (Wien) 4, 185 ff., 1893.
3) Ebenda, 7, 133 ff. u. 290, 1896.

Anzahl der Darstellungen dieser einzelnen Typen bezeichnen wir mit $(n)_1$ bis $(n)_{29}$ und zwar:

$(n)_1 = N(n=\alpha)$, $(n)_2 = N(n=\alpha+\alpha)$,
$(n)_3 = N(n=\alpha+\beta)$, $(n)_4 = N(n=\alpha+\alpha+\alpha)$,
$(n)_5 = N(n=\alpha+\alpha+\beta)$, $(n)_6 = N(n=\alpha+\beta+\gamma)$,
$(n)_7 = N(n=\alpha+\alpha+\alpha+\alpha)$, $(n)_8 = N(n=\alpha+\alpha+\alpha+\beta)$,
$(n)_9 = N(n=\alpha+\alpha+\beta+\beta)$, $(n)_{10} = N(n=\alpha+\alpha+\beta+\gamma)$,
$(n)_{11} = N(n=\alpha+\beta+\gamma+\delta)$, $(n)_{12} = N(n=\alpha+\alpha+\alpha+\alpha+\alpha)$,
$(n)_{13} = N(n=\alpha+\alpha+\alpha+\alpha+\beta)$, $(n)_{14} = N(n=\alpha+\alpha+\alpha+\beta+\beta)$,
$(n)_{15} = N(n=\alpha+\alpha+\alpha+\beta+\gamma)$, $(n)_{16} = N(n=\alpha+\alpha+\beta+\beta+\gamma)$,
$(n)_{17} = N(n=\alpha+\alpha+\beta+\gamma+\delta)$, $(n)_{18} = N(n=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)$,
$(n)_{19} = N(n=\alpha+\alpha+\alpha+\alpha+\alpha+\alpha)$, $(n)_{20} = N(n=\alpha+\alpha+\alpha+\alpha+\alpha+\beta)$,
$(n)_{21} = N(n=\alpha+\alpha+\alpha+\alpha+\beta+\beta)$, $(n)_{22} = N(n=\alpha+\alpha+\alpha+\alpha+\beta+\gamma)$,
$(n)_{23} = N(n=\alpha+\alpha+\alpha+\beta+\beta+\beta)$, $(n)_{24} = N(n=\alpha+\alpha+\alpha+\beta+\beta+\gamma)$,
$(n)_{25} = N(n=\alpha+\alpha+\alpha+\beta+\gamma+\delta)$, $(n)_{26} = N(n=\alpha+\alpha+\beta+\beta+\gamma+\gamma)$,
$(n)_{27} = N(n=\alpha+\alpha+\beta+\beta+\gamma+\delta)$, $(n)_{28} = N(n=\alpha+\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)$,
$(n)_{29} = N(n=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta)$.

Diese Anzahlen sollen im folgenden der Reihe nach bestimmt werden.

$$\underline{(n)_1 = N(n=\alpha)} = 1.$$

$$\underline{(n)_2 = N(n=\alpha+\alpha)} = \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n-1}{2}\right].$$

$$\underline{(n)_3 = N(n=\alpha+\beta)} = \left[\frac{n-1}{2}\right].$$

$$\underline{(n)_4 = N(n=\alpha+\alpha+\alpha)} = \left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n-1}{3}\right].$$

$$\underline{(n)_5 = N(n=\alpha+\alpha+\beta)}.$$

Da β mindestens den Wert 1 hat, so kann man dem α die Werte $1, 2, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right]$ erteilen; dies liefert $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ Darstellungen, unter denen aber die Darstellung $n=\alpha+\alpha+\alpha$ auch vorkommt; es ist also:

$$(n)_5 = \left[\frac{n-1}{2}\right] - (n)_4 = \left[\frac{n-1}{2}\right] - \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n-1}{3}\right].$$

$$\underline{(n)_6 = N(n=\alpha+\beta+\gamma)}.$$

Hat α einen bestimmten Wert, so muſs $n-\alpha$ in zwei verschiedene Summanden zerlegt werden; es ist also $\sum_{\alpha=1}^{n-1}(n-\alpha)_3$ zu bilden, in

welcher offenbar jede Darstellung $n = \alpha + \beta + \gamma$ dreimal (da wir jedes ihrer Elemente als α auffassen können), eine Darstellung $n = \alpha + \alpha + \beta$ aber einmal gezählt ist; daher besteht die Beziehung:

$$3\,(n)_6 = \sum_{\alpha=1}^{n-1}(n-\alpha)_3 - (n)_5 = \sum_{\lambda=2}^{n}\left[\frac{n-\lambda}{2}\right] - \left[\frac{n-1}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n-1}{3}\right];$$

für $n = 2\mu$ ist:

$$\sum_{\lambda=2}^{n}\left[\frac{n-\lambda}{2}\right] = (\mu-1) + (\mu-2) + (\mu-2) + \cdots + 1 + 1 = \mu^2 - 2\mu + 1;$$

für $n = 2\mu + 1$ ist:

$$\sum_{\lambda=2}^{n}\left[\frac{n-\lambda}{2}\right] = (\mu-1) + (\mu-1) + \cdots + 1 + 1 = \mu^2 - \mu.$$

Es empfiehlt sich, die einzelnen Zahlformen des n (mod. 6) gesondert zu betrachten; man findet:

$$(6p)_6 \quad = \tfrac{1}{3}[(3p)^2 \quad -6p+1-(3p-1)+2p-(2p-1)] = 3p^2-3p+1,$$

$$(6p+1)_6 = \tfrac{1}{3}[(3p)^2 \quad -3p-3p+2p-2p] = 3p^2-2p,$$

$$(6p+2)_6 = \tfrac{1}{3}[(3p+1)^2-6p-2+1-3p+2p-2p] = 3p^2-p,$$

$$(6p+3)_6 = \tfrac{1}{3}[(3p+1)^2-3p-1-3p-1+2p+1-2p] = 3p^2,$$

$$(6p+4)_6 = \tfrac{1}{3}[(3p+2)^2-6p-4+1-3p-1+2p+1-2p-1] = 3p^2+p,$$

$$(6p+5)_6 = \tfrac{1}{3}[(3p+2)^2-3p-2-3p-2+2p+1-2p-1] = 3p^2+2p.$$

Die Anzahl der Darstellungen der Zahl n durch drei beliebige Summanden, d. i. die Summe $(n)_4 + (n)_5 + (n)_6$ ist nach einem bekannten Satze mit $(n+3)_4$ identisch; ferner besagt der Satz von De Morgan-Sylvester, daſs diese Anzahl der an $\frac{n^2}{12}$ zunächst liegenden ganzen Zahl gleich ist.

$$\underline{(n)_7 = N(n = \alpha + \alpha + \alpha + \alpha)} = \left[\frac{n}{4}\right] - \left[\frac{n-1}{4}\right].$$

$$\underline{(n)_8 = N(n = \alpha + \alpha + \alpha + \beta)}.$$

Da β mindestens 1 sein muſs, kann α die Werte $1, \cdots, \frac{n-1}{3}$ haben; doch muſs der Fall ausgeschieden werden, wo α mit β zusammenfällt; es ist also:

$$(n)_8 = \left[\frac{n-1}{3}\right] - (n)_7 = \left[\frac{n-1}{3}\right] - \left[\frac{n}{4}\right] + \left[\frac{n-1}{4}\right].$$

$$\underline{(n)_9 = N(n = \alpha + \alpha + \beta + \beta)}$$

$$(n)_9 = 0 \text{ für ungerade } n.$$

$$(n)_9 = \left(\frac{n}{2}\right)_3 = \left[\frac{n-2}{4}\right] \text{ für gerade } n.$$

$$\underline{(n)_{10} = N(n = \alpha + \alpha + \beta + \gamma).}$$

Hier muſs $n - 2\alpha$ auf alle möglichen Arten als Summe von zwei verschiedenen Summanden dargestellt werden; es ist also $\sum\limits_{\alpha=1,2,\ldots}(n-2\alpha)_3$ zu bilden; doch sind in dieser die Darstellungen $n = \alpha + \alpha + \alpha + \beta$ mitgezählt, deren Anzahl $(n)_8$ ist; somit folgt:

$$(n)_{10} = \sum_{\alpha=1,2,\ldots}\left[\frac{n-2\alpha-1}{2}\right] - \left[\frac{n-1}{3}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] - \left[\frac{n-1}{4}\right]$$

$$= \left[\frac{n-3}{2}\right] + \left[\frac{n-5}{2}\right] + \left[\frac{n-7}{2}\right] + \cdots - \left[\frac{n-1}{3}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] - \left[\frac{n-1}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{n-1}{2}\right]\cdot\left[\frac{n-3}{2}\right] - \left[\frac{n-1}{3}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] - \left[\frac{n-1}{4}\right].$$

Um die Symbole für die gröſsten ganzen Zahlen zu eliminieren, müssen wir die zwölf Zahlformen des n (mod. 12) gesondert behandeln; es findet sich in einfacher Weise:

$$\begin{aligned}
(12p)_{10} &= 18p^2 - 13p + 3, & (12p + 1)_{10} &= 18p^2 - 7p,\\
(12p + 2)_{10} &= 18p^2 - 7p, & (12p + 3)_{10} &= 18p^2 - p,\\
(12p + 4)_{10} &= 18p^2 - p, & (12p + 5)_{10} &= 18p^2 + 5p,\\
(12p + 6)_{10} &= 18p^2 + 5p, & (12p + 7)_{10} &= 18p^2 + 11p + 1,\\
(12p + 8)_{10} &= 18p^2 + 11p + 2, & (12p + 9)_{10} &= 18p^2 + 17p + 4,\\
(12p + 10)_{10} &= 18p^2 + 17p + 3, & (12p + 11)_{10} &= 18p^2 + 23p + 7.
\end{aligned}$$

$$\underline{(n)_{11} = N(n = \alpha + \beta + \gamma + \delta).}$$

Stellen wir $n - \alpha$ auf alle möglichen Arten als Summe dreier verschiedener Summanden dar, so erhalten wir jede der gesuchten Darstellungen viermal, da sich jedes der darin vorkommenden Elemente als α auffassen läſst; überdies erhalten wir auch noch jede der in $(n)_{10}$ gezählten Darstellungen einfach; somit ist:

$$4(n)_{11} = \sum_{\alpha=1}^{n-1}(n-\alpha)_6 - (n)_{10} = \sum_{\lambda=1}^{n-1}(\lambda)_6 - (n)_{10}.$$

Zunächst scheiden wir die einzelnen Formen des n (mod. 6) von einander; hat n die Form $6p+i$, so leuchtet folgende Identität unmittelbar ein:

$$\sum_{\lambda=1}^{n-1}(\lambda)_6 = \sum_{\mu=1}^{p-1}(6\mu)_6 + \sum_{\mu=0}^{p-1}(6\mu+1)_6 + \sum_{\mu=0}^{p-1}(6\mu+2)_6 + \sum_{\mu=0}^{p-1}(6\mu+3)_6$$
$$+ \sum_{\mu=0}^{p-1}(6\mu+4)_6 + \sum_{\mu=0}^{p-1}(6\mu+5)_6 + (6p)_6 + (6p+1)_6$$
$$+ \cdots + (6p+i-1)_6.$$

Für $i=0$ fallen die letzteren Glieder weg. Führt man nun die bereits ermittelten Werte für $(n)_6$ ein, so folgt:

$$\sum_{\lambda=1}^{n-1}(\lambda)_6 = \sum_{\mu=0}^{p-1}(18\mu^2-3\mu+1) - 1 + (6p)_6 + (6p+1)_6$$
$$+ \cdots + (6p+i-1)_6.$$

Nun ist aber:

$$\sum_{\mu=0}^{p-1}\mu^2 = \tfrac{1}{3}p^3 - \tfrac{1}{2}p^2 + \tfrac{1}{6}p, \quad \sum_{\mu=0}^{p-1}\mu = \tfrac{1}{2}p^2 - \tfrac{1}{2}p,$$

so dafs unsere Summe übergeht in:

$$\sum_{\lambda=1}^{n-1}(\lambda)_6 = 18(\tfrac{1}{3}p^3 - \tfrac{1}{2}p^2 + \tfrac{1}{6}p) - 3(\tfrac{1}{2}p^2 - \tfrac{1}{2}p) + p - 1 + (6p)_6$$
$$+ \cdots + (6p+i-1)_6.$$

Nach Subtraktion des Wertes von $(n)_{10}$ folgt hieraus für $4(n)_{11}$ nach einfacher Reduktion:

$$4(6p)_{11} = 6p^3 - 15p^2 + 12p - 3 - \left[\frac{6p}{4}\right] + \left[\frac{6p-1}{4}\right],$$
$$4(6p+1)_{11} = 6p^3 - 12p^2 + 6p,$$
$$4(6p+2)_{11} = 6p^3 - 9p^2 + 4p - \left[\frac{6p+2}{4}\right] - \left[\frac{6p+1}{4}\right],$$
$$4(6p+3)_{11} = 6p^3 - 6p^2,$$
$$4(6p+4)_{11} = 6p^3 - 3p^2 + 1 - \left[\frac{6p+3}{4}\right] + \left[\frac{6p+2}{4}\right],$$
$$4(6p+5)_{11} = 6p^2 - 2p.$$

Um auch noch das von der Teilbarkeit durch 4 abhängige Glied $\left[\frac{n}{4}\right] - \left[\frac{n-1}{4}\right]$ zu entfernen, sondern wir die einzelnen Zahlformen des n (mod. 12), indem wir in die eben gefundenen Formeln statt p

zunächst $2p$, sodann $2p+1$ einführen; es ergiebt sich auf diese Weise:

$$(12p)_{11} = 12p^3 - 15p^2 + 6p - 1, \quad (12p+1)_{11} = 12p^3 - 12p^2 + 3p,$$
$$(12p+2)_{11} = 12p^3 - 9p^2 + 2p, \quad (12p+3)_{11} = 12p^3 - 6p^2,$$
$$(12p+4)_{11} = 12p^3 - 3p^2, \quad (12p+5)_{11} = 12p^3 - p,$$
$$(12p+6)_{11} = 12p^3 + 3p^2, \quad (12p+7)_{11} = 12p^3 + 6p^2,$$
$$(12p+8)_{11} = 12p^3 + 9p^2 + 2p, \quad (12p+9)_{11} = 12p^3 + 12p^2 + 3p,$$
$$(12p+10)_{11} = 12p^3 + 15p^2 + 6p + 1, \quad (12p+11)_{11} = 12p^3 + 18p^2 + 8p + 1.$$

Die Gesamtzahl der Darstellungen der Zahl n durch 4 beliebige Elemente ist gegeben durch $(n)_7 + (n)_8 + (n)_9 + (n)_{10} + (n)_{11}$; überdies ist dieselbe Anzahl bekanntlich gleich der Anzahl der Darstellungen von $n+6$ durch 4 verschiedene Elemente, also gleich $(n+6)_{11}$.

$$\underline{(n)_{12} = N(n = \alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \alpha)} = \left[\frac{n}{5}\right] - \left[\frac{n-1}{5}\right].$$

$$\underline{(n)_{13} = N(n = \alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \beta).}$$

Dem α können wir, da β mindestens den Wert 1 haben mufs, $\left[\frac{n-1}{4}\right]$ Werte erteilen, doch erhalten wir hierdurch auch die eventuell vorhandene Darstellung der Zahl n durch fünf gleiche Summanden; somit ist

$$(n)_{13} = \left[\frac{n-1}{4}\right] - \left[\frac{n}{5}\right] + \left[\frac{n-1}{5}\right].$$

$$\underline{(n)_{14} = N(n = \alpha + \alpha + \alpha + \beta + \beta).}$$

Hier mufs $\alpha \equiv n \pmod{2}$ sein; da überdies β mindestens $= 1$ ist, darf 3α den Wert $n-2$ nicht überschreiten; diesen beiden Bedingungen genügen, wie eine einfache Überlegung zeigt, bei geradem n $\left[\frac{n-2}{6}\right]$, bei ungeradem n $\left[\frac{n+1}{6}\right]$ Werte α; da in beiden Fällen wieder die etwaige Darstellung $n = 5\alpha$ mitgezählt ist, ergiebt sich:

$$\text{bei geradem } n \quad (n)_{14} = \left[\frac{n-2}{6}\right] - \left[\frac{n}{5}\right] + \left[\frac{n-1}{5}\right],$$

$$\text{bei ungeradem } n \quad (n)_{14} = \left[\frac{n+1}{6}\right] - \left[\frac{n}{5}\right] + \left[\frac{n-1}{5}\right].$$

$$\underline{(n)_{15} = N(n = \alpha + \alpha + \alpha + \beta + \gamma).}$$

α kann einen beliebigen Wert haben; dann ist $n - 3\alpha$ noch auf alle möglichen Arten als Summe zweier Elemente $\beta + \gamma$ darzustellen; dies führt zum Ausdrucke:

$$\left[\frac{n-3}{2}\right] + \left[\frac{n-6}{2}\right] + \left[\frac{n-9}{2}\right] + \cdots;$$

in diesem sind aber ersichtlicher Weise auch die in $(n)_{12}$, $(n)_{13}$ und $(n)_{14}$ gezählten Darstellungen mitgezählt; diese Anzahlen müssen daher in Abzug gebracht werden. Die eben gefundene Summe zerfällt in die beiden folgenden:

$$\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]-1\right)+\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]-4\right)+\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]-7\right)+\cdots=\sum_{\xi=0,1,2,\ldots}\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]-3\xi-1\right)$$

und

$$\left(\left[\frac{n}{2}\right]-3\right)+\left(\left[\frac{n}{2}\right]-6\right)+\left(\left[\frac{n}{2}\right]-9\right)+\cdots=\sum_{\eta=1,2,\ldots}\left(\left[\frac{n}{2}\right]-3\eta\right).$$

Diese beiden arithmetischen Reihen mit der Differenz 3 sind unmittelbar zu summieren; führt man dies durch und zieht, obiger Bemerkung entsprechend $(n)_{12}+(n)_{13}+(n)_{14}$ ab, so ergeben sich für die verschiedenen Zahlformen mod. 12 folgende Formeln:

$$\begin{aligned}
(12p)_{15} &= 12p^2-9p+2+\left[\frac{12p}{5}\right]-\left[\frac{12p-1}{5}\right],\\
(12p+1)_{15} &= 12p^2-7p+\left[\frac{12p+1}{5}\right]-\left[\frac{12p}{5}\right],\\
(12p+2)_{15} &= 12p^2-5p+\left[\frac{12p+2}{5}\right]-\left[\frac{12p+1}{5}\right],\\
(12p+3)_{15} &= 12p^2-3p+\left[\frac{12p+3}{5}\right]-\left[\frac{12p+2}{5}\right],\\
(12p+4)_{15} &= 12p^2-p+\left[\frac{12p+4}{5}\right]-\left[\frac{12p+3}{5}\right],\\
(12p+5)_{15} &= 12p^2+p-1+\left[\frac{12p+5}{5}\right]-\left[\frac{12p+4}{5}\right],\\
(12p+6)_{15} &= 12p^2+3p+\left[\frac{12p+6}{5}\right]-\left[\frac{12p+5}{5}\right],\\
(12p+7)_{15} &= 12p^2+5p+\left[\frac{12p+7}{5}\right]-\left[\frac{12p+6}{5}\right],\\
(12p+8)_{15} &= 12p^2+7p+1+\left[\frac{12p+8}{5}\right]-\left[\frac{12p+7}{5}\right],\\
(12p+9)_{15} &= 12p^2+9p+1+\left[\frac{12p+9}{5}\right]-\left[\frac{12p+8}{5}\right],\\
(12p+10)_{15} &= 12p^2+11p+2+\left[\frac{12p+10}{5}\right]-\left[\frac{12p+9}{5}\right],\\
(12p+11)_{15} &= 12p^2+13p+3+\left[\frac{12p+11}{5}\right]-\left[\frac{12p+10}{5}\right].
\end{aligned}$$

Diese Formeln enthalten allerdings noch das von der Teilbarkeit durch 5 abhängige Glied $\left[\frac{n}{5}\right]-\left[\frac{n-1}{5}\right]$; es schien uns aber die Beibehaltung dieses Gliedes gegenüber der anderen Möglichkeit, alle Zahlformen (mod. 60) von einander zu sondern, den Vorzug zu verdienen.

$$(n)_{16} = N(n = \alpha + \alpha + \beta + \beta + \gamma).$$

Vor allem mufs $\gamma \equiv n \pmod{2}$ sein; für jeden einzelnen Wert γ mufs $\frac{n-\gamma}{2}$ in zwei Summanden $\alpha + \beta$ zerfällt werden, was auf $\left[\frac{n-\gamma}{4}\right]$ Arten geschehen kann; aufser den gesuchten werden hierdurch aber auch die Darstellungen $n = \alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \alpha$, $n = \alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \beta$ und $n = \alpha + \alpha + \alpha + \beta + \beta$ zum Vorschein kommen; es ergiebt sich sonach:

bei geradem n:

$$(n)_{16} = \left[\frac{n-2}{4}\right] + \left[\frac{n-4}{4}\right] + \left[\frac{n-6}{4}\right] + \cdots - (n)_{12} - (n)_{13} - (n)_{14},$$

bei ungeradem n:

$$(n)_{16} = \left[\frac{n-1}{4}\right] + \left[\frac{n-3}{4}\right] + \left[\frac{n-5}{4}\right] + \cdots - (n)_{12} - (n)_{13} - (n)_{14}.$$

Diese Summen lassen sich als arithmetische Reihen unmittelbar auswerten; indem wir auch hier wieder die 12 Zahlformen (mod. 12) gesondert betrachten, erhalten wir die Formeln:

$$\begin{aligned}
(12p)_{16} &= 9p^2 - 8p + 2 + \left[\frac{12p}{5}\right] - \left[\frac{12p-1}{5}\right],\\
(12p+1)_{16} &= 9p^2 - 5p + \left[\frac{12p+1}{5}\right] - \left[\frac{12p}{5}\right],\\
(12p+2)_{16} &= 9p^2 - 5p + \left[\frac{12p+2}{5}\right] - \left[\frac{12p+1}{5}\right],\\
(12p+3)_{16} &= 9p^2 - 2p + \left[\frac{12p+3}{5}\right] - \left[\frac{12p+2}{5}\right],\\
(12p+4)_{16} &= 9p^2 - 2p + \left[\frac{12p+4}{5}\right] - \left[\frac{12p+3}{5}\right],\\
(12p+5)_{16} &= 9p^2 + p - 1 + \left[\frac{12p+5}{5}\right] - \left[\frac{12p+4}{5}\right],\\
(12p+6)_{16} &= 9p^2 + p + \left[\frac{12p+6}{5}\right] - \left[\frac{12p+5}{5}\right],\\
(12p+7)_{16} &= 9p^2 + 4p + \left[\frac{12p+7}{5}\right] - \left[\frac{12p+6}{5}\right],\\
(12p+8)_{16} &= 9p^2 + 4p + \left[\frac{12p+8}{5}\right] - \left[\frac{12p+7}{5}\right],\\
(12p+9)_{16} &= 9p^2 + 7p + 1 + \left[\frac{12p+9}{5}\right] - \left[\frac{12p+8}{5}\right],\\
(12p+10)_{16} &= 9p^2 + 7p + 1 + \left[\frac{12p+10}{5}\right] - \left[\frac{12p+9}{5}\right],\\
(12p+11)_{16} &= 9p^2 + 10p + 2 + \left[\frac{12p+11}{5}\right] - \left[\frac{12p+10}{5}\right].
\end{aligned}$$

$$(n)_{17} = N(n = \alpha + \alpha + \beta + \gamma + \delta).$$

Wir zerlegen $n - 2\alpha$ auf alle möglichen Arten in 3 verschiedene Elemente und bilden dementsprechend die Summe $\sum\limits_{\alpha=1,2,\ldots}(n-2\alpha)_6$; in dieser sind aufser den gesuchten Darstellungen auch noch diejenigen der Form $n=\alpha+\alpha+\alpha+\beta+\gamma$ mitgezählt; die Anzahl dieser letzteren, d. i. $(n)_{15}$, mufs also in Abzug gebracht werden; somit findet sich:

$$(n)_{17} = \sum_{\alpha=1,2,\ldots}(n-2\alpha)_6 - (n)_{15}.$$

Wir unterscheiden nun zunächst die 6 verschiedenen Formen der Zahl n (mod. 6); mit Hilfe des früher ermittelten Ausdruckes für $(n)_6$ erhalten wir folgende Beziehungen:

für $n = 6p$; $$\sum_\alpha(n-2\alpha)_6 = \sum_0^{p-1}(3\varkappa^2+\varkappa) + \sum_0^{p-1}(3\varkappa^2-\varkappa) + \sum_1^{p-1}(3\varkappa^2-3\varkappa+1) = \sum_0^{p-1}(9\varkappa^2-3\varkappa+1) - 1,$$

für $n = 6p+1$; $$\sum_\alpha(n-2\alpha)_6 = \sum_0^{p-1}(3\varkappa^2+2\varkappa) + \sum_0^{p-1}(3\varkappa^2) + \sum_0^{p-1}(3\varkappa^2-2\varkappa) = \sum_0^{p-1}(9\varkappa^2),$$

für $n = 6p+2$; $$\sum_\alpha(n-2\alpha)_6 = \sum_1^{p}(3\varkappa^2-3\varkappa+1) + \sum_0^{p-1}(3\varkappa^2+\varkappa) + \sum_0^{p-1}(3\varkappa^2-\varkappa) = \sum_0^{p-1}(9\varkappa^2-3\varkappa+1) - 1 + 3p^2 - 3p + 1,$$

für $n = 6p+3$; $$\sum_\alpha(n-2\alpha)_6 = \sum_0^{p}(3\varkappa^2-2\varkappa) + \sum_0^{p-1}(3\varkappa^2+2\varkappa) + \sum_0^{p-1}(3\varkappa^2) = \sum_0^{p-1}(9\varkappa^2) + 3p^2 - 2p,$$

für $n = 6p+4$; $$\sum_\alpha(n-2\alpha)_6 = \sum_0^{p}(3\varkappa^2-\varkappa) + \sum_1^{p}(3\varkappa^2-3\varkappa+1) + \sum_0^{p-1}(3\varkappa^2+\varkappa) = \sum_0^{p-1}(9\varkappa^2-3\varkappa+1) - 1 + 6p^2 - 4p + 1,$$

$$\text{für } n = 6p + 5: \ \sum_{\alpha}(n-2\alpha)_6 = \sum_0^p(3\varkappa^2) + \sum_0^p(3\varkappa^2 - 2\varkappa)$$
$$+ \sum_0^{p-1}(3\varkappa^2 + 2\varkappa) = \sum_0^{p-1}(9\varkappa^2) + 6p^2 - 2p.$$

Hierin setzen wir:

$$\sum_0^{p-1}\varkappa^2 = \tfrac{1}{3}p^3 - \tfrac{1}{2}p^2 + \tfrac{1}{6}p, \quad \sum_0^{p-1}\varkappa = \tfrac{1}{2}p^2 - \tfrac{1}{2}p, \quad \sum_0^{p-1}1 = p,$$

wodurch die Gleichungen entstehen:

$$\text{für } n = 6p; \quad \sum_{\alpha}(n-2\alpha)_6 = 3p^3 - 6p^2 + 4p - 1,$$
$$\text{für } n = 6p+1; \quad \sum_{\alpha}(n-2\alpha)_6 = 3p^3 - \tfrac{9}{2}p^2 + \tfrac{3}{2}p,$$
$$\text{für } n = 6p+2; \quad \sum_{\alpha}(n-2\alpha)_6 = 3p^3 - 3p^2 + p,$$
$$\text{für } n = 6p+3; \quad \sum_{\alpha}(n-2\alpha)_6 = 3p^3 - \tfrac{3}{2}p^2 - \tfrac{1}{2}p,$$
$$\text{für } n = 6p+4; \quad \sum_{\alpha}(n-2\alpha)_6 = 3p^3,$$
$$\text{für } n = 6p+5; \quad \sum_{\alpha}(n-2\alpha)_6 = 3p^3 + \tfrac{3}{2}p^2 - \tfrac{1}{2}p.$$

Von diesen Werten ist $(n)_{15}$ zu subtrahieren; dabei empfiehlt es sich wieder, die einzelnen Zahlformen mod. 12 gesondert zu behandeln; man erhält nach einfachen Umformungen:

$$(12p)_{17} = 24p^3 - 36p^2 + 17p - 3 - \left[\frac{12p}{5}\right] + \left[\frac{12p-1}{5}\right],$$
$$(12p+1)_{17} = 24p^3 - 30p^2 + 10p - \left[\frac{12p+1}{5}\right] + \left[\frac{12p}{5}\right],$$
$$(12p+2)_{17} = 24p^3 - 24p^2 + 7p - \left[\frac{12p+2}{5}\right] + \left[\frac{12p+1}{5}\right],$$
$$(12p+3)_{17} = 24p^3 - 18p^2 + 2p - \left[\frac{12p+3}{5}\right] + \left[\frac{12p+2}{5}\right],$$
$$(12p+4)_{17} = 24p^3 - 12p^2 + p - \left[\frac{12p+4}{5}\right] + \left[\frac{12p+3}{5}\right],$$
$$(12p+5)_{17} = 24p^3 - 6p^2 - 2p + 1 - \left[\frac{12p+5}{5}\right] + \left[\frac{12p+4}{5}\right],$$
$$(12p+6)_{17} = 24p^3 - p - \left[\frac{12p+6}{5}\right] + \left[\frac{12p+5}{5}\right],$$

$$(12p+7)_{17} = 24p^3 + 6p^2 - 2p \qquad - \left[\frac{12p+7}{5}\right] + \left[\frac{12p+6}{5}\right],$$

$$(12p+8)_{17} = 24p^3 + 12p^2 + p \qquad - \left[\frac{12p+8}{5}\right] + \left[\frac{12p+7}{5}\right],$$

$$(12p+9)_{17} = 24p^3 + 18p^2 + 2p \qquad - \left[\frac{12p+9}{5}\right] + \left[\frac{12p+8}{5}\right],$$

$$(12p+10)_{17} = 24p^3 + 24p^2 + 7p + 1 - \left[\frac{12p+10}{5}\right] + \left[\frac{12p+9}{5}\right],$$

$$(12p+11)_{17} = 24p^3 + 30p^2 + 10p + 1 - \left[\frac{12p+11}{5}\right] + \left[\frac{12p+10}{5}\right].$$

$(n)_{18} = N(n = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon)$.

$n - \alpha$ ist in vier verschiedene Summanden zu zerlegen; thut man dies für alle Werte α, so erhält man jede der gesuchten Darstellungen fünfmal, weil jedes ihrer Elemente sich als α auffassen läfst; aufserdem erhält man aber auch noch die Darstellungen $n = \alpha + \alpha + \beta + \gamma + \delta$, jede einmal gezählt; es ist also:

$$5(n)_{18} = \sum_{\alpha=1,2,\ldots} (n-\alpha)_{11} - (n)_{17}.$$

Was nun die zu bestimmende Summe betrifft, so besteht für $n = 12p + i$ folgende Identität:

$$\sum_{\alpha=1,2,\ldots}(n-\alpha)_{11} = \sum_{\lambda=1}^{n-1}(\lambda)_{11} = \sum_{\varkappa=1}^{p-1}(12\varkappa)_{11} + \sum_{\varkappa=0}^{p-1}(12\varkappa+1)_{11} + \sum_{\varkappa=0}^{p-1}(12\varkappa+2)_{11}$$

$$+ \cdots + \sum_{\varkappa=0}^{p-1}(12\varkappa+11)_{11} + (12p)_{11} + (12p+1)_{11} + \cdots + (12p+i-1)_{11}.$$

Setzt man die bereits ermittelten Werte von $(\lambda)_{11}$ ein, so ergiebt sich als Summe der ersten 12 Glieder:

$$\sum_{\varkappa=0}^{p-1}(144\varkappa^3 + 18\varkappa^2 + 29\varkappa + 1) + 1,$$

und indem wir aufser den früher benutzten Formeln für $\sum_0^{p-1}\varkappa^2$, $\sum_0^{p-1}\varkappa$, $\sum_0^{p-1}1$ noch die Formel: $\sum_0^{p-1}\varkappa^3 = \frac{1}{4}p^4 - \frac{1}{2}p^3 + \frac{1}{4}p^2$ verwenden, nimmt dieselbe Summe nach einfacher Transformation die Gestalt an:

$$36p^4 - 66p^3 + \tfrac{83}{2}p^2 - \tfrac{21}{2}p + 1.$$

Addiert man hierzu noch $\sum_{j=0}^{i-1}(12p+j)_{11}$, subtrahiert $(n)_{17}$ und multipliziert zur Fortschaffung der Brüche mit 2, so ergeben sich für die einzelnen Formen des n folgende Resultate:

$$
\begin{aligned}
10(12p)_{18} &= 72p^4-180p^3+155p^2-55p+8+2\left[\frac{12p}{5}\right]-2\left[\frac{12p-1}{5}\right],\\
10(12p+1)_{18} &= 72p^4-156p^3+113p^2-29p+2\left[\frac{12p+1}{5}\right]-2\left[\frac{12p}{5}\right],\\
10(12p+2)_{18} &= 72p^4-132p^3+77p^2-17p+2\left[\frac{12p+2}{5}\right]-2\left[\frac{12p+1}{5}\right],\\
10(12p+3)_{18} &= 72p^4-108p^3+47p^2-3p+2\left[\frac{12p+3}{5}\right]-2\left[\frac{12p+2}{5}\right],\\
10(12p+4)_{18} &= 72p^4-84p^3+23p^2-p+2\left[\frac{12p+4}{5}\right]-2\left[\frac{12p+3}{5}\right],\\
10(12p+5)_{18} &= 72p^4-60p^3+5p^2+5p-2+2\left[\frac{12p+5}{5}\right]-2\left[\frac{12p+4}{5}\right],\\
10(12p+6)_{18} &= 72p^4-36p^3-7p^2+p+2\left[\frac{12p+6}{5}\right]-2\left[\frac{12p+5}{5}\right],\\
10(12p+7)_{18} &= 72p^4-12p^3-13p^2+3p+2\left[\frac{12p+7}{5}\right]-2\left[\frac{12p+6}{5}\right],\\
10(12p+8)_{18} &= 72p^4+12p^3-13p^2-3p+2\left[\frac{12p+8}{5}\right]-2\left[\frac{12p+7}{5}\right],\\
10(12p+9)_{18} &= 72p^4+36p^3-7p^2-p+2\left[\frac{12p+9}{5}\right]-2\left[\frac{12p+8}{5}\right],\\
10(12p+10)_{18} &= 72p^4+60p^3+5p^2-5p-2+2\left[\frac{12p+10}{5}\right]-2\left[\frac{12p+9}{5}\right],\\
10(12p+11)_{18} &= 72p^4+84p^3+23p^2+p+2\left[\frac{12p+11}{5}\right]-2\left[\frac{12p+10}{5}\right].
\end{aligned}
$$

Wieder sei bemerkt, daſs die gefundene Darstellungsanzahl der Zahl n durch 5 *verschiedene* Elemente auch zur Kenntnis der Gesamtzahl der Darstellungen durch 5 *beliebige* Elemente ausreicht, indem letztere durch $(n+10)_{18}$ gegeben ist.

$$\underline{(n)_{19} = N(n = \alpha+\alpha+\alpha+\alpha+\alpha+\alpha) = \left[\frac{n}{6}\right] - \left[\frac{n-1}{6}\right].}$$

$$\underline{(n)_{20} = N(n = \alpha+\alpha+\alpha+\alpha+\alpha+\beta).}$$

α kann $\left[\frac{n-1}{5}\right]$ Werte annehmen; doch ist dann auch die Darstellung $n = 6\alpha$ mitgezählt; es ist daher:

$$(n)_{20} = \left[\frac{n-1}{5}\right] - \left[\frac{n}{6}\right] + \left[\frac{n-1}{6}\right].$$

$$\underline{(n)_{21} = N(n = \alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \beta + \beta).}$$

$(n)_{21}$ kann nur für gerade n von 0 verschieden sein und ist dann gleich der Anzahl der Darstellungen von $\frac{n}{2}$ in der Form $\alpha + \alpha + \beta$, also gleich $\left(\frac{n}{2}\right)_5$; daraus folgt:

$$(n)_{21} = 0$$

für ungerade n,

$$(n)_{21} = \left[\frac{\frac{n}{2} - 1}{2}\right] - \left[\frac{n}{6}\right] + \left[\frac{n-1}{6}\right] = \left[\frac{n-2}{4}\right] - \left[\frac{n}{6}\right] + \left[\frac{n-1}{6}\right]$$

für gerade n.

$$\underline{(n)_{22} = N(n = \alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \beta + \gamma).}$$

Hat α einen bestimmten Wert, so ist $n - 4\alpha$ in zwei Summanden zu zerlegen; dabei kommen auch die in $(n)_{21}$, $(n)_{20}$ und $(n)_{19}$ gezählten Darstellungen zum Vorschein. Es ist daher:

$$(n)_{22} = \sum_{\alpha=1,2,\dots} \left[\frac{n-4\alpha}{2}\right] - (n)_{21} - (n)_{20} - (n)_{19}.$$

Man erhält hieraus in einfacher Weise für die einzelnen Zahlformen des n (mod. 12):

$$\begin{aligned}
(12p)_{22} &= 9p^2 - 6p + 2 - \left[\frac{12p-1}{5}\right],\\
(12p+1)_{22} &= 9p^2 - 3p - \left[\frac{12p}{5}\right],\\
(12p+2)_{22} &= 9p^2 - 3p - \left[\frac{12p+1}{5}\right],\\
(12p+3)_{22} &= 9p^2 - \left[\frac{12p+2}{5}\right],\\
(12p+4)_{22} &= 9p^2 - \left[\frac{12p+3}{5}\right],\\
(12p+5)_{22} &= 9p^2 + 3p - \left[\frac{12p+4}{5}\right],\\
(12p+6)_{22} &= 9p^2 + 3p + 1 - \left[\frac{12p+5}{5}\right],\\
(12p+7)_{22} &= 9p^2 + 6p + 1 - \left[\frac{12p+6}{5}\right],\\
(12p+8)_{22} &= 9p^2 + 6p + 1 - \left[\frac{12p+7}{5}\right],\\
(12p+9)_{22} &= 9p^2 + 9p + 2 - \left[\frac{12p+8}{5}\right],\\
(12p+10)_{22} &= 9p^2 + 9p + 2 - \left[\frac{12p+9}{5}\right],\\
(12p+11)_{22} &= 9p^2 + 12p + 4 - \left[\frac{12p+10}{5}\right].
\end{aligned}$$

$$\underline{(n)_{23} = N(n = \alpha + \alpha + \alpha + \beta + \beta + \beta).}$$

Diese Anzahl ist offenbar nur dann von 0 verschieden, wenn n durch 3 teilbar ist und ist dann mit der Anzahl der Darstellungen von $\frac{n}{3}$ in der Form $\alpha + \beta$ identisch; daraus folgt:

$$(n)_{23} = 0, \text{ wenn } n \equiv 1, 2 \pmod{3},$$

$$(n)_{23} = \left[\frac{n}{6}\right] - (n)_{19} = \left[\frac{n-1}{6}\right], \text{ wenn } n \equiv 0 \pmod{3}.$$

$$\underline{(n)_{24} = N(n = \alpha + \alpha + \alpha + \beta + \beta + \gamma).}$$

Indem wir $n - 3\alpha$ in $\beta + \beta + \gamma$ zerlegen, was auf $(n - 3\alpha)_5$ Arten geschehen kann, erhalten wir aufser den gesuchten noch die Darstellungen $n = \alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \beta$ und $n = \alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \beta + \beta$, deren Anzahlen bezüglich $(n)_{20}$ und $(n)_{21}$ sind; hieraus ergiebt sich:

$$(n)_{24} = \sum_{\alpha = 1, 2, \ldots} (n - 3\alpha)_5 - (n)_{20} - (n)_{21}.$$

Nun ist, sobald n durch 3 teilbar ist:

$$(n - 3\alpha)_5 = \left[\frac{n - 3\alpha - 1}{2}\right] - 1,$$

und sobald n nicht durch 3 teilbar ist:

$$(n - 3\alpha)_5 = \left[\frac{n - 3\alpha - 1}{2}\right].$$

Wir erhalten daher für den Fall eines durch 3 teilbaren n:

$$(n)_{24} = \sum_{\alpha = 1, 2, \ldots} \left[\frac{n - 3\alpha - 1}{2}\right] - \left[\frac{n-3}{3}\right] - (n)_{20} - (n)_{21};$$

im Falle eines durch 3 unteilbaren n hingegen:

$$(n)_{24} = \sum_{\alpha = 1, 2, \ldots} \left[\frac{n - 3\alpha - 1}{2}\right] - (n)_{20} - (n)_{21}.$$

Um $\sum_{\alpha = 1, 2, \ldots} \left[\frac{n - 3\alpha - 1}{2}\right]$ zu berechnen, summieren wir zunächst über alle geraden, dann über alle ungeraden Werte α; dadurch entstehen zwei arithmetische Progressionen mit der Differenz 3, welche unmittelbar summierbar sind. Da ferner $(n)_{20}$ und $(n)_{21}$ bekannt sind, macht die Berechnung von $(n)_{24}$ keine Schwierigkeiten; wir sondern

wieder die verschiedenen Formen der Zahl n (mod. 12); es ergiebt sich:

$$
\begin{aligned}
(12p)_{24} &= 12p^2 - 13p + 5 - \left[\frac{12p-1}{5}\right],\\
(12p+\ \,1)_{24} &= 12p^2 - \ \,4p \qquad\ \, - \left[\frac{12p}{5}\right],\\
(12p+\ \,2)_{24} &= 12p^2 - \ \,5p \qquad\ \, - \left[\frac{12p+1}{5}\right],\\
(12p+\ \,3)_{24} &= 12p^2 - \ \,4p \qquad\ \, - \left[\frac{12p+2}{5}\right],\\
(12p+\ \,4)_{24} &= 12p^2 - \ \ \,p \qquad\ \, - \left[\frac{12p+3}{5}\right],\\
(12p+\ \,5)_{24} &= 12p^2 + \ \,4p \qquad\ \, - \left[\frac{12p+4}{5}\right],\\
(12p+\ \,6)_{24} &= 12p^2 - \ \ \,p + 1 - \left[\frac{12p+5}{5}\right],\\
(12p+\ \,7)_{24} &= 12p^2 + \ \,8p + 1 - \left[\frac{12p+6}{5}\right],\\
(12p+\ \,8)_{24} &= 12p^2 + \ \,7p + 1 - \left[\frac{12p+7}{5}\right],\\
(12p+\ \,9)_{24} &= 12p^2 + \ \,8p + 1 - \left[\frac{12p+8}{5}\right],\\
(12p+10)_{24} &= 12p^2 + 11p + 2 - \left[\frac{12p+9}{5}\right],\\
(12p+11)_{24} &= 12p^2 + 16p + 5 - \left[\frac{12p+10}{5}\right].
\end{aligned}
$$

$$\underline{(n)_{25} = N(n = \alpha + \alpha + \alpha + \beta + \gamma + \delta).}$$

Hier muſs $n - 3\alpha$ in drei verschiedene Summanden zerlegt werden, was auf $(n - 3\alpha)_6$ Arten möglich ist; hiebei werden jedoch auch die Darstellungen der Form $n = \alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \beta + \gamma$ erzeugt, deren Anzahl somit subtrahiert werden muſs; es ist also:

$$(n)_{25} = \sum_{\alpha=1,2,\ldots} (n - 3\alpha)_6 - (n)_{22}.$$

Um die rechtsstehende Summe auszuwerten, unterscheiden wir zunächst die einzelnen Zahlformen des n(mod . 6) man findet:

$$\sum_{\alpha}(6p - 3\alpha)_6 = \sum_{1}^{p-1}(3x^2 - 3x + 1) + \sum_{0}^{p-1}(3x^2) = 2p^3 - \tfrac{9}{2}p^2 + \tfrac{7}{2}p - 1,$$

$$\sum_{\alpha}(6p + 1 - 3\alpha)_6 = \sum_{0}^{p-1}(3x^2 - 2x) + \sum_{0}^{p-1}(3x^2 + x) = 2p^3 - \tfrac{7}{2}p^2 + \tfrac{3}{2}p,$$

$$\sum_{\alpha}(6p+2-3\alpha)_6 = \sum_{0}^{p-1}(3x^2-x) + \sum_{0}^{p-1}(3x^2+2x) = 2p^3 - \tfrac{5}{2}p^2 + \tfrac{1}{2}p,$$

$$\sum_{\alpha}(6p+3-3\alpha)_6 = \sum_{1}^{p}(3x^2-3x+1) + \sum_{0}^{p-1}(3x^2) = 2p^3 - \tfrac{3}{2}p^2 + \tfrac{1}{2}p,$$

$$\sum_{\alpha}(6p+4-3\alpha)_6 = \sum_{0}^{p}(3x^2-2x) + \sum_{0}^{p-1}(3x^2+x) = 2p^3 - \tfrac{1}{2}p^2 - \tfrac{1}{2}p,$$

$$\sum_{\alpha}(6p+5-3\alpha)_6 = \sum_{0}^{p}(3x^2-x) + \sum_{0}^{p-1}(3x^2+2x) = 2p^3 + \tfrac{1}{2}p^2 - \tfrac{1}{2}p.$$

In diese Formeln setzen wir für p zunächst $2p$, dann $2p+1$, um die einzelnen Zahlformen (mod. 12) von einander zu sondern; durch Subtraktion der bereits bekannten Werte von $(n)_{22}$ ergeben sich dann folgende Formeln:

$$(12p)_{25} = 16p^3 - 27p^2 + 13p - 3 + \left[\frac{12p-1}{5}\right],$$

$$(12p+1)_{25} = 16p^3 - 23p^2 + 6p + \left[\frac{12p}{5}\right],$$

$$(12p+2)_{25} = 16p^3 - 19p^2 + 4p + \left[\frac{12p+1}{5}\right],$$

$$(12p+3)_{25} = 16p^3 - 15p^2 + p + \left[\frac{12p+2}{5}\right],$$

$$(12p+4)_{25} = 16p^3 - 11p^2 - p + \left[\frac{12p+3}{5}\right],$$

$$(12p+5)_{25} = 16p^3 - 7p^2 - 4p + \left[\frac{12p+4}{5}\right],$$

$$(12p+6)_{25} = 16p^3 - 3p^2 - 2p - 1 + \left[\frac{12p+5}{5}\right],$$

$$(12p+7)_{25} = 16p^3 + p^2 - 5p - 1 + \left[\frac{12p+6}{5}\right],$$

$$(12p+8)_{25} = 16p^3 + 5p^2 - 3p - 1 + \left[\frac{12p+7}{5}\right],$$

$$(12p+9)_{25} = 16p^3 + 9p^2 - 2p - 1 + \left[\frac{12p+8}{5}\right],$$

$$(12p+10)_{25} = 16p^3 + 13p^2 - 1 + \left[\frac{12p+9}{5}\right],$$

$$(12p+11)_{25} = 16p^3 + 17p^2 + p - 2 + \left[\frac{12p+10}{5}\right].$$

$$\underline{(n)_{26} = N(n = \alpha + \alpha + \beta + \beta + \gamma + \gamma).}$$

$(n)_{26}$ kann nur für gerade n von 0 verschieden sein und ist dann gleich der Anzahl der Darstellungen von $\frac{n}{2}$ durch 3 verschiedene Summanden, also gleich $\left(\frac{n}{2}\right)_6$.

$$\underline{(n)_{27} = N(n = \alpha + \alpha + \beta + \beta + \gamma + \delta)}.$$

Summiert man $(n - 2\alpha)_{10}$, d. h. zählt man die Darstellungen von $n - 2\alpha$ in der Form $\beta + \beta + \gamma + \delta$, so erhält man jede der gesuchten Darstellungen doppelt, weil α und β darin die gleiche Rolle spielen; aufserdem erhält man aber auch noch jene Darstellungen, welche dadurch entstehen, dafs β, γ oder δ mit α zusammenfällt; aus dieser Überlegung ergiebt sich die Beziehung:

$$2\,(n)_{27} = \sum_{\alpha=1,2,\ldots}(n - 2\alpha)_{10} - (n)_{22} - (n)_{24}.$$

Hat n die Form $12p + i$, so besteht für gerade n die Identität:

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha}(n - 2\alpha)_{10} = &\sum_{\mu=1}^{p-1}(12\mu)_{10} + \sum_{\mu=0}^{p-1}(12\mu + 2)_{10} + \sum_{\mu=0}^{p-1}(12\mu + 4)_{10} \\ &+ \sum_{\mu=0}^{p-1}(12\mu + 6)_{10} + \sum_{\mu=0}^{p-1}(12\mu + 8)_{10} + \sum_{\mu=0}^{p-1}(12\mu + 10)_{10} \\ &+ (12p)_{10} + (12p + 2)_{10} + \cdots + (12p + i - 2)_{10},\end{aligned}$$

für ungerade n aber die folgende:

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha}(n - 2\alpha)_{10} = &\sum_{\mu=0}^{p-1}(12\mu + 1)_{10} + \sum_{\mu=0}^{p-1}(12\mu + 3)_{10} + \sum_{\mu=0}^{p-1}(12\mu + 5)_{10} \\ &+ \sum_{\mu=0}^{p-1}(12\mu + 7)_{10} + \sum_{\mu=0}^{p-1}(12\mu + 9)_{10} + \sum_{\mu=0}^{p-1}(12\mu + 11)_{10} \\ &+ (12p + 1)_{10} + (12p + 3)_{10} + \cdots + (12p + i - 2)_{10},\end{aligned}$$

wobei die auf die Summen rechter Hand folgenden Glieder nur für die Fälle $i \geqq 2$ bezw. $i \geqq 3$ eine Bedeutung haben. Führt man die Summation mit Benutzung der bekannten Werte von $(n)_{10}$ aus, so findet man für gerade n:

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha}(n - 2\alpha)_{10} = &\sum_{\mu=0}^{p-1}(108\mu^2 + 12\mu + 8) - 3 + (12p)_{10} + (12p+2)_{10} + \cdots \\ &+ (12p + i - 2)_{10} = 36p^3 - 48p^2 + 20p - 3 + (12p)_{10} \\ &+ (12p + 2)_{10} + \cdots + (12p + i - 2)_{10},\end{aligned}$$

und für ungerade n:

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha}(n - 2\alpha)_{10} = &\sum_{\mu=0}^{p=1}(108\mu^2 + 48\mu + 12) + (12p + 1)_{10} + (12p + 3)_{10} + \cdots \\ &+ (12p + i - 2)_{10} = 36p^3 - 30p^2 + 6p + (12p + 1)_{10} \\ &+ (12p + 3)_{10} + \cdots + (12p + i - 2)_{10}.\end{aligned}$$

Diese Summe ist uns also für die einzelnen Formen des n (mod. 12) nunmehr vollkommen gegeben; subtrahieren wir noch die ebenfalls schon bekannten Werte $(n)_{22}$ und $(n)_{26}$, so erhalten wir nach einfachen Reduktionen:

$$\begin{aligned}
2(12p)_{27} &= 36p^3 - 69p^2 + 39p - 10 + 2\left[\frac{12p-1}{5}\right],\\
2(12p+1)_{27} &= 36p^3 - 51p^2 + 13p \quad\;\; + 2\left[\frac{12p}{5}\right],\\
2(12p+2)_{27} &= 36p^3 - 51p^2 + 15p \quad\;\; + 2\left[\frac{12p+1}{5}\right],\\
2(12p+3)_{27} &= 36p^3 - 33p^2 + 3p \quad\;\; + 2\left[\frac{12p+2}{5}\right],\\
2(12p+4)_{27} &= 36p^3 - 33p^2 + p \quad\;\; + 2\left[\frac{12p+3}{5}\right],\\
2(12p+5)_{27} &= 36p^3 - 15p^2 - 9p \quad\;\; + 2\left[\frac{12p+4}{5}\right],\\
2(12p+6)_{27} &= 36p^3 - 15p^2 - 3p - 2 + 2\left[\frac{12p+5}{5}\right],\\
2(12p+7)_{27} &= 36p^3 + 3p^2 - 11p - 2 + 2\left[\frac{12p+6}{5}\right],\\
2(12p+8)_{27} &= 36p^3 + 3p^2 - 9p - 2 + 2\left[\frac{12p+7}{5}\right],\\
2(12p+9)_{27} &= 36p^3 + 21p^2 - 3p - 2 + 2\left[\frac{12p+8}{5}\right],\\
2(12p+10)_{27} &= 36p^3 + 21p^2 - 5p - 2 + 2\left[\frac{12p+9}{5}\right],\\
2(12p+11)_{27} &= 36p^3 + 39p^2 + 3p - 4 + 2\left[\frac{12p+10}{5}\right].
\end{aligned}$$

$$\underline{(n)_{28} = N(n = \alpha + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon).}$$

Hier mufs $n - 2\alpha$ in vier verschiedene Summanden zerlegt werden; dabei kann es aber geschehen, dafs einer dieser Summanden mit α übereinstimmt, wodurch eine Darstellung $n = \alpha + \alpha + \alpha + \beta + \gamma + \delta$ zum Vorschein kommt. Es besteht sonach die Gleichung:

$$(n)_{28} = \sum_{\alpha=1,2,\ldots}(n - 2\alpha)_{11} - (n)_{25}.$$

Indem wir nun genau dasselbe Verfahren wie im eben behandelten Falle anwenden, erhalten wir für gerade n:

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha}(n-2\alpha)_{11} &= \sum_{\mu=0}^{p-1}(72\mu^3 + 16\mu) + 1 + (12p)_{11} + (12p+2)_{11} + \cdots\\
&\quad + (12p+i-2)_{11} = 18p^4 - 36p^3 + 26p^2 - 8p + 1 + (12p)_{11}\\
&\quad + (12p+2)_{11} + \cdots + (12p+i-2)_{11}
\end{aligned}$$

und für ungerade n:

$$\sum_{\alpha}(n-2\alpha)_{11} = \sum_{\mu=0}^{p-1}(72\mu^3+18\mu^2+13\mu+1)+(12p+1)_{11}+(12p+3)_{11}$$
$$+\cdots+(12p+i-2)_{11} = 18p^4-30p^3+\tfrac{31}{2}p^2-\tfrac{5}{2}p$$
$$+(12p+1)_{11}+(12p+3)_{11}+\cdots(12p+i-2)_{11}.$$

Hierdurch ist diese Summe vollkommen bestimmt; zieht man noch den Wert von $(n)_{25}$ ab, so ergeben sich folgende Formeln:

$$\begin{aligned}
(12p)_{28} &= 18p^4-52p^3+53p^2-21p+4-\left[\tfrac{12p-1}{5}\right],\\
(12p+1)_{28} &= 18p^4-46p^3+\tfrac{77}{2}p^2-\tfrac{17}{2}p-\left[\tfrac{12p}{5}\right],\\
(12p+2)_{28} &= 18p^4-40p^3+30p^2-6p-\left[\tfrac{12p+1}{5}\right],\\
(12p+3)_{28} &= 18p^4-34p^3+\tfrac{37}{2}p^2-\tfrac{1}{2}p-\left[\tfrac{12p+2}{5}\right],\\
(12p+4)_{28} &= 18p^4-28p^3+13p^2+p-\left[\tfrac{12p+3}{5}\right],\\
(12p+5)_{28} &= 18p^4-22p^3+\tfrac{9}{2}p^2+\tfrac{9}{2}p-\left[\tfrac{12p+4}{5}\right],\\
(12p+6)_{28} &= 18p^4-16p^3+2p^2+2p+1-\left[\tfrac{12p+5}{5}\right],\\
(12p+7)_{28} &= 18p^4-10p^3-\tfrac{7}{2}p^2+\tfrac{9}{2}p+1-\left[\tfrac{12p+6}{5}\right],\\
(12p+8)_{28} &= 18p^4-4p^3-3p^2+3p+1-\left[\tfrac{12p+7}{5}\right],\\
(12p+9)_{28} &= 18p^4+2p^3-\tfrac{11}{2}p^2+\tfrac{3}{2}p+1-\left[\tfrac{12p+8}{5}\right],\\
(12p+10)_{28} &= 18p^4+8p^3-2p^2+2p+1-\left[\tfrac{12p+9}{5}\right],\\
(12p+11)_{28} &= 18p^4+14p^3-\tfrac{3}{2}p^2+\tfrac{3}{2}p+2-\left[\tfrac{12p+10}{5}\right].
\end{aligned}$$

$$\underline{(n)_{29} = N(n=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta).}$$

Stellt man $n-\alpha$ auf alle möglichen Arten als Summe von fünf verschiedenen Summanden dar, so erhält man jede der gesuchten Darstellungen sechsmal, da sich jedes ihrer Elemente als α auffassen läſst; ferner kann es aber geschehen, daſs eines der Darstellungselemente von $n-\alpha$ mit α zusammenfällt; dann ergeben sich Darstellungen von n in der Form $n=\alpha+\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon$, deren Anzahl somit abgezogen werden muſs; hierdurch erhalten wir:

$$6(n)_{29} = \sum_{\alpha=1}^{n-1}(n-\alpha)_{18}-(n)_{28} = \sum_{\lambda=1}^{n-1}(\lambda)_{18}-(n)_{28}.$$

Um die rechtsstehende Summe auszuwerten, unterscheiden wir die verschiedenen Zahlformen (mod. 12); ist $n = 12p + i$, so besteht die Identität:

$$\sum_{\lambda=1}^{n-1}(\lambda)_{18} = \sum_{\mu=1}^{p-1}(12\mu)_{18} + \sum_{\mu=0}^{p-1}(12\mu+1)_{18} + \sum_{\mu=0}^{p-1}(12\mu+2)_{18} + \cdots$$
$$+ \sum_{\mu=0}^{p-1}(12\mu+11)_{18} + (12p)_{18} + (12p+1)_{18} + \cdots + (12p+i-1)_{18}$$

(wobei wieder die auf die 12 Summen folgenden Glieder nur für $i > 0$ eine Bedeutung haben). Um Brüche möglichst zu vermeiden, denken wir uns die letzte Gleichung noch mit 10 multipliziert.

Was zunächst das in den Ausdrücken für $10(\lambda)_{18}$ vorkommende, von der Teilbarkeit der Zahl λ durch 5 abhängige Glied $2\left(\left[\frac{\lambda}{5}\right] - \left[\frac{\lambda-1}{5}\right]\right)$ betrifft (welches den Wert 2 hat, sobald λ durch 5 teilbar ist, sonst den Wert 0), so liefert dies, über alle Zahlen λ summiert, zum Ausdrucke $10 . \sum_{\lambda=1}^{n-1}(\lambda)_{18}$ den Beitrag $2 . \left[\frac{n-1}{5}\right]$, da offenbar $\left[\frac{n-1}{5}\right]$ Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots, n-1$ durch 5 teilbar sind.

Unsere Identität geht somit unter Verwendung der für $10 . (n)_{18}$ gefundenen Ausdrücke in die folgende Gleichung über:

$$10 . \sum_{\lambda=1}^{n-1}(\lambda)_{18} = \sum_{\mu=0}^{p-1}(864\mu^4 - 576\mu^3 + 408\mu^2 - 104\mu + 4) - 8 + 10 . (12p)_{18}^*$$
$$+ 10(12p+1)_{18}^* + \cdots + 10(12p+i-1)_{18}^* + 2\left[\frac{n-1}{5}\right],$$

wobei durch die Marke angezeigt sei, daſs das von der Teilbarkeit durch 5 abhängige Glied in den betreffenden Ausdrücken nicht mehr zu berücksichtigen ist. Führt man die rechts angezeigte Summierung aus, indem man auſser den bereits wiederholt verwendeten Ausdrücken für $\sum_0^{p-1}\mu$, $\sum_0^{p-1}\mu^2$, $\sum_0^{p-1}\mu^3$ auch noch die Gleichung:

$$\sum_0^{p-1}\mu^4 = \tfrac{1}{5}p^5 - \tfrac{1}{2}p^4 + \tfrac{1}{3}p^3 - \tfrac{1}{30}p$$

zur Anwendung bringt, so findet man:

$$10 . \sum_{\lambda=1}^{n-1}(\lambda)_{18} = \tfrac{864}{5}p^5 - 576p^4 + 712p^3 - 400p^2 + 476p - 8 + 2\left[\frac{n-1}{5}\right]$$
$$+ 10(12p)_{18}^* + 10(12p+1)_{18}^* + \cdots + 10(12p+i-1)_{18}^*.$$

Subtrahiert man hievon noch $10(n)_{28}$, so erhält man für die einzelnen Zahlformen $12p + i$ nach etwas komplizierten aber nicht schwierigen Reduktionen folgende Endformeln:

$$
\begin{aligned}
60.(12p)_{29} &= \tfrac{864}{5}p^5 - 756p^4 + 1232p^3 - 930p^2 + \tfrac{1526}{5}p - 48 + 12\left[\tfrac{12p-1}{5}\right],\\
60.(12p+1)_{29} &= \tfrac{864}{5}p^5 - 684p^4 + 992p^3 - 630p^2 + \tfrac{626}{5}p + 12\left[\tfrac{12p}{5}\right],\\
60.(12p+2)_{29} &= \tfrac{864}{5}p^5 - 612p^4 + 776p^3 - 432p^2 + \tfrac{356}{5}p + 12\left[\tfrac{12p+1}{5}\right],\\
60.(12p+3)_{29} &= \tfrac{864}{5}p^5 - 540p^4 + 584p^3 - 240p^2 - \tfrac{4}{5}p + 12\left[\tfrac{12p+2}{5}\right],\\
60.(12p+4)_{29} &= \tfrac{864}{5}p^5 - 468p^4 + 416p^3 - 138p^2 - \tfrac{94}{5}p + 12\left[\tfrac{12p+3}{5}\right],\\
60.(12p+5)_{29} &= \tfrac{864}{5}p^5 - 396p^4 + 272p^3 - 30p^2 - \tfrac{274}{5}p + 12\left[\tfrac{12p+4}{5}\right],\\
60.(12p+6)_{29} &= \tfrac{864}{5}p^5 - 324p^4 + 152p^3 - \tfrac{124}{5}p - 12 + 12\left[\tfrac{12p+5}{5}\right],\\
60.(12p+7)_{29} &= \tfrac{864}{5}p^5 - 252p^4 + 56p^3 + 48p^2 - \tfrac{244}{5}p - 12 + 12\left[\tfrac{12p+6}{5}\right],\\
60.(12p+8)_{29} &= \tfrac{864}{5}p^5 - 180p^4 - 16p^3 + 30p^2 - \tfrac{154}{5}p - 12 + 12\left[\tfrac{12p+7}{5}\right],\\
60.(12p+9)_{29} &= \tfrac{864}{5}p^5 - 108p^4 - 64p^3 + 42p^2 - \tfrac{94}{5}p - 12 + 12\left[\tfrac{12p+8}{5}\right],\\
60.(12p+10)_{29} &= \tfrac{864}{5}p^5 - 36p^4 - 88p^3 - \tfrac{124}{5}p - 12 + 12\left[\tfrac{12p+9}{5}\right],\\
60.(12p+11)_{29} &= \tfrac{864}{5}p^5 + 36p^4 - 88p^3 - \tfrac{124}{5}p - 24 + 12\left[\tfrac{12p+10}{5}\right].
\end{aligned}
$$

Diese Formeln für $(n)_{29}$ reichen auch hin, um die Anzahl der Zerlegungen einer Zahl in sechs beliebige (verschiedene oder zum Teil gleiche) Summanden, also die Summe: $(n)_{19} + (n)_{20} + \cdots + (n)_{29}$ anzugeben, da letztere auf Grund eines bereits mehrmals erwähnten Satzes mit $(n + 1 + 2 + 3 + 4 + 5)_{29} = (n + 15)_{29}$ identisch ist.

Wollte man statt der Gruppen von Formeln, die sich auf die einzelnen Zahlformen (mod. 12) beziehen, eine einzige, für alle n giltige Formel haben, so wäre eine solche unter Verwendung des Symboles für gröſste Ganze leicht herzustellen. Hiezu genügt die Bemerkung, daſs in dem Ausdrucke:

$$a_0 + a_1\left[\frac{i}{1}\right] + a_2\left[\frac{i}{2}\right] + \cdots + a_{11}\left[\frac{i}{11}\right]$$

die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_{11}$ immer so gewählt werden können, daſs derselbe für $i = 0, 1, 2, \ldots, 11$ der Reihe nach vorgegebene Werte darstellt, speziell also auch die Koeffizienten einer bestimmten Potenz

von p in unseren Formeln; p und i sind ferner durch die Ausdrücke $\left[\frac{n}{12}\right]$ und $n - 12\left[\frac{n}{12}\right]$ zu ersetzen.

Zur Erläuterung werde die Formelgruppe für $60(n)_{29}$ durch eine einzige, alle Zahlen n umfassende Formel ersetzt; dieselbe lautet:

$$
\begin{aligned}
60.(n)_{29} = {} & \tfrac{864}{5}\left[\tfrac{n}{12}\right]^5 - \{756 - 72i\}\left[\tfrac{n}{12}\right]^4 \\
& + \Big\{1232 - 240\,i + 24\left[\tfrac{i}{2}\right] + 48\left[\tfrac{i}{3}\right] + 48\left[\tfrac{i}{4}\right] + 96\left[\tfrac{i}{5}\right] + 48\left[\tfrac{i}{6}\right] \\
& \qquad + 144\left[\tfrac{i}{7}\right] + 96\left[\tfrac{i}{8}\right] + 144\left[\tfrac{i}{9}\right] + 96\left[\tfrac{i}{10}\right] + 240\left[\tfrac{i}{11}\right]\Big\}\left[\tfrac{n}{12}\right]^3 \\
& - \Big\{930 - 300\,i + 102\left[\tfrac{i}{2}\right] + 108\left[\tfrac{i}{3}\right] + 96\left[\tfrac{i}{4}\right] + 192\left[\tfrac{i}{5}\right] + 60\left[\tfrac{i}{6}\right] \\
& \qquad + 252\left[\tfrac{i}{7}\right] + 120\left[\tfrac{i}{8}\right] + 180\left[\tfrac{i}{9}\right] + 48\left[\tfrac{i}{10}\right] + 300\left[\tfrac{i}{11}\right]\Big\}\left[\tfrac{n}{12}\right]^2 \\
& + \Big\{\tfrac{1526}{5} - 180\,i + 126\left[\tfrac{i}{2}\right] + 108\left[\tfrac{i}{3}\right] + 36\left[\tfrac{i}{4}\right] + 144\left[\tfrac{i}{5}\right] - 24\left[\tfrac{i}{6}\right] \\
& \qquad + 156\left[\tfrac{i}{7}\right] + 36\left[\tfrac{i}{8}\right] + 84\left[\tfrac{i}{9}\right] - 96\left[\tfrac{i}{10}\right] + 180\left[\tfrac{i}{11}\right]\Big\}\left[\tfrac{n}{12}\right] \\
& - 48 + 48\,i - 48\left[\tfrac{i}{2}\right] - 48\left[\tfrac{i}{3}\right] - 48\left[\tfrac{i}{5}\right] + 36\left[\tfrac{i}{6}\right] - 48\left[\tfrac{i}{7}\right] + 48\left[\tfrac{i}{10}\right] \\
& - 60\left[\tfrac{i}{11}\right] + 12\left[\tfrac{n-1}{5}\right].
\end{aligned}
$$

Darin wäre i noch durch $n - 12\left[\frac{n}{12}\right]$ zu ersetzen.

Wien, den 15. Januar 1901.

Über die „ϑ-Kurven" des einmanteligen Hyperboloides und des hyperbolischen Paraboloides.

Von WALTHER LUDWIG in Breslau.

Unter einer „ϑ-Kurve" einer Fläche II. Grades verstehe ich die Kurve der Punkte, in denen sich die beiden durch sie gehenden Geraden der Fläche unter dem Winkel ϑ schneiden, und darf dabei stets $0 \leqq \vartheta \leqq \pi/2$ voraussetzen; insbesondere nenne ich die ϑ-Kurve für $\vartheta = \pi/2$ die „Orthogonalkurve." Von den Eigenschaften dieser Kurven, die ich in der Dissertation „Über die Ebenen, welche aus einer Fläche II. Grades einem gegebenen Kegelschnitt ähnliche Kegelschnitte ausschneiden" (Breslau, 1898) abgeleitet habe, seien angeführt:

Auf einer zentrischen Fläche II. Grades sind die allgemeinen ϑ-Kurven ($\vartheta < \pi/2$) Raumkurven VIII. Ordnung, die den Geraden beider Regelscharen der Fläche je viermal begegnen; die Orthogonalkurve dagegen ist eine Raumkurve IV. Ordnung I. Art und wird in die Fläche durch die Orthogonalkugel[1]) derselben eingeschnitten.

Auf einem Paraboloid sind die allgemeinen ϑ-Kurven Raumkurven IV. Ordnung I. Art; die Orthogonalkurve ist eine Hyperbel und liegt in der Orthogonalebene[2]) des Paraboloides.

Im folgenden soll nun der Verlauf dieser Kurven in den interessantesten Fällen, nämlich auf den beiden Flächen II. Grades mit reellen Regelscharen untersucht und der Anschauung zugänglich gemacht werden. Zu diesem Zweck wurden auch die beigegebenen Figuren angefertigt; Fig. 1 zeigt ein Stück eines einmanteligen Hyperboloides auf dessen drei Symmetrieebenen und Fig. 2 ein Stück eines hyperbolischen Paraboloides auf dessen zwei Symmetrieebenen, sowie auf eine zu denselben senkrechte Ebene orthogonal projiziert. In beiden Figuren sind einige Geraden der einen Regelschar eingezeichnet und ihre Schnitt-

---

1) Vergl. H. Schröter: Theorie der Oberflächen II. Ordnung, S. 534.

2) Vergl. Th. Reye: Geometrie der Lage (3. Aufl.), II. Abtlg., Aufgaben und Lehrsätze Nr. 52.

punkte mit den ϑ-Kurven für $\vartheta = 2 \cdot \frac{\pi}{18}, \; 3 \cdot \frac{\pi}{18}, \cdots, \; 9 \cdot \frac{\pi}{18}$ ermittelt; durch Verbinden dieser Punkte sind die ϑ-Kurven 2, 3, $\cdots$, 9 erhalten worden.

1. *Das einmantelige Hyperboloid.* — Es sei H^2 ein einmanteliges Hyperboloid mit den Achsen a, b, c; die Längen der zugehörigen Achsenstrecken sollen mit denselben Buchstaben bezeichnet werden, nämlich mit $2a, \; 2b, \; 2c\sqrt{-1}$, wobei $a > b$ sei. Die zugehörigen Symmetrieebenen seien beziehentlich A, B, Γ. Wir legen nun durch c eine Ebene $\varDelta$ und lassen auf der durch sie aus H^2 ausgeschnittenen

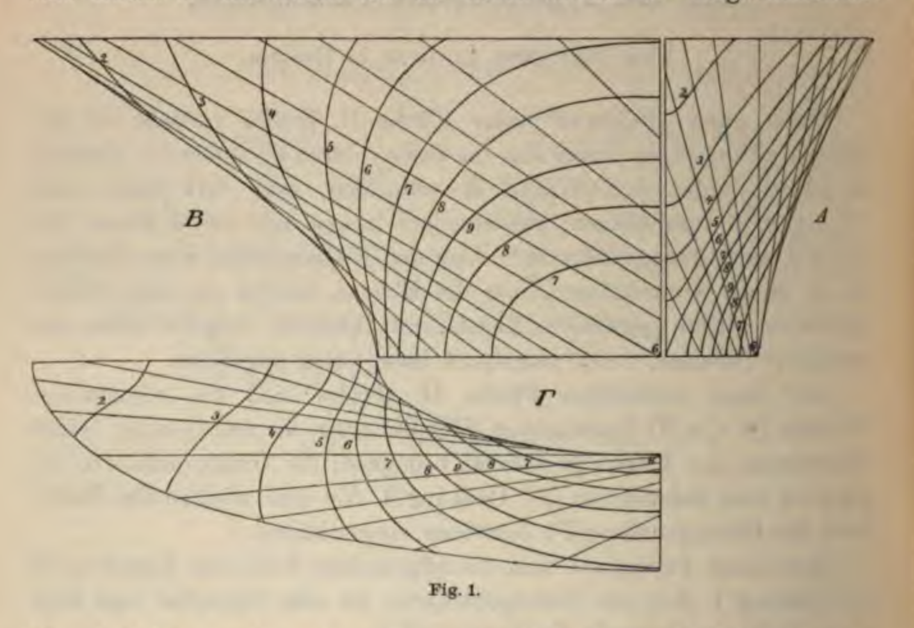


Fig. 1.

Hyperbel h^2 von dem einen ihrer unendlich fernen Punkte aus einen Punkt X laufen, bis er als X_0 auf Γ fällt. Dabei untersuchen wir die Veränderung des einen Winkels Ψ zwischen den durch X gehenden Geraden g, l der Fläche und zwar desjenigen, welcher durch $\varDelta$ geteilt wird; derselbe ist dem inneren Winkel ψ des Asymptotenkegels O^2 von H^2 gleich, welcher in der zur Ebene (gl) parallelen Durchmesserebene ε von H^2 liegt. Die letztere dreht sich, während X in der angegebenen Weise läuft, um den zu $\varDelta$ konjugierten Durchmesser d des Hyperboloides im spitzen Winkel zwischen der einen aus d an O^2 kommenden Tangentialebene und der Ebene (dc), und zwar von der ersteren zur letzteren.

Um nun die hierbei erfolgende Veränderung von ψ zu untersuchen, schneiden wir (Fig. 3) O^2 mit einer zur Γ im normalen Abstand p

parallelen Ebene μ in der Ellipse e^2, für welche die Schnittlinien $\overline{UE\mathfrak{U}}$ und $\overline{VE\mathfrak{V}}$ von μ mit $\varDelta$ und (dc) ein Paar konjugierter Durchmesser sind. Da $\overline{V\mathfrak{V}} \parallel d$, zeichnet ε in μ stets eine zu $\overline{V\mathfrak{V}}$ parallele und somit durch $\overline{U\mathfrak{U}}$ in einem Punkte M halbierte Sehne $\overline{S\mathfrak{S}} = 2s$ der e^2 ein. Es sei nun H der Fuſspunkt des aus dem Kegelscheitel O auf $\overline{S\mathfrak{S}}$ gefällten Lotes $\overline{OH} = h$ und $\mathfrak{S}$ derjenige Endpunkt von $\overline{S\mathfrak{S}}$, welcher mit H auf derselben Seite von M liegt; nehmen wir dann die auf $\overline{S\mathfrak{S}}$ befindlichen Strecken immer in

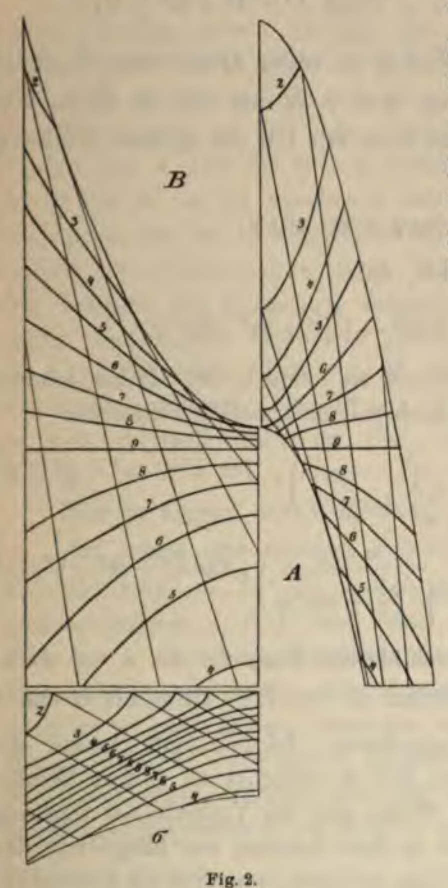


Fig. 2.

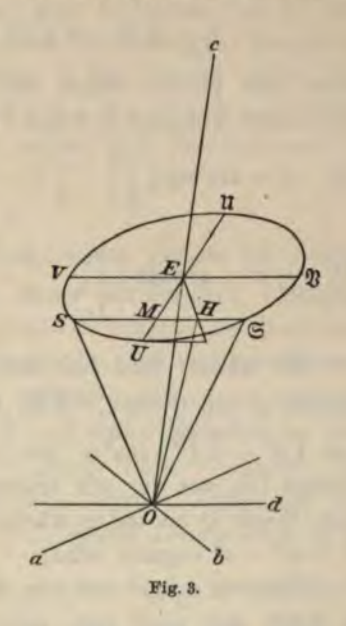


Fig. 3.

der Richtung von S nach $\mathfrak{S}$ und die im Scheitel O über ihnen stehenden Winkel im entsprechenden Drehsinn als positiv, so erhalten wir

$$\psi = \sphericalangle S O \mathfrak{S} = \sphericalangle S O H + \sphericalangle H O \mathfrak{S} = \operatorname{arc\,ctg} \frac{\overline{OH}}{\overline{SH}} + \operatorname{arc\,ctg} \frac{\overline{OH}}{\overline{H\mathfrak{S}}}$$

oder, wenn $\overline{MH} = m$ und somit $\overline{SH} = s + m$ und $\overline{H\mathfrak{S}} = s - m$ gesetzt wird,

$$\psi = \operatorname{arc\,ctg} \frac{h}{s+m} + \operatorname{arc\,ctg} \frac{h}{s-m} \cdot$$

Weil $0 < \sphericalangle SOH < \frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2} < \sphericalangle HO\mathfrak{S} < \frac{\pi}{2}$ ist, haben wir hiernach

$$(1) \qquad \psi = \operatorname{arc\,ctg} \frac{h^2 - s^2 + m^2}{2hs}, \quad \text{wenn } h^2 - s^2 + m^2 \geqq 0,$$

$$(2) \qquad \psi = \pi - \operatorname{arc\,ctg} \frac{s^2 - h^2 - m^2}{2hs}, \quad \text{wenn } h^2 - s^2 + m^2 \leqq 0,$$

wobei immer der arc ctg einen Winkel im ersten Quadranten darstellt.

Nun liegt bei jeder Stellung von ε H auf der in E zu $\overline{E\mathfrak{B}}$ normalen Geraden, und es ist, wenn diese mit $\overline{U\mathfrak{U}}$ den spitzen Winkel φ einschliefst, $\sphericalangle MEH = \varphi$ und

$$\overline{EH} = \overline{MH} \cdot \operatorname{ctg} \varphi = m \cdot \operatorname{ctg} \varphi;$$

ferner folgt aus dem Dreieck OEH, dafs

$$h = \overline{OH} = \sqrt{\overline{OE}^2 + \overline{EH}^2} = \sqrt{p^2 + m^2 \cdot \operatorname{ctg}^2 \varphi},$$

wobei der positive Wert der Wurzel zu nehmen ist. Daher können wir unsere Formeln (1) und (2) auch folgendermafsen schreiben:

$$(3) \quad \psi = \operatorname{arc\,ctg} \tfrac{1}{2} \left(\frac{h}{s} - \frac{s}{h} + \frac{m}{s \cdot \sqrt{\frac{p^2}{m^2} + \operatorname{ctg}^2 \varphi}} \right), \quad \text{für } h^2 + m^2 - s^2 \geqq 0;$$

$$(4) \quad \psi = \pi - \operatorname{arc\,ctg} \tfrac{1}{2} \left(\frac{s}{h} - \frac{h}{s} - \frac{m}{s \cdot \sqrt{\frac{p^2}{m^2} + \operatorname{ctg}^2 \varphi}} \right), \quad \text{für } h^2 + m^2 - s^2 \leqq 0.$$

Es wächst nun bei der geschilderten Drehung der ε um d die Strecke s von 0 bis $\frac{1}{2} \cdot \overline{V\mathfrak{B}}$, während m von $\overline{EU} \cdot \sin \varphi$ bis 0 und h von $\sqrt{p^2 + \overline{EU}^2 \cdot \cos^2 \varphi}$ bis p abnehmen; folglich gilt zuerst die Formel (3), aus der wir erkennen, dafs ψ zunächst als spitzer Winkel vom Werte 0 an stetig wächst. Wenn aber im Verlaufe der Drehung $h^2 + m^2 - s^2$ negativ wird, — ob es dazu kommt, das hängt von den Verhältnissen des O^2 und von der Lage der d ab — so tritt die Formel (4) in Kraft und zeigt uns, dafs dann ψ auch als stumpfer Winkel sich fortwährend vergröfsert.

Demnach wächst der dem ψ gleiche Winkel Ψ bei der angegebenen Bewegung von X unter allen Umständen vom Werte 0 an stetig bis zu einem zwischen 0 und π gelegenen Werte Ψ_0, den er in X_0 erreicht. Umgekehrt entspricht jedem Wert von Ψ zwischen 0 und Ψ_0 ein Punkt X des betrachteten Quadranten der h^2; drehen wir daher Δ um c von B bis A, so beschreibt der zu einem bestimmten Wert von Ψ gehörige X ein Kurvenstück, das keine aus c kommende Ebene mehr als einmal trifft. Gleichzeitig bewegt sich aber X_0 auf

der Kehlellipse von H^2, und dabei nimmt Ψ_0 stetig zu vom Werte $\beta = 2 \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{c}$ bis zum Werte $\alpha = 2 \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{c}$; denn wenn x die Länge des zu $\overline{OX_0}$ konjugierten Halbmessers der Kehlellipse ist, so haben wir $\Psi_0 = 2 \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{c}$, und x wächst bei jener Bewegung stetig von b bis a. Infolge dessen verläuft das zu Ψ gehörige Kurvenstück von einem Punkte auf B nach einem Punkte auf A, wenn $0 \leqq \Psi < \beta$, und von einem Punkte auf Γ nach einem Punkte auf A, wenn $\beta < \Psi < \alpha$; für $\Psi = \beta$ geht es von dem einen Scheitel der Achse a nach einem Punkte von A, und für $\Psi = \alpha$ besteht es allein aus dem einen Scheitel der Achse b. α ist überhaupt der gröfste Wert, den Ψ in einem reellen Punkte von H^2 erreichen kann, und einem noch gröfseren entspricht kein reelles Kurvenstück. Diese Kurvenstücke wiederholen sich, den Gesetzen der Symmetrie folgend, in allen Oktanten von H^2 und setzen sich zu im Endlichen geschlossenen Kurvenzügen zusammen, deren es für jeden Wert von Ψ zwischen 0 und α zwei giebt. Die Kurvenzüge wiederum für $\Psi = \chi\,(\leqq \pi/2)$ und für $\Psi = \pi - \chi$ bilden, so weit sie reell vorhanden sind, den reellen Teil der ϑ-Kurve für $\vartheta = \chi$.

Hieraus ergiebt sich Folgendes:

Auf einem einmanteligen Hyperboloide, dessen Achsen die Längen $2a$, $2b$, $2c\sqrt{-1}$ $(a > b)$ *haben und dessen beziehentlich zugehörige Symmetrieebenen* A, B, Γ *sind, setzen sich die* ϑ*-Kurven, soweit sie reell sind, aus je in sich symmetrischen Paaren von im Endlichen geschlossenen Kurvenzügen zusammen; diese Zugpaare schneiden alle die* A *reell und zerfallen in zwei Reihen, jenachdem sie* B *reell und* Γ *imaginär — erste Reihe — oder* Γ *reell und* B *imaginär — zweite Reihe — treffen. Die* ϑ*-Kurven selbst verhalten sich auf den verschiedenen Typen der einmanteligen Hyperboloide verschieden, wie die folgende Tabelle zeigt, in der*

$$\alpha = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{c}, \quad \alpha' = \pi - \alpha = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{c}{a};$$

$$\beta = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{c}, \quad \beta' = \pi - \beta = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{c}{b}$$

ist:

	Aus einem Zugpaar der ersten Reihe bestehen die ϑ-Kurven, für die	Aus einem Zugpaar der zweiten Reihe bestehen die ϑ-Kurven, für die	Aus zwei Zugpaaren: einem der ersten und einem der zweiten Reihe bestehen die ϑ-Kurven, für die	Aus zwei Zugpaaren der ersten Reihe	Aus zwei Zugpaaren der zweiten Reihe	Ganz imaginär sind die ϑ-Kurven, für welche	Di[e] Ort[h]... gon... kur...
$c > a > b$	$0 \leqq \vartheta < \beta$	$\beta < \vartheta \leqq \alpha$	—	—	—	$\alpha < \vartheta < \frac{\pi}{2}$	ist imagi...
$c = a > b$	$0 \leqq \vartheta < \beta$	$\beta < \vartheta < \frac{\pi}{2}$	—	—	—	—	Achse b zwei reelle Punkte
$a > c > b$: $c^2 > ab$	$0 \leqq \vartheta < \beta$	$\beta < \vartheta < \alpha'$	—	—	$\alpha' \leqq \vartheta < \frac{\pi}{2}$	—	best... au... ein Zug... d... zwe... Re...
$a > c > b$: $c^2 = ab$	$0 \leqq \vartheta < \beta = \alpha'$	—	—	—	$\beta = \alpha' \leqq \vartheta < \frac{\pi}{2}$	—	
$a > c > b$: $c^2 < ab$	$0 \leqq \vartheta < \alpha'$	—	$\alpha' \leqq \vartheta < \beta$	—	$\beta < \vartheta < \frac{\pi}{2}$	—	
$a > b = c$	$0 \leqq \vartheta < \alpha'$	—	$\alpha' \leqq \vartheta < \frac{\pi}{2}$	—	—	—	die Scheitel der Achse a gehen [1])
$a > b > c$	$0 \leqq \vartheta < \alpha'$	—	$\alpha' \leqq \vartheta < \beta'$	$\beta' < \vartheta < \frac{\pi}{2}$	—	—	paar der ersten Reihe

In allen diesen Fällen hat die ϑ-Kurve für $\vartheta = \alpha$, resp. $= \pi - \alpha$ in den Scheiteln der Achse b zwei isolierte Doppelpunkte und diejenige für $\vartheta = \beta$, resp. $= \pi - \beta$ in den Scheiteln der Achse a zwei gewöhnliche Doppelpunkte.

Bei dem in Figur 1 dargestellten einmanteligen Hyperboloide ist $c^2 = ab$.

2. *Das hyperbolische Paraboloid.* — Es seien S der endliche Scheitel und σ die zugehörige Scheiteltangentialebene eines hyper-

1) Siehe Dissertation, Nr. 17.

bolischen Paraboloides Π^2, g_0 und l_0 die mit S und σ incidenten Geraden desselben und γ und λ die längs dieser auf σ senkrechten Ebenen; dann teilt σ das Paraboloid Π^2 in zwei Teile, von denen der eine, der „spitze Teil", in dem spitzen Scheitelwinkelpaar zwischen γ und λ, in $\sphericalangle \gamma\lambda$, und der andere, der „stumpfe Teil", in dem stumpfen Scheitelwinkelpaar zwischen γ und λ, in $\sphericalangle \gamma \cdot \lambda$, liegt. Von den beiden Symmetrieebenen von Π^2 ferner halbiere A den $\sphericalangle \gamma \cdot \lambda$ und B den $\sphericalangle \gamma\lambda$.

Wir betrachten nun einen der durch A und B aus Π^2 herausgeschnittenen Quadranten; befindet sich auf ihm etwa ein Halbstrahl von g_0, so legen wir durch einen Punkt X_0 desselben die Parallelebene Δ_1 zur B und lassen auf dem Parabelast, den sie mit dem spitzen Teil unseres Quadranten gemeinsam hat, den Punkt X vom Unendlichen her bis X_0 laufen. Die Winkel zwischen den Geraden g, l des Paraboloides, welche sich in X begegnen, sind gleich denjenigen, welche die etwa durch S zur Ebene (gl) parallel gelegte Ebene ε aus γ, λ ausschneidet, und derjenige von ihnen sei mit Ψ bezeichnet, dessen gleicher in $\sphericalangle \gamma\lambda$ liegt. Bei der Bewegung des X dreht sich ε um einen Strahl d_1 des Büschels (S, A) von A bis $(d_1 g_0) \equiv \varepsilon_0$ und zwar, da X den Scheitel der Parabel nicht erreicht, in dem spitzen Winkel dieser beiden Ebenen; der von ihr aus $\sphericalangle \gamma\lambda$ ausgeschnittene Winkel wächst dabei nach der Formel (3), die mit unwesentlichen Änderungen — $\mu \,||\, A$, $s = \text{const.}$, $\overline{EU} = \infty$ — auch hier gilt, stetig von 0 bis zu dem Winkel, den $\sphericalangle \gamma\lambda$ in ε_0 einzeichnet und der, weil $g_0 \perp \overline{\gamma\lambda}$, stets spitz ist. Mithin durchläuft Ψ bei der angegebenen Bewegung von X alle Werte von 0 bis zu einem spitzen Winkel Ψ_0, den er in X_0 erreicht. Analog hierzu nimmt der Nebenwinkel von Ψ ab von $\pi - \Psi_0$ bis 0, wenn wir X auf dem Parabelast, welchen die durch X_0 zu A parallel gelegte Ebene Δ_2 mit dem stumpfen Teil unseres Quadranten gemein hat, von X_0 aus bis ins Unendliche gehen lassen; dabei wächst Ψ selbst von Ψ_0 über $\pi/2$ bis π.

Sonach erhalten wir auf Π^2 einen unendlich langen Kurvenzug, dessen Punkte X den Werten von Ψ zwischen 0 und π eindeutig zugeordnet sind; er überstreicht, wenn wir X_0 unter Mitnahme von Δ_1 und Δ_2 auf g_0 von S aus bis ins Unendliche bewegen, den betrachteten Quadranten, und dabei beschreibt der zu einem Wert von Ψ gehörige X ein Kurvenstück, welches von einem Punkte einer der beiden Hauptparabeln des Π^2 bis ins Unendliche verläuft. Gleichzeitig dreht sich die zu X_0 gehörige ε_0 um g_0 von der σ bis zur γ, so dafs Ψ_0 vom spitzen Winkel ω zwischen g_0 und l_0 bis $\pi/2$ wächst; mithin überschreiten die Kurvenstücke, für welche $\omega < \Psi < \pi/2$, die g_0, während von

den übrigen diejenigen für $0 < \Psi \leqq \omega$ ganz auf dem spitzen und diejenigen für $\pi/2 \leqq \Psi < \pi$ ganz auf dem stumpfen Teil des Quadranten verbleiben. Hieraus folgt:

Auf dem hyperbolischen Paraboloid besteht jede allgemeine ϑ-Kurve aus vier sich beiderseits ins Unendliche erstreckenden Ästen; dieselben zerfallen in zwei Paare, die je in sich bezüglich der Symmetrieebenen der Fläche symmetrisch sind und die zu verschiedenen Seiten der (zur Scheiteltangentialebene parallelen) Orthogonalebene liegen. Das eine Paar — und ebenso die Orthogonalhyperbel — befindet sich stets vollständig auf dem stumpfen Teil des Paraboloides. Die Äste des anderen Paares aber verbleiben, wenn ω der spitze Winkel der beiden Scheitelgeraden ist, nur für

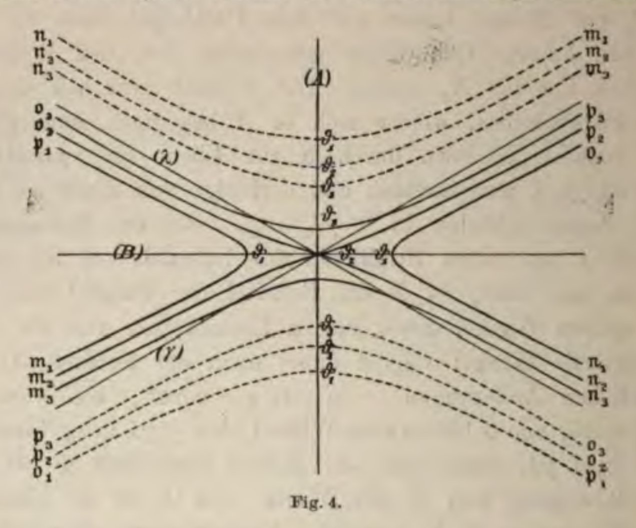


Fig. 4.

$0 < \vartheta \leqq \omega$ völlig auf dem spitzen Teil und greifen, wenn $\vartheta > \omega$, auch noch je mit einem endlichen Stück auf den stumpfen Teil über. Die ϑ-Kurve für $\vartheta = \omega$ hat im endlichen Scheitel des Paraboloides einen Doppelpunkt.

Bei dem in Fig. 2 dargestellten Paraboloid ist $\omega = \pi/3$.

Es erübrigt noch eine Bemerkung darüber, wie die vier Äste einer ϑ-Kurve sich im Unendlichen zusammenschliefsen: Jede allgemeine ϑ-Kurve von Π^2 hat vier unendlich ferne Punkte, die gegeben sind durch die Schnittgeraden von γ, λ mit einem Rotationskegel, der $\gamma\lambda$ zur Achse und ϑ zum halben Öffnungswinkel hat (Dissertation, Nr. 22). Mithin haben immer je zwei auf verschiedenen Seiten der Orthogonalebene gelegene Äste einer ϑ-Kurve einen ihrer unendlich fernen Punkte gemein, wie es in Fig. 4 durch die übereinstimmenden Zeichen $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{n}_1$ etc. angedeutet ist, welche an die nach demselben unendlich fernen Punkte

igenden Enden der Kurvenäste gesetzt sind. Es sind in dieser Figur
ei ϑ-Kurven — für $\vartheta = \vartheta_1 < \omega$, für $\vartheta = \vartheta_2 = \omega$, für $\vartheta = \vartheta_3 > \omega$ —
ıf die Orthogonalebene projiziert und die Äste, die auf der einen
ite der letzteren liegen, voll ausgezogen, die auf der anderen Seite
findlichen aber nur gestrichelt; die Projektionen von A, B, γ, λ sind
it (A), (B), (γ), (λ) bezeichnet. Durchlaufen wir die drei Kurven in
r Reihenfolge mnop, so erkennen wir:

*Eine ϑ-Kurve eines hyperbolischen Paraboloides bildet einen einzigen,
ermal das Unendliche durchschreitenden Zug, wenn $\vartheta \leqq \omega$, und zerfällt
zwei, je zweimal durch das Unendliche gehende Züge, wenn $\vartheta > \omega$ ist.*

Breslau, den 15. Januar 1901.

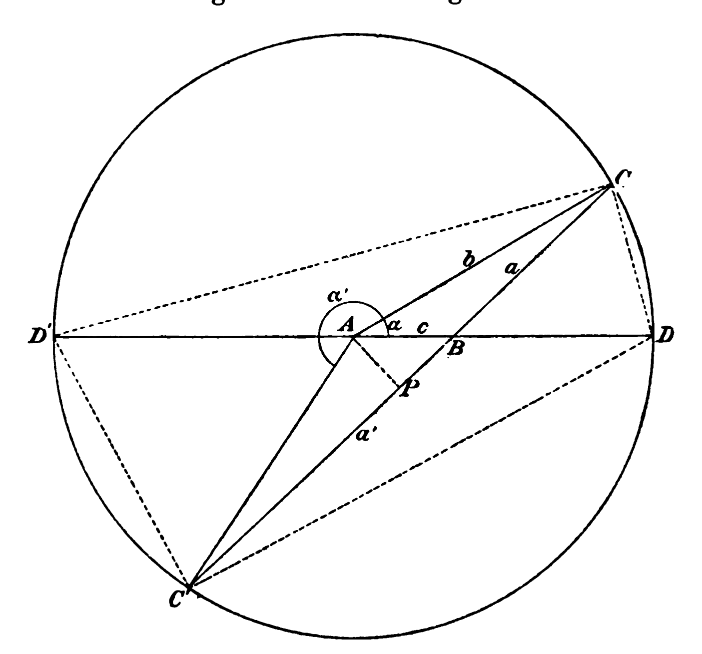
Das Additionstheorem der elliptischen Funktionen in geometrischer Form.

Von P. KOKOTT in Sagan.

Die bisherigen Beweise des Additionstheorems gehen von der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2 \cdot 1-k^2x^2}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{1-y^2 \cdot 1-k^2y^2}}$$

aus und suchen durch analytische oder geometrische Betrachtungen ein Integral dieser Gleichung aufzufinden. Die geometrischen Erörterungen



beziehen sich auf die Jacobische Untersuchung über die Linie gleicher Tangenten mehrerer Kreise, oder sie fufsen auf der immerhin unsymmetrischen und der unmittelbaren Anschauung weniger zugänglichen sphärischen Trigonometrie. Die vorliegende Untersuchung soll nach einer

kurzen Einleitung, welche die Punkte der Peripherie eines Kreises durch das Argument innerhalb des Intervalles K und $K + 2iK'$ darstellt, mit den einfachsten Mitteln der ebenen Trigonometrie ohne Differentialgleichung eine endliche Beziehung zwischen u und v, den Umkehrungsfunktionen obiger integrierten Differentiale, aufstellen, die Erleichterungen, welche dadurch entstehen, an den Jacobischen Additionsformeln vor Augen führen und zum Schlufs den speziellen Fall der Verdoppelung des Argumentes eingehender behandeln.

1. *Vorbemerkungen.* — In einem Kreise mit dem Mittelpunkte A und dem Radius b sei ein fester Radius AD gezeichnet und ein Stück $AB = c$ abgetragen. Durch B sei eine beliebige Sehne gezogen, deren Abschnitte mit a und a' bezeichnet werden sollen. Der zum Sehnenabschnitte a gehörige Centriwinkel CAB heifse α, der zu a' gehörige überstumpfe Winkel $C'AB$ sei α'. Die Dreieckswinkel ABC und ACB sollen β und γ genannt werden. Dieselben lassen sich wie alle sonst an der Figur vorkommenden Winkel durch α und α' ausdrücken. Es ist $\sphericalangle\, CAC' = 4R - \alpha' + \alpha$, also

$$\gamma = R - \frac{4R - \alpha' + \alpha}{2} = \frac{\alpha'}{2} - \frac{\alpha}{2} - R = \frac{\alpha'}{2} - \frac{\alpha}{2} - R, \tag{1}$$

$$\beta = 2R - \alpha - \gamma = 3R - \frac{\alpha + \alpha'}{2} = 3R - \frac{\alpha + \alpha'}{2}, \tag{2}$$

$$\sphericalangle\, ACD = R - \frac{\alpha}{2} = \sphericalangle\, ADC, \tag{3}$$

$$\sphericalangle\, AC'D = R - \frac{4R - \alpha'}{2} = \frac{\alpha'}{2} - R = \sphericalangle\, ADC', \tag{4}$$

$$\sphericalangle\, C'CD = \tfrac{1}{2} C'AD = \frac{4R - \alpha'}{2} = 2R - \frac{\alpha'}{2}, \tag{5}$$

$$\sphericalangle\, CAD' = 2R - \alpha, \tag{6}$$

$$\sphericalangle\, CD'A = \frac{\alpha}{2}, \tag{7}$$

$$\sphericalangle\, D'AC' = 2R - (4R - \alpha') = \alpha' - 2R, \tag{8}$$

$$\sphericalangle\, D'CC' = \tfrac{1}{2} D'AC' = \frac{\alpha'}{2} - R, \tag{9}$$

$$\sphericalangle\, CBD = \alpha + \gamma = \frac{\alpha'}{2} + \frac{\alpha}{2} - R, \tag{10}$$

$$\sphericalangle\, PAB = R - ABP = 2R - \frac{\alpha + \alpha'}{2}, \tag{11}$$

$$\sphericalangle\, C'AB = 4R - \alpha' = \beta - \gamma. \tag{12}$$

2. *Darstellung der Dreiecksgröfsen durch elliptische Funktionen.* — Betrachten wir das Dreieck ABC, so ist der Flächeninhalt desselben

$F = \sqrt{\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-c}{2}\right)^2}$. Setzt man für einen Augenblick $\frac{a}{b-c} = y$, so ist

$$F = i\frac{b^2 - c^2}{4}\sqrt{1 - y^2 \cdot 1 - k^2 y^2}, \quad k = \frac{b-c}{b+c}.$$

Denkt man sich C auf der Peripherie des Kreises verschoben, so ist a veränderlich, während b und c konstant bleiben. Wir setzen jetzt

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2 \cdot 1 - k^2 y^2}} = u,$$

dann ist

(13) $\quad y = \operatorname{sn}(u, k)$ oder $a = (b-c)\operatorname{sn} u$, d. h. $\operatorname{sn} u = \frac{a}{b-c}$,

(14) $\quad F = i\frac{b^2 - c^2}{4}\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$ oder $\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u = -\frac{4iF}{b^2 - c^2}$.

Der kleinste Wert von a ist $b - c$, der größte $b + c$; demgemäß schwankt die Variable u zwischen K und $K + iK'$. Nach dem umgewandelten Kosinussatze ist $\sin\frac{\alpha}{2} = i\frac{b-c}{2\sqrt{bc}}\sqrt{1 - \frac{a^2}{(b-c)^2}}$. Da ferner $k^2 = \left(\frac{b-c}{b+c}\right)^2$, $\quad k'^2 = 1 - k^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2}$, $\quad k' = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}$, $\quad \frac{k}{k'} = \frac{b-c}{2\sqrt{bc}}$ und $\sqrt{1 - \frac{a^2}{(b-c)^2}} = \operatorname{cn} u$ ist, so folgt

(15) $$\operatorname{cn} u = -i\frac{k'}{k}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Ebenso ist $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{b+c}{2\sqrt{bc}}\sqrt{1 - k^2\frac{a^2}{(b-c)^2}}$, also

(16) $\quad \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{k'}\operatorname{dn} u = \frac{1}{\operatorname{dn}(u+K)}$ oder $\operatorname{dn} u = k'\cos\frac{\alpha}{2}$ und $\operatorname{dn}(u+K) = \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}$,

(17) $$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = ik\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} \quad \text{oder} \quad \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} = -\frac{i}{k}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Wegen $\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} = \operatorname{sn}(K + u)$ kann man schreiben

(18) $\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = ik\operatorname{sn}(u+K)$ oder $\operatorname{sn}(u+K) = -\frac{i}{k}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Weiter ist $h_a = \frac{2F}{a}$, folglich

(19) $$h_a = \frac{i\frac{b^2-c^2}{2}\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{(b-c)\operatorname{sn} u} \quad \text{oder} \quad \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} = -\frac{2ih_a}{b+c},$$

(20) $$\sin\beta = \frac{2F}{ac} = i\frac{b+c}{2c}\frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} = \frac{i}{1-k}\frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u},$$

(21) $$\sin\gamma = \frac{2F}{ba} = \frac{i}{1+k}\frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}.$$

Für die vorliegende Untersuchung ist es von Wichtigkeit, zu beobachten, in welcher Weise sich die einzelnen Gröſsen ändern, wenn der Punkt C durch eine kontinuierliche Bewegung über D' in die Lage von C' kommt. Wir wollen C' den Gegenpunkt von C nennen, BC' den Gegenstrahl. Es ist $aa' = b^2 - c^2$, also $a' = \frac{b^2-c^2}{a} = \frac{b-c}{k\,\mathrm{sn}\,u}$; da aber $\mathrm{sn}(u + iK') = \frac{1}{k\,\mathrm{sn}\,u}$ ist, so erkennt man, daſs bei einem Übergange von C zu C' das Argument um iK' zunimmt. Berücksichtigt man, daſs $\mathrm{cn}(u + iK') = \frac{\mathrm{dn}\,u}{ik\,\mathrm{sn}\,u}$ und $\mathrm{dn}(u + iK') = \frac{\mathrm{cn}\,u}{i\,\mathrm{sn}\,u}$ ist, so entstehen folgende Gleichungen:

$$a' = \frac{b-c}{k\,\mathrm{sn}\,u} = (b-c)\,\mathrm{sn}(u + iK'), \tag{22}$$

$$F' = -i\frac{b^2-c^2}{4}\frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{k\,\mathrm{sn}^2 u} = -\frac{F}{k\,\mathrm{sn}^2 u}. \tag{23}$$

$\sin\frac{\alpha}{2}$ geht über in $\sin\frac{\alpha'}{2} = +\frac{1}{k'}\frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}$ und wegen $\frac{k'\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u} = -\mathrm{cn}(u+K)$ ergiebt sich

$$-\frac{1}{\sin\frac{\alpha'}{2}} = \mathrm{cn}(u+K) \quad \text{oder} \quad \sin\frac{\alpha'}{2} = \frac{\mathrm{dn}\,u}{k'\mathrm{sn}\,u}. \tag{24}$$

$\cos\frac{\alpha}{2}$ wird $\cos\frac{\alpha'}{2} = -\frac{i}{k'\mathrm{tn}\,u}$; wegen $\frac{1}{k'\mathrm{tn}\,u} = -\mathrm{tn}(u+K)$ ist

$$\cos\frac{\alpha'}{2} = i\,\mathrm{tn}(u+K) \quad \text{oder} \quad \cos\frac{\alpha'}{2} = -\frac{i\,\mathrm{cn}\,u}{k'\mathrm{sn}\,u}. \tag{25}$$

h_a wird $h'_a = -i\frac{b+c}{2}\frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,u} = -h_a$, also

$$h'_a = -h_a. \tag{26}$$

Beachtet man, daſs $\frac{b-c}{b+c} = \frac{\mathrm{tg}\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}{\mathrm{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}}$, und berücksichtigt (12), so erhält man

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{\alpha'}{2} = -k, \tag{27}$$

was auch dadurch entsteht, daſs man in $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = -ik\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}$ das Argument um iK' vermehrt; es wird nämlich

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha'}{2} = ik\frac{\frac{\mathrm{dn}\,u}{ik\,\mathrm{sn}\,u}}{\frac{\mathrm{cn}\,u}{i\,\mathrm{sn}\,u}} = i\frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}\,u} = \frac{i}{\mathrm{sn}(u+K)}. \tag{28}$$

Hierdurch sind alle für das Folgende wichtigen Gröfsen durch elliptische Funktionen dargestellt. Das Argument u besteht aus einem reellen Teile K, welcher konstant bleibt, und einem variablen imaginären Teile ix, welcher bei einem vollständigen Umlauf von 0 bis $2iK'$ wächst.

3. *Die geometrische Bedeutung des Additionstheorems der einfachen elliptischen Funktionen am Kreise.* — Wir nehmen an, auf der Peripherie des Kreises seien zwei Punkte durch die Argumente $K + ix$ und $K + iy$ bestimmt; der Strahl von B aus nach $K + ix$ heifse m, der Gegenstrahl m', die oben definierten Centriwinkel μ und μ'; ähnlich sollen die Gröfsen, welche zum Punkte $K + iy$ gehören, mit n, n' und ν, ν' bezeichnet werden. Es entsteht nunmehr die Frage, wo der Punkt $K + ix + iy$ liegt. Es soll bewiesen werden, dafs der Centriwinkel M, den der bewegliche Radius nach dem gesuchten Punkte $K + ix + iy$ mit dem festen Radius bildet, gefunden werden kann. Es ist nämlich:

$$\operatorname{sn}(2K + ix + iy) = \frac{\operatorname{sn}(K+ix)\operatorname{cn}(K+iy)\operatorname{dn}(K+iy) + \operatorname{sn}(K+iy)\operatorname{cn}(K+ix)\operatorname{dn}(K+ix)}{1 - k^2\operatorname{sn}^2(K+ix)\operatorname{sn}^2(K+iy)}.$$

Andererseits ist

$$\operatorname{sn}(2K+ix+iy) = \frac{\operatorname{cn}(K+ix+iy)}{\operatorname{dn}(K+ix+iy)}.$$

Setzt man für $\operatorname{sn}(K+ix)$ den Wert $\frac{m}{b-c}$, ebenso für $\operatorname{sn}(K+iy)$ $\frac{n}{b-c}$ und berücksichtigt (14) und (17), so ergiebt sich:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{M}{2}}{ik} = \frac{\frac{m}{b-c}\cdot\frac{4F_n}{i(b^2-c^2)} + \frac{n}{b-c}\cdot\frac{4F_m}{i(b^2-c^2)}}{1 - \frac{k^2\cdot m^2n^2}{(b-c)^4}}.$$

Erweitert man den Bruch rechter Hand mit $(b-c)^2$ und setzt für k seinen Wert, so wird

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{M}{2}}{i(b-c)} = \frac{1}{i}\,\frac{4mF_n + 4nF_m}{(b^2-c^2)^2 - m^2n^2}.$$

Nun ist $mh_m = 2F_m$ und $nh_n = 2F_n$, ferner $b^2 - c^2 = mm'$ und $b^2 - c^2 = nn'$, also $(b^2-c^2)^2 = mn \cdot m'n'$; es entsteht somit die Gleichung

$$\operatorname{tg}\frac{M}{2} = \frac{2(b-c)(h_m + h_n)}{m'n' - mn}. \tag{29}$$

Dadurch kann M gefunden werden, weil alle Gröfsen auf der rechten Seite durch m und n gegeben sind. Gleichung (29) drückt genau dasselbe aus wie $\operatorname{sn}(u+v)$, ist also eine trigonometrische Form des Additionstheorems der Sinusamplitude.

In ähnlicher Weise wollen wir jetzt den äquivalenten Ausdruck des Additionstheorems für die übrigen Funktionen aufsuchen.

Es ist

$$\operatorname{dn}(K + ix + K + iy) =$$

$$= \frac{\operatorname{dn}(K+ix)\operatorname{dn}(K+iy) - k^2 \operatorname{sn}(K+ix)\operatorname{sn}(K+iy)\operatorname{cn}(K+ix)\operatorname{cn}(K+iy)}{1 - k^2\operatorname{sn}^2(K+ix)\operatorname{sn}^2(K+iy)}.$$

Hier dividiere man Zähler und Nenner der rechten Seite durch $k^2 \operatorname{sn}(K+ix)\operatorname{sn}(K+iy)$. Nach (24) ist

$$\frac{\operatorname{dn}(K+ix)}{\operatorname{sn}(K+ix)} = k' \sin\frac{\mu'}{2}, \text{ ebenso } \frac{\operatorname{dn}(K+iy)}{\operatorname{sn}(K+iy)} = k' \sin\frac{\nu'}{2},$$

ferner nach (15)

$$\operatorname{cn}(K+ix) = -i\frac{k'}{k}\sin\frac{\mu}{2} \quad \text{und} \quad \operatorname{cn}(K+iy) = -i\frac{k'}{k}\sin\frac{\nu}{2};$$

deshalb wird der Zähler der rechten Seite $\frac{k'^2}{k^2}\left(\sin\frac{\mu}{2}\sin\frac{\nu}{2} + \sin\frac{\mu'}{2}\sin\frac{\nu'}{2}\right)$. Im Nenner ist nach (22)

$$\frac{1}{k^2\operatorname{sn}(K+ix)\operatorname{sn}(K+iy)} = \frac{m'n'}{(b-c)^2}$$

und nach (13) $\operatorname{sn}(K+ix)\operatorname{sn}(K+iy) = \frac{mn}{(b-c)^2}$; also geht die Gleichung über in

$$\operatorname{dn}(2K + ix + iy) = \frac{\frac{k'^2}{k^2}(b-c)^2\left(\sin\frac{\mu}{2}\sin\frac{\nu}{2} + \sin\frac{\mu'}{2}\sin\frac{\nu'}{2}\right)}{m'n' - mn}.$$

Da endlich $\operatorname{dn}(2K + ix + iy) = \frac{k'}{\operatorname{dn}(K+ix+iy)}$ und $\frac{k'^2}{k^2}(b-c)^2 = 4bc$ ist, so entsteht unter Berücksichtigung von (16)

$$\cos\frac{M}{2} = \frac{m'n' - mn}{4bc\left(\sin\frac{\mu}{2}\sin\frac{\nu}{2} + \sin\frac{\mu'}{2}\sin\frac{\nu'}{2}\right)} \tag{30}$$

als gleichwertig mit dem analytischen Ausdruck für $\operatorname{dn}(u+v)$.

Weiter ist

$$\operatorname{cn}(2K + ix + iy) =$$

$$= \frac{\operatorname{cn}(K+ix)\operatorname{cn}(K+iy) - \operatorname{sn}(K+ix)\operatorname{sn}(K+iy)\operatorname{dn}(K+ix)\operatorname{dn}(K+iy)}{1 - k^2\operatorname{sn}^2(K+ix)\operatorname{sn}^2(K+iy)}.$$

Eine der obigen analoge Transformation führt zu der Formel

$$\sin\frac{M'}{2} = \frac{m'n' - mn}{4bc\left(\cos\frac{\mu}{2}\cos\frac{\nu}{2} + \cos\frac{\mu'}{2}\cos\frac{\nu'}{2}\right)}, \tag{31}$$

welche gleichwertig mit $\operatorname{cn}(u+v)$ ist.

Um endlich den trigonometrischen Ausdruck für $\operatorname{tn}(u+v)$ zu finden, bemerke man, daſs

$$\operatorname{tn}(K+ix+K+iy) = \frac{\operatorname{tn}(K+ix)\operatorname{dn}(K+iy)+\operatorname{tn}(K+iy)\operatorname{dn}(K+ix)}{1-\operatorname{tn}(K+ix)\operatorname{tn}(K+iy)\operatorname{dn}(K+ix)\operatorname{dn}(K+iy)}$$

ist. Hier dividiert man Zähler und Nenner durch $\operatorname{tn}(K+ix)\operatorname{tn}(K+iy)$ und berücksichtigt, daſs wegen (19)

$$\frac{\operatorname{dn}(K+ix)}{\operatorname{tn}(K+ix)} = \frac{\operatorname{cn}(K+ix)\operatorname{dn}(K+ix)}{\operatorname{sn}(K+ix)} = -\frac{2ih_m}{b-c},$$

$$\frac{\operatorname{dn}(K+iy)}{\operatorname{tn}(K+iy)} = -\frac{2ih_n}{b-c};$$

ferner, daſs wegen (25)

$$\frac{1}{\operatorname{tn}(K+ix)} = ik'\cos\frac{\mu'}{2}, \qquad \frac{1}{\operatorname{tn}(K+iy)} = ik'\cos\frac{\nu'}{2}$$

und wegen (16) $\operatorname{dn}(K+ix) = k'\cos\frac{\mu}{2}$, $\operatorname{dn}(K+iy) = k'\cos\frac{\nu}{2}$ ist; alsdann folgt:

$$\operatorname{tn}(2K+ix+iy) = \frac{2i(h_m+h_n)}{k'^2(b+c)\left(\cos\frac{\mu}{2}\cos\frac{\nu}{2}+\cos\frac{\mu'}{2}\cos\frac{\nu'}{2}\right)}.$$

Nun ist nach (25): $-i\cos\frac{M'}{2} = \operatorname{tn}(K+K+ix+iy)$ und $k'^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2}$, also

$$\cos\frac{M'}{2} = -\frac{(b+c)(h_m+h_n)}{2bc\left(\cos\frac{\mu}{2}\cos\frac{\nu}{2}+\cos\frac{\mu'}{2}\cos\frac{\nu'}{2}\right)}. \tag{32}$$

Es ist bemerkenswert, daſs wir diesen Ausdruck auch aus der allgemeinen Beziehung $\operatorname{tg}\frac{M}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{M'}{2} = -k$ erhalten könnten. Dividiert man nämlich (31) durch (32) und multipliziert mit (29), so erkennt man, daſs in der That M und M' durch jene Relation verbunden sind, wie schon (27) es verlangt.

4. *Beweis des Additionstheorems.* — In einem Punkte B innerhalb eines Kreises mögen sich zwei Sehnen schneiden, deren Abschnitte m, m' und n, n' heiſsen. Fällt man vom Mittelpunkte auf die Sehnen die Senkrechten h_m und h_n, so ist, wenn man u für $K+ix$, v für $K+iy$ setzt:

$$h_m = i\frac{b+c}{2}\frac{\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{\operatorname{sn}u}, \qquad h_n = i\frac{b+c}{2}\frac{\operatorname{cn}v\operatorname{dn}v}{\operatorname{sn}v},$$

$$h_m+h_n = i\frac{b+c}{2}\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}v\operatorname{dn}v+\operatorname{sn}v\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v}.$$

Ferner

$$m = (b-c)\,\mathrm{sn}\,u, \quad m' = \frac{(b-c)}{k\,\mathrm{sn}\,u}; \quad n = (b-c)\,\mathrm{sn}\,v, \quad n' = \frac{(b-c)}{k\,\mathrm{sn}\,v}, \quad \text{also}$$

$$m'n' - mn = (b-c)^2\left(\frac{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v}{k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v}\right),$$

$$2(b-c)\frac{h_m + h_n}{m'n' - mn} = ik\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v + \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung nimmt je nach Lage der beiden Sehnen beliebige Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ an, kann also $\mathrm{tg}\frac{M}{2}$ gleichgesetzt werden. Nach (18) giebt es aber immer ein M, für welches $\mathrm{tg}\frac{M}{2} = ik\,\mathrm{sn}\,(K + U)$ ist, wobei U die Form $K + iz$ haben mufs. Also entsteht die Gleichung:

$$\mathrm{sn}\,(2K + iz) =$$

$$= \frac{\mathrm{sn}\,(K+ix)\,\mathrm{cn}\,(K+iy)\,\mathrm{dn}\,(K+iy) + \mathrm{sn}\,(K+iy)\,\mathrm{cn}\,(K+ix)\,\mathrm{dn}\,(K+ix)}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2(K+ix)\,\mathrm{sn}^2(K+iy)}.$$

Um iz als Funktion von ix und iy zu bestimmen, beachte man, dafs für $y = 0$ die rechte Seite in $\frac{\mathrm{cn}\,(K+ix)}{\mathrm{dn}\,(K+ix)}$, also in $\mathrm{sn}\,(2K + ix)$ übergeht, ebenso für $x = 0$ in $\mathrm{sn}\,(2K + iy)$; dafs ferner für $x = 0$ und $y = 0$, ebenso wie für $ix = -iy$ die rechte Seite verschwindet; daraus erkennt man, dafs $iz = ix + iy$ sein mufs, und man erhält durch Einführung von u und v die bekannte Formel:

$$\mathrm{sn}\,(u + v) = \frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v + \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v}.$$

Will man die Additionsformeln für die übrigen Funktionen beweisen, so bilde man die Ausdrücke (30), (31) und (32) und verfahre im übrigen genau so, wie es soeben mit der Funktion sn geschah; der Beweis, dafs die rechte Seite der Gleichungen kleiner als Eins ist, ist leicht, da das Maximum derselben offenbar dann eintritt, wenn $m = b - c$, $m' = b + c$, ebenso $n = b - c$, $n' = b + c$ ist.

5. *Beweis anderer Additionsformeln.* — Wir werden in diesem Abschnitte an einigen Beispielen zeigen, wie die Darstellung am Kreise benutzt werden kann, um andere Additionsformeln, Kombinationen von den einfachen, herleiten zu können. Die Beispiele sind entnommen dem System von 16 Gleichungen, das Jacobi in den Ges. W. II, 325 aufgestellt hat, und welches von Herrn Felix Müller in die II. Auflage der Enneperschen Vorlesungen S. 199 aufgenommen ist.

a) Im Dreieck $BC'D'$ ist:

$$\frac{a'}{b+c} = \frac{\sin BD'C'}{\sin BC'D'} \quad \text{oder} \tag{33}$$

$$\frac{a'}{b+c} = \frac{\sin\frac{\alpha'}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}. \tag{34}$$

Im Dreieck CBD' ist

$$\frac{a}{b+c} = \frac{\sin CD'B}{\sin D'CB} \quad \text{oder}$$

$$\frac{a}{b+c} = -\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha'}{2}}. \tag{35}$$

Schneiden sich nun 2 Sehnen, deren Abschnitte m und m', bezw. n und n' und deren Centriwinkel μ und μ', resp. ν und ν' sind, in B, so ist:

$$\frac{m'n'}{(b+c)^2} = \frac{\sin\frac{\mu'}{2}\sin\frac{\nu'}{2}}{\cos\frac{\mu}{2}\cos\frac{\nu}{2}}, \qquad \frac{mn}{(b+c)^2} = \frac{\sin\frac{\mu}{2}\sin\frac{\nu}{2}}{\cos\frac{\mu'}{2}\cos\frac{\nu'}{2}}, \quad \text{also}$$

$$\frac{m'n'}{(b+c)^2}\cos\frac{\mu}{2}\cos\frac{\nu}{2} + \frac{mn}{(b+c)^2}\cos\frac{\mu'}{2}\cos\frac{\nu'}{2}$$
$$= \sin\frac{\mu}{2}\sin\frac{\nu}{2} + \sin\frac{\mu'}{2}\sin\frac{\nu'}{2}.$$

Zieht man auf beiden Seiten $\frac{mn}{(b+c)^2}\left(\cos\frac{\mu}{2}\cos\frac{\nu}{2} + \cos\frac{\mu'}{2}\cos\frac{\nu'}{2}\right)$ ab, so entsteht nach Division mit $\frac{m'n'-mn}{4bc}$ eine Gleichung, die unter Berücksichtigung von (30) und (31) übergeht in:

$$\frac{1}{\cos\frac{M}{2}} - \frac{k^2 mn}{(b-c)^2}\frac{1}{\sin\frac{M'}{2}} = k'^2\cos\frac{\mu}{2}\cos\frac{\nu}{2}, \tag{36}$$

wo M den Centriwinkel zum Punkte $K+ix+iy$ und M' den zum Gegenpunkte bedeutet. Beachtet man (13), (16) und (24), so ist:

$$\frac{k'}{\operatorname{dn}(K+ix+iy)} - k^2\operatorname{sn}(K+ix)\operatorname{sn}(K+iy)\cdot\frac{k'\operatorname{sn}(K+ix+iy)}{\operatorname{dn}(K+ix+iy)}$$
$$= \operatorname{dn}(K+ix)\operatorname{dn}(K+iy),$$

oder, wenn man $K+ix=u$, $K+iy=v$ setzt:

$$\operatorname{dn}(u+v) + k^2\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v\operatorname{cn}(u+v) = \operatorname{dn}u\operatorname{dn}v. \tag{37}$$

b) Im Dreieck DCB ist $\frac{a}{b-c} = \frac{\sin BDC}{\sin BCD}$ oder

$$\frac{a}{b-c} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha'}{2}}. \tag{38}$$

Im Dreieck $C'BD$ ist $\frac{a'}{b-c} = \frac{\sin BDC'}{\sin BC'D}$ oder

$$\frac{a'}{b-c} = \frac{\cos\frac{\alpha'}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}. \tag{39}$$

Auf m und n angewendet ergiebt dies:

$$\frac{mn}{(b-c)^2} = \frac{\cos\frac{\mu}{2}\cos\frac{\nu}{2}}{\sin\frac{\mu'}{2}\sin\frac{\nu'}{2}}, \qquad \frac{m'n'}{(b-c)^2} = \frac{\cos\frac{\mu'}{2}\cos\frac{\nu'}{2}}{\sin\frac{\mu}{2}\sin\frac{\nu}{2}};$$

folglich

$$\frac{mn}{(b-c)^2}\sin\frac{\mu'}{2}\sin\frac{\nu'}{2} + \frac{m'n'}{(b-c)^2}\sin\frac{\mu}{2}\sin\frac{\nu}{2} = \cos\frac{\mu}{2}\cos\frac{\nu}{2} + \cos\frac{\mu'}{2}\cos\frac{\nu'}{2}.$$

Eine der obigen entsprechende Transformation führt zu der Formel

$$\frac{1}{\sin\frac{M'}{2}} - \frac{mn}{(b-c)^2}\frac{1}{\cos\frac{M}{2}} = \frac{k'^2}{k^2}\sin\frac{\mu}{2}\sin\frac{\nu}{2}, \quad \text{woraus} \tag{40}$$

$$\operatorname{cn}(u+v) + \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn}(u+v) = \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v. \tag{41}$$

c) Etwas umständlicher gestaltet sich die Rechnung bei dem *dritten* Beispiel. Es ist $2(m'n' - mn) = (m + m')(n' - n) + (n + n')(m' - m)$, also

$$\frac{m'n' - mn}{2bc} = \frac{m+m'}{2b}\cdot\frac{n'-n}{2c} + \frac{n+n'}{2b}\cdot\frac{m'-m}{2c}.$$

Im Dreieck APC ist $\cos ACP = \frac{a+a'}{2b}$ oder $\frac{a+a'}{2b} = \sin\frac{\alpha'-\alpha}{2}$.

Im Dreieck ABP ist $\frac{a'-a}{2c} = \cos ABP$ oder $\frac{a'-a}{2c} = \sin\frac{\alpha+\alpha'}{2}$.

Demnach wird

$$\frac{m'n' - mn}{2bc} = \sin\frac{\mu'-\mu}{2}\sin\frac{\nu'+\nu}{2} + \sin\frac{\mu'+\mu}{2}\sin\frac{\nu'-\nu}{2}$$

$$= 2\sin\frac{\mu'}{2}\sin\frac{\nu'}{2}\cos\frac{\mu}{2}\cos\frac{\nu}{2} - 2\sin\frac{\mu}{2}\sin\frac{\nu}{2}\cos\frac{\mu'}{2}\cos\frac{\nu'}{2}.$$

Addiert und subtrahiert man rechts $\sin\frac{\mu}{2}\sin\frac{\nu}{2}\cos\frac{\mu}{2}\cos\frac{\nu}{2}$, so erhält man nach einer leichten Umformung

$$(42)\qquad 1 = \frac{\cos\frac{\mu}{2}\cos\frac{\nu}{2}}{\cos\frac{M}{2}} - \frac{\sin\frac{\mu}{2}\sin\frac{\nu}{2}}{\sin\frac{M'}{2}}.$$

Nun ist nach (16) und (15)

$$\cos\frac{\mu}{2} = \frac{1}{k'}\,\mathrm{dn}\,u,\quad \cos\frac{\nu}{2} = \frac{1}{k'}\,\mathrm{dn}\,v,\quad \sin\frac{\mu}{2} = i\frac{k}{k'}\,\mathrm{cn}\,u,\quad \sin\frac{\nu}{2} = i\frac{k}{k'}\,\mathrm{cn}\,v,$$

folglich ergiebt sich

$$(43)\qquad \mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v\,\mathrm{dn}(u+v) - k^2\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{cn}(u+v) = k'^2.$$

d) Als *letztes* Beispiel soll die Formel

$$\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v\,\mathrm{cn}(u+v) + k'^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v = \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}(u+v)$$

behandelt werden.

Verwandelt man in (42) μ in μ' und ν in ν', so geht $K+ix+iy$ in $K+ix+iy+2iK'$ über, d. h. $\sphericalangle M$ wird $4R+M$, M' wird $4R+M'$, $\cos\frac{M}{2}$ geht also über in $-\cos\frac{M}{2}$, $\sin\frac{M'}{2}$ in $-\sin\frac{M'}{2}$; die Gleichung heifst also:

$$(44)\qquad \frac{\cos\frac{\mu'}{2}\cos\frac{\nu'}{2}}{\cos\frac{M}{2}} - \frac{\sin\frac{\mu'}{2}\sin\frac{\nu'}{2}}{\sin\frac{M'}{2}} = -1,$$

oder

$$(45)\qquad \frac{\cos\frac{\mu}{2}\cos\frac{\mu'}{2}\cos\frac{\nu}{2}\cos\frac{\nu'}{2}}{\sin\frac{\mu'}{2}\sin\frac{\nu'}{2}\cos\frac{M}{2}} - \frac{\cos\frac{\mu}{2}\cos\frac{\nu}{2}}{\sin\frac{M'}{2}} = -\frac{\cos\frac{\mu}{2}\cos\frac{\nu}{2}}{\sin\frac{\mu'}{2}\sin\frac{\nu'}{2}}.$$

Nun ist $\mathrm{tg}\frac{\mu}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{\mu'}{2} = -k$, ebenso $\mathrm{tg}\frac{\nu}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{\nu'}{2} = -k$, folglich kann (45) geschrieben werden

$$\frac{\sin\frac{\mu}{2}\sin\frac{\nu}{2}}{k^2\cos\frac{M}{2}} - \frac{\cos\frac{\mu}{2}\cos\frac{\nu}{2}}{\sin\frac{M'}{2}} = -\frac{\cos\frac{\mu}{2}\cos\frac{\nu}{2}}{\sin\frac{\mu'}{2}\sin\frac{\nu'}{2}}.$$

Nach (38) ist $\dfrac{\cos\frac{\mu}{2}\cos\frac{\nu}{2}}{\sin\frac{\mu'}{2}\sin\frac{\nu'}{2}} = \dfrac{mn}{(b-c)^2}$; multipliziert man noch mit $-k'^2$, so fliefst aus den schon mehrfach benutzten Formeln

$$(46)\qquad \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}(u+v) - \mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v\,\mathrm{cn}(u+v) = k'^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v.$$

e) Aus den angeführten Beispielen kann man leicht erkennen, welchen Weg man einschlagen mufs, um Additionsformeln ähnlicher Art zu erhalten. Man hat nur nötig, durch einfache Rechnungsoperationen Ausdrücke von der Form der Gleichungen (29), (30), (31) und (32) herzustellen und von da aus zu den elliptischen Funktionen überzugehen. Für die übrigen oben erwähnten 16 Jacobischen Gleichungen wird es wohl genügen, die in Bezug auf den Kreis umgewandelten Formeln unmittelbar unter die Gleichungen in elliptischen Funktionen zu schreiben. Es soll dies für sechs der Formeln geschehen; die übrigen sechs ergeben sich durch Vertauschung von u mit v, d. h. von μ mit ν bezw. μ' mit ν':

(47) $\operatorname{cn} v \operatorname{cn}(u+v) + \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{sn}(u+v) = \operatorname{cn} u,$

$$\frac{\cos\frac{\mu}{2}\cos\frac{M'}{2}}{\cos\frac{\nu'}{2}} - \frac{\sin\frac{\mu}{2}\sin\frac{M'}{2}}{\sin\frac{\nu}{2}} = 1;$$

(48) $-\operatorname{cn} u \operatorname{sn}(u+v) + \operatorname{sn} u \operatorname{dn} v \operatorname{cn}(u+v) = -\operatorname{sn} v \operatorname{dn} u,$

$$\frac{\cos\frac{\mu'}{2}\cos\frac{M'}{2}}{\cos\frac{\nu}{2}} + \frac{\sin\frac{\mu'}{2}\sin\frac{M'}{2}}{\sin\frac{\nu'}{2}} = 1;$$

(49) $\operatorname{dn} u \operatorname{cn} v \operatorname{cn}(u+v) + k'^2 \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(u+v) = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} v \operatorname{dn}(u+v),$

$$\frac{\sin\frac{\mu}{2}\sin\frac{\nu'}{2}}{\sin\frac{M}{2}} + \frac{\cos\frac{\mu}{2}\cos\frac{\nu'}{2}}{\cos\frac{M'}{2}} = 1;$$

(50) $\operatorname{dn} v \operatorname{dn}(u+v) + k^2 \operatorname{sn} v \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u+v) = \operatorname{dn} u,$

$$\frac{\cos\frac{\mu}{2}\cos\frac{M}{2}}{\cos\frac{\nu}{2}} + \frac{\sin\frac{\mu}{2}\sin\frac{M}{2}}{\sin\frac{\nu'}{2}} = 1;$$

(51) $\operatorname{dn} u \operatorname{sn}(u+v) - \operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn}(u+v) = \operatorname{cn} u \operatorname{sn} v,$

$$\frac{\sin\frac{\nu'}{2}\sin\frac{M}{2}}{\sin\frac{\mu}{2}} - \frac{\cos\frac{\nu}{2}\cos\frac{M}{2}}{\cos\frac{\mu}{2}} = \frac{\sin\frac{\nu}{2}\sin\frac{\nu'}{2}}{\cos\frac{\mu}{2}\cos\frac{\mu'}{2}},$$

(52) $\operatorname{sn} v \operatorname{cn}(u+v) - \operatorname{cn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn}(u+v) = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn}(u+v),$

$$\frac{\cos\frac{\nu}{2}\cos\frac{\mu'}{2}}{\cos\frac{M'}{2}} - \frac{\sin\frac{\mu}{2}\sin\frac{\nu'}{2}}{\sin\frac{M}{2}} = k'^2 \cos\frac{\mu}{2}\cos\frac{\mu'}{2}\cos\frac{\nu}{2}\cos\frac{\nu'}{2}.$$

Schon eine flüchtige Betrachtung der Formeln zeigt eine gröſsere Symmetrie im Aufbau, als die entsprechenden Gleichungen in elliptischen Funktionen sie besitzen. Auch tritt ihre innere Verwandtschaft schärfer hervor, wie z. B. der Anblick von (48) und (49) beweist. Setzt man nämlich in (50) μ' statt μ, d. h. verändert man das Argument $K + ix$ um iK', so ist klar, daſs M in M' übergeht. Es ist also (48) die unmittelbare Folge von (50), ebenso (48) die unmittelbare Folge von (47), was aus der Jacobischen Form durchaus nicht ohne weiteres hervorgeht. Indessen soll nicht näher auf die Untersuchung der Verwandtschaft an dieser Stelle eingegangen werden.

6. *Die Verdoppelung des Argumentes.* — Die Nützlichkeit der beschriebenen Kreisdarstellung zeigt sich deutlich in der nunmehr zu behandelnden Transformation

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = 2\,\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Aus (47) und (48) folgt

$$\operatorname{tg}\frac{M'}{2} = \operatorname{tg}\frac{\nu}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\nu'}{2}\,\frac{\cos\frac{\mu}{2}\cos\frac{\nu}{2}-\cos\frac{\mu'}{2}\cos\frac{\nu'}{2}}{\sin\frac{\mu}{2}\sin\frac{\nu'}{2}+\sin\frac{\nu}{2}\sin\frac{\mu'}{2}}.$$

Weil aber nach (27) $\operatorname{tg}\frac{M}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{M'}{2} = \operatorname{tg}\frac{\nu}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\nu'}{2}$, so ergiebt sich

$$\operatorname{tg}\frac{M}{2} = \frac{\sin\frac{\mu}{2}\sin\frac{\nu'}{2}+\sin\frac{\nu}{2}\sin\frac{\mu'}{2}}{\cos\frac{\mu}{2}\cos\frac{\nu}{2}-\cos\frac{\mu'}{2}\cos\frac{\nu'}{2}}. \tag{53}$$

Setzt man hier $\mu = \nu$, also $\mu' = \nu'$, so erhält man:

$$\operatorname{tg}\frac{M}{2} = \frac{2\sin\frac{\mu}{2}\sin\frac{\mu'}{2}}{\cos^2\frac{\mu}{2}-\cos^2\frac{\mu'}{2}}.$$

Wir wollen, da der Unterschied zwischen μ und ν wegfällt, den gemeinschaftlichen Buchstaben α einsetzen und A für M schreiben; dann wird

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha'}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\alpha'}{2}} = \frac{2\,\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha'}{2}}}{1-\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha'}{2}}}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der Formel

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{A}{4}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{A}{4}},$$

so erkennt man, dafs

$$\operatorname{tg}\frac{A}{4} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha'}{2}} \tag{54}$$

ist. Der Sinn dieser Formel ist, dafs dem Centriwinkel α, welcher dem Punkte $K+ix$ angehört, ein Centriwinkel A des Punktes $K+2ix$ entspricht, welcher durch (54) definiert ist. Die Transformation, welche zur Verdoppelung des variablen Teiles des Argumentes führt, kann also aufgefafst werden als eine Abbildung zweier im übrigen kongruenter Kreise auf einander nach dem Gesetze (54). Der Inhalt der Formel erschöpft völlig die Eigenschaften dieser Transformation.

Um diese Behauptung zu begründen, beachte man zunächst, dafs $\operatorname{tg}\frac{A}{4} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{A}{2}}{1+\cos\frac{A}{2}}}$ ist. Nun ist einerseits nach (15) und (24)

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha'}{2}} = \frac{i\frac{k}{k'}\operatorname{cn}(K+ix)}{\frac{1}{k'}\frac{\operatorname{dn}(K+ix)}{\operatorname{sn}(K+ix)}},$$

andererseits nach (16)

$$\cos\frac{A}{2} = \frac{1}{k'}\operatorname{dn}(K+2ix) = \frac{1}{\operatorname{dn}(2K+2ix)},$$

demnach

$$\sqrt{\frac{1-\operatorname{dn}(2K+2ix)}{1+\operatorname{dn}(2K+2ix)}} = k\frac{\operatorname{sn}(K+ix)\operatorname{cn}(K+ix)}{\operatorname{dn}(K+ix)}.$$

Für $K+ix=u$ entsteht die bekannte Formel

$$\sqrt{\frac{1-\operatorname{dn}2u}{1+\operatorname{dn}2u}} = k\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}u}. \tag{55}$$

In (53) wollen wir vom Punkte $K+iy$ zum Gegenpunkte $K+iy+iK'$ übergehen; dann haben wir ν' statt ν, $4R+\nu$ statt ν' zu setzen. Es geht dann M über in M', und wir erhalten die Formel

$$\operatorname{tg}\frac{M'}{2} = \frac{-\sin\frac{\mu}{2}\sin\frac{\nu}{2}+\sin\frac{\nu'}{2}\sin\frac{\mu'}{2}}{\cos\frac{\mu}{2}\cos\frac{\nu'}{2}+\cos\frac{\mu'}{2}\cos\frac{\nu}{2}}. \tag{56}$$

Lassen wir jetzt den Unterschied zwischen μ und ν fallen und setzen wieder α und A ein, so entsteht

$$\operatorname{tg}\frac{A'}{2} = \frac{\sin^2\frac{\alpha'}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha'}{2}}$$

oder

$$\operatorname{tg}\left(90^0 - \frac{A'}{2}\right) = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha'}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\alpha'}{2}}.$$

Aus dem Vergleich mit der Formel

$$\operatorname{tg}\left(90^0 - \frac{A'}{2}\right) = \frac{2\operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{A'}{4}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(45^0 - \frac{A'}{4}\right)}$$

bei gleichzeitigem Zeichenwechsel folgt daher

$$\operatorname{tg}\left(\frac{A'}{4} - 45^0\right) = -\frac{\cos\frac{\alpha'}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}. \tag{57}$$

Diese Gleichung enthält ebenfalls das vorhin erwähnte Abbildungsprinzip. Nun ist

$$\operatorname{tg}\left(\frac{A'}{4} - 45^0\right) = \frac{\sin\left(\frac{A'}{4} - 45^0\right)}{\cos\left(\frac{A'}{4} - 45^0\right)} = \sqrt{\frac{1 - \sin\frac{A'}{2}}{1 + \sin\frac{A'}{2}}} = -\frac{\cos\frac{\alpha'}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Nach (25) ist $\cos\frac{\alpha'}{2} = -\frac{i}{k'}\frac{\operatorname{cn}(K+ix)}{\operatorname{sn}(K+ix)}$ und nach (16) $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{k'}\operatorname{dn}(K+ix)$; ferner liefert (24) $\frac{1}{\sin\frac{A'}{2}} = -\operatorname{cn}(2K + 2ix)$; folglich ist

$$\sqrt{\frac{-\operatorname{cn}(2K+2ix) - 1}{-\operatorname{cn}(2K+2ix) + 1}} = \frac{i\operatorname{cn}(K+ix)}{\operatorname{sn}(K+ix)\operatorname{dn}(K+ix)}$$

oder, indem man u für $K + ix$ einführt,

$$\sqrt{\frac{1 - \operatorname{cn}2u}{1 + \operatorname{cn}2u}} = \frac{\operatorname{sn}u\operatorname{dn}u}{\operatorname{cn}u}. \tag{58}$$

Wir gehen jetzt zum Beweise der Formel

$$\sqrt{\frac{1 - \operatorname{sn}u}{1 + \operatorname{sn}u}} = \frac{1}{k'}\frac{\operatorname{cn}\frac{1}{2}(K+u)\operatorname{dn}\frac{1}{2}(K+u)}{\operatorname{sn}\frac{1}{2}(K+u)}$$

über. Zu diesem Zwecke bilden wir gemäß (38)

$$\frac{A}{b-c} = \frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A'}{2}},$$

wo A den zu $K + 2ix$ gehörigen Strahl bedeutet. Das Verhältnis der rechten Seite ist sofort aus (30) und (31) unter Gleichsetzung von μ und ν zu bestimmen. Wir erhalten

$$\frac{A}{b-c} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha'}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha'}{2}},$$

woraus folgt

$$\frac{A-(b-c)}{A+(b-c)} = \frac{\cos\alpha + \cos\alpha'}{2} = \cos\frac{\alpha'+\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha'-\alpha}{2}.$$

Nach (1) andererseits ist $\sin\gamma = -\cos\frac{\alpha'-\alpha}{2}$ und, wie die Figur lehrt,

$$\cos\frac{\alpha'-\alpha}{2} = -\frac{h_a}{b}.$$

Ebenso folgt aus (11) die Beziehung $\cos PAB = -\cos\frac{\alpha'+\alpha}{2} = \frac{h_a}{c}$, so daß

$$\cos\frac{\alpha'-\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha'+\alpha}{2} = \frac{h_a^2}{bc}.$$

Wir erhalten also

$$h_a = \sqrt{bc}\sqrt{\frac{A-(b-c)}{A+(b-c)}}.$$

Nach (19) ist

$$h_a = i\frac{b+c}{2}\frac{\operatorname{cn}(K+ix)\operatorname{dn}(K+ix)}{\operatorname{sn}(K+ix)} \quad\text{und}\quad \frac{A}{b-c} = \operatorname{sn}(K+2ix);$$

folglich

$$\frac{b+c}{2}\frac{\operatorname{cn}(K+ix)\operatorname{dn}(K+ix)}{\operatorname{sn}(K+ix)} = \sqrt{bc}\sqrt{\frac{1-\operatorname{sn}(K+2ix)}{1+\operatorname{sn}(K+2ix)}}.$$

Setzt man noch $K + 2ix = u$ und beachtet $\frac{2\sqrt{bc}}{b+c} = k'$, so entsteht

$$\sqrt{\frac{1-\operatorname{sn}u}{1+\operatorname{sn}u}} = \frac{1}{k'}\frac{\operatorname{cn}\frac{1}{2}(K+u)\operatorname{dn}\frac{1}{2}(K+u)}{\operatorname{sn}\frac{1}{2}(K+u)}. \tag{59}$$

Zum Schluß wollen wir noch die Hermitesche Formel

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2\frac{u}{2}} = \frac{(1+\operatorname{cn}u)(1+\operatorname{dn}u)}{\operatorname{sn}^2u} \tag{60}$$

verifizieren. Denkt man sich $2K + 2ix$ unter u, so heifst die Formel

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2(K+ix)} = \frac{\left(1 - \frac{k' \operatorname{sn}(K+2ix)}{\operatorname{dn}(K+2ix)}\right)\left(1 + \frac{k'}{\operatorname{dn}(K+2ix)}\right)}{\frac{\operatorname{cn}^2(K+2ix)}{\operatorname{dn}^2(K+2ix)}}.$$

Setzt man dafür die schon oft benutzten Gröfsen ein, so erhält man

$$\frac{(b-c)^2}{a^2} = \frac{\left(1 - \sin\frac{A'}{2}\right)\left(1 + \cos\frac{A}{2}\right)k^2}{\sin\frac{A'}{2}\cos\frac{A}{2}\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}.$$

Wegen $-k = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{A'}{2}$ kann man setzen

$$\left(\frac{b-c}{a}\right)^2 = -\frac{4\sin^2\left(\frac{A'}{4} - 45^0\right)\cos^2\frac{A}{4}\,k\operatorname{tg}\frac{A'}{2}}{\sin\frac{A'}{2}\cos\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{A'}{2} - 45^0\right)k}{\operatorname{tg}\frac{A}{4}}.$$

Wir erhalten demnach als trigonometrisches Äquivalent von (60)

$$\frac{a}{b-c} = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{4}}{k\operatorname{tg}\left(\frac{A'}{4} - 45^0\right)}}. \tag{61}$$

Es läfst sich nun ohne Mühe diese Gleichung auch aus unseren Abbildungsformeln herleiten. Es ist nämlich nach (54) und (57)

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{4}}{\operatorname{tg}\left(\frac{A'}{4} - 45^0\right)} = -\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha'}{2}\cos\frac{\alpha'}{2}},$$

woraus

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{4}}{k\operatorname{tg}\left(\frac{A'}{4} - 45^0\right)} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha'}{2}}.$$

Mit Benutzung von (38) ergiebt sich unmittelbar (61) und damit auch die Hermitesche Formel.

Sagan, den 21. Juni 1901.

Transformation continue dans le triangle;

Par M. E. Lemoine à Paris.[1])

Je considère un téorème général quelconque T qui s'aplique au triangle; il s'apliquera au triangle ABC Fig. (1) qui a son somet A au dessus de BC et aussi bien au triangle A_1BC qui a son somet au dessous; seulement il faut remarquer que, si je supose que A est l'intersection avec BA, droite fixe, d'une droite AB mobile autour de B qui, d'abord couchée sur BC, tourne dans le sens ABC, devient paralèle à CA, puis dépasse cète position pour doner le triangle A_1BC dont le somet A_1 passe au dessous de BC, il faut remarquer, dis-je, que le téorème T suivi dans cète continuité peut prendre, lorsque A est au dessous de BC, une autre forme que la première. C'est une forme nouvèle qui done ainsi come un autre téorème T_a général, se raportant donc à *tous* les triangles. Je dis alors que le téorème T_a est le *transformé continu en* A du téorème T. Il y a naturèlement aussi les *transformations continues* T_b et T_c

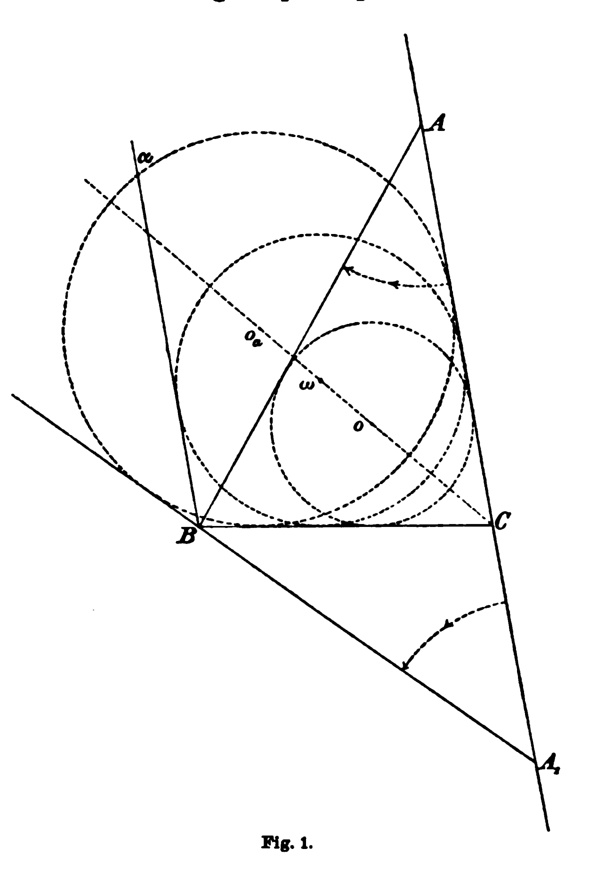


Fig. 1.

1) Dans le mémoire est employée l'ortografie simplifiée de la Soc. filologique française adoptée par l'auteur.

en B et en C. Nous alons fixer les idées par un exemple très simple.

Je supose que dans le téorème T il s'agisse du cercle inscrit au triangle ABC, suposons aussi que le point A se meut sur CA dans le sens indiqué précédemment; dans les divers triangles qui se succéderont, les cercles *inscrits* seront au dessus de BC et auront leurs centres sur la bissectrice de l'angle fixe BCA jusqu'à ce que la droite mobile vienne en $B\alpha$ paralèle à CA; le cercle inscrit deviendra pour cète position le cercle situé au dessus de BC et tangent aux deus paralèles $B\alpha$, CA et à BC. Si le mouvement continue et que l'on considère le triangle A_1BC dont le somet A_1 est au dessous de BC, il est visible que le cercle qui était tout à l'heure le cercle inscrit au triangle ABC sera devenu le cercle ex-inscrit dans l'angle BA_1C du triangle A_1BC. Come il est possible que dans T il ne s'agisse pas d'un cercle ex-inscrit, il est certain que dans ce cas la proposition T se sera transformée en une proposition t_a aplicable au triangle A_1BC, par suite à tous les triangles, et diférente de T.

Examinons maintenant les changements éprouvés par les désignations des éléments du triangle dans la *transformation continue en A*.

Si nous parcourons d'une façon continue les triangles ABC dans le sens ABC et par conséquent les triangles A_1BC dans le sens A_1BC, nous voyons que BC n'a pas changé de signe, donc dans la *transformation continue* en A a reste a, mais CA en devenant CA_1 a changé de signe, de même AB en devenant A_1B; donc dans la *transformation continue* en A b et c sont devenus $-b$ et $-c$. Ce qui précède sufit certainement pour déterminer dans le triangle les variations de tous ses éléments par transformation continue en A, puisque les éléments sont fonctions de a, b, c, mais il est utile pour la clarté, d'étudier directement sur la figure les variations des principaux éléments, nous allons le faire d'abord directement pour les angles et pour la surface, nous en déduirons facilement les transformations des autres éléments.

La valeur de l'angle CAB est donée par la rotation autour de A de la droite AC dans le sens ACB jusqu'à ce qu'èle coincide avec AB dans la figure (1), c'est le sens des aiguilles d'une montre, la valeur de l'angle CA_1B est donée par la rotation autour de A_1 de la droite A_1C dans le sens A_1CB jusqu'à ce qu'èle coincide avec A_1B, c'est le sens inverse du précédent; donc, par *transformation continue* en A, A devient $-A$. On voit imédiatement que B du triangle ABC devient $180-B$ du triangle A_1BC et par suite que dans la *transformation continue* en A, B devient $180-B$, C devient $180-C$.

Les sens ABC et A_1BC sont des signes contraires, donc S se transforme en $-S$.

On verrait que p, $(p-a)$, $(p-b)$, $p-c)$ se transforment respectivement en $-(p-a)$, $-p$, $(p-c)$, $(p-b)$. Sans entrer dans de plus longs détails, nous alons résumer en un tableau les transformations en A, en B et en C des principaux éléments du triangle. Nous y apèlerons R le rayon du cercle circonscrit; r, r_a, r_b, r_c les rayons des quatre cercles tritangents; h_a, h_b, h_c les trois hauteurs; l_a, l_b, l_c les longueurs des trois bissectrices intérieures et l'_a, l'_b, l'_c cèles des trois bissectrices extérieures, ω l'angle de Brocard, δ, δ_a, δ_b, δ_c les longueurs $4R+r$, $4R-r_a$, $4R-r_b$, $4R-r_c$; x, y, z les coordonées normales trilinéaires courantes d'un point variable; α, β, γ les coordonées baricentriques; X, Y des coordonées cartésiènes rectangulaires ou obliques.

Eléments	Transformés en A	Transformés en B	Transformés en C
a, b, c	$a, -b, -c$	$-a, b, -c$	$-a, -b, c$
A, B, C, ω	$-A, \pi-B, \pi-C, -\omega$	$\pi-A, -B, \pi-C, -\omega$	$\pi-A, \pi-B, -C, -\omega$
$(p-a), (p-b), (p-c)$	$-(p-a), -p, (p-c), (p-b)$	$-(p-b), (p-c), -p, (p-a)$	$-(p-c), (p-b), (p-a), -p$
S, R	$-S, -R$	$-S, -R$	$-S, -R$
r, r_a, r_b, r_c	$r_a, r, -r_c, -r_b$	$r_b, -r_c, r, -r_a$	$r_c, -r_b, -r_a, r$
$\delta, \delta_a, \delta_b, \delta_c$	$-\delta_a, -\delta, -\delta_c, -\delta_b$	$-\delta_b, -\delta_c, -\delta, -\delta_a$	$-\delta_c, -\delta_b, -\delta_a, -\delta$
h_a, h_b, h_c	$-h_a, h_b, h_c$	$h_a, -h_b, h_c$	$h_a, h_b, -h_c$
l_a, l_b, l_c	$-l_a, -l'_b, -l'_c$	$-l'_a; -l_b, -l'_c$	$-l'_a, -l'_b, -l_c$
l'_a, l'_b, l'_c	$-l'_a, -l_b, -l_c$	$-l_a, l'_b, -l'_c$	$-l_a, -l_b, l'_c$
x, y, z	$-x, y, z$	$x, -y, z$	$x, y, -z$
α, β, γ	α, β, γ	α, β, γ	α, β, γ
X, Y	$X, -Y$	$-X, Y$	$-X, -Y$

Exemples. — Il peut ariver aussi que la *transformation continue* reproduise sans changements le téorème ou la formule a. *Les trois médianes d'un triangle se coupent en un même point*, $S^2 = rr_ar_br_c$, $a = b\cos C + c\cos B$ sont trois téorèmes ou formules dans ce cas.

Le téorème suivant: *La some des perpendiculaires abaissées du centre O du cercle circonscrit sur les trois cotés d'un triangle ABC est égale à la some du rayon du cercle inscrit et du cercle circonscrit,* qui se traduit par la formule

$$x + y + z = R + r$$

devient, *transformé* en *A: La some des perpendiculaires abaissées du centre O du cercle circonscrit sur les deus cotés AB, AC, diminuée de la perpendiculaire abaissée sur BC égale la diférence entre le rayon du cercle ex-inscrit* b_a *et le rayon du cercle circonscrit,* téorème qui se traduit par la formule

$$-x + y + z = r_a - R.$$

Les *transformations continues en B et en C* donent par ce même téorème

$$x - y + z = r_b - R, \qquad x + y - z = r_c - R,$$

d'où l'on déduit

$$x = \frac{2R + r - r_a}{2}, \text{ etc.}$$

La formule $p^2 = r_b r_c + r_c r_a + r_a r_b$ *transformée en A,* done

$$(p - a)^2 = r_b r_c - r r_b - r r_c.$$

La formule $\sum \frac{a}{r_a} = \frac{2\delta}{p}$ *transformée en A,* done

$$\frac{a}{r} + \frac{b}{r_c} + \frac{c}{r_b} = \frac{2\delta_a}{p - a}.$$

La formule $\frac{1}{2}\Sigma(b - c)^2 = p^2 - 3r\delta$ *transformée en A,* done

$$\tfrac{1}{2}[(b - c)^2 + (b + a)^2 + (c + a)^2] = (p - a)^2 + 3r_a\delta_a.$$

Je supose qu'en recherchant la valeur des rayons des huit cercles tangents aux trois cercles $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$[1]) on ait trouvé pour les rayons du couple des cercles les touchant tous trois extérieurement et tous trois intérieurement

$$\varrho' = \frac{2p(rR + r - p)}{\delta - rp}, \qquad \varrho'' = \frac{2p(rR + r + p)}{\delta + rp}.$$

La *transformation continue* en A opérée sur ϱ' et sur ϱ'' donera imédiatement les rayons ϱ_a', ϱ_a'' du couple des cercles tangents aux trois cercles donés, le premier cercle de ce couple, tangent à l'extérieur au cercle $A(a)$ et à l'intérieur des deus autres, le second tangent à l'intérieur du cercle $A(a)$ et à l'extérieur des deus autres

$$\varrho_a' = \frac{2(p - a)\{2R - r_a - (p - a)\}}{\delta_a - 2(p - a)}, \quad \varrho_a'' = \frac{2(p - a)\{2R - r_a + (p - a)\}}{\delta_a + 2(p - a)}$$

1) $A(a)$ désignant le cercle de centre A et du rayon a, etc.

L'iperbole qui a pour foyers B et C et dont la diférence des rayons vecteurs est $b-c$, passe en A; en coordonées normales èle a pour équation

$$p(p-a)(by-cz)^2 - bc(y-z)\,[b^2y+c^2z+ax(b-c)] = 0;$$

si on fait la *transformation en* A cète équation se reproduit; si l'on fait la *transformation en* B, la diférence des rayons vecteurs devient leur some $b+c$ et l'on obtient

$$(p-b)(p-c)(by-cz)^2 - bc(y-z)[b^2y+c^2z+ax(b+c)] = 0$$

équation de l'élipse qui a pour foyers B et C et passe en A.

La *transformation continue* d'une construction géométrografique d'un problème, conduit aussi à la construction géométrografique du problème qui résulte de la *transformation continue* du premier; ainsi le point de Nagel N a pour coordonées normales $\frac{p-a}{a}$, $\frac{p-b}{b}$, $\frac{p-c}{c}$, son *transformé continu* en A est: $-\frac{p}{a}$, $\frac{p-c}{b}$, $\frac{p-b}{c}$. Voici d'abord la construction géométrografique de N, èle se déduit de ce téorème: *Si par* N *je mène des paralèles aus bissectrices intérieures du* ABC, *la paralèle à la bissectrice de* A *coupant* CA *en* B'', AB *en* C', *la paralèle à la bissectrice de* B *coupant* AB *en* C'', BC *en* A', *la paralèle à la bissectrice de* C *coupant* BC *en* A'', CA *en* B', *on aura, en grandeur et en signe*, BC, CA, AB *étant les directions positives sur les cotés parcourus dans le sens* ABC $AB'' = AC' = c-b$; $BC'' = BA' = a-c$; $CA'' = CB' = b-a$ (fig. 2). Je trace $A(a)$ qui place C'' et B'' $(3C_1+C_3)$. Je trace $B(BC'')(2C_1+C_3)$ qui place A'. Je trace $C(CB')(2C_1+C_3)$ qui place A''. Je trace $C''A'$, $A''B'$ $(4R_1+2R_2)$ qui se coupent en N — *op.*: $(4R_1+2R_2+7C_1+3C_3)$, simplicité: 16; exactitude: 11; 2 droites, 3 cercles.

Faisons la *transformation continue* en A du téorème précédent.

Le point N devient le point N_a dont les coordonées normales sont

$$\frac{p}{a}, \quad -\frac{p-c}{b}, \quad -\frac{p-b}{c}.$$

Si par N_a *je mène une paralèle à la bissectrice intérieure de* A *coupant* CA *en* B_a'', AB *en* C_a' (on verra plus loin que B_a'' et C_a' coincident respectivement avec B'' et C'), *une paralèle à la bissectrice extérieure de* B *coupant* AB *en* C_a'', BC *en* A_a', *une paralèle à la bissectrice extérieure de* C *coupant* BC *en* A_a'', CA *en* B_a', *on aura, en grandeur et en signe* $AB_a'' = AC_a' = -c+b$, $BC_a'' = BA_a' = a+c$, $CA_a'' = CB_a' = -b-a$. J'ai dit en grandeur et *en signe*, seulement il faut remarquer que dans la *transformation continue* en A le sens

ABC, voir fig. (1), est devenu le sens contraire de ce qu'il était p[illegible] mitivement, par conséquent que sur la figure (2), pour cète transfo[illegible] mation, le sens positif de BC restant BC, celui de CA, et celui de A. [illegible] sont devenus le sens négatif du téorème primitif. Cela permet [illegible] voir alors que C_a' coincide avec C' et B_a'' avec B''. Je trace $A(a)$ q[illegible] coupe AB en C_a'' et AC en B_a' $(3C_1 + C_3)$; je trace $B(BC_a'')$ q[illegible]

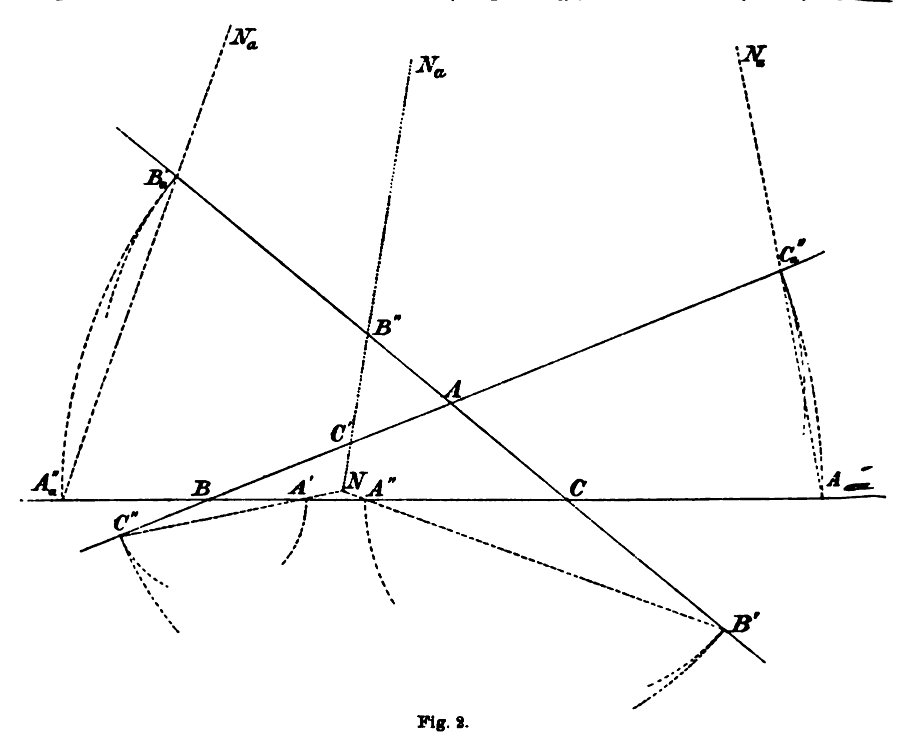


Fig. 2.

coupe BC en A_a' $(2C_1 + C_3)$ et $C(CB_a')$ qui coupe BC en $A_a''(2C_1 + C_3)$, enfin je trace $C_a''A_a'$, $B_a'A_a''$ $(4R_1 + 2R_2)$ qui se coupent en N_a, obtenu come j'ai obtenu N et avec le même simbole.

Si l'on voulait obtenir N et N_a au lieu d'obtenir l'un ou l'autre, il est facile de voir qu'on pourait conduire la construction de façon à n'avoir que 24 pour coéficient de simplicité.

La parabole inscrite qui touche la droite $\sum \frac{a}{b-c}\, x = 0$ *tangent comune au cercle inscrit et à l'élipse inscrite de Steiner, parabole do[n]t l'équation est* $\Sigma\sqrt{ax(3a-2p)} = 0$, *a son foyer sur le cercle circonsc[rit] et ce foyer a pour coordonées* $\frac{a}{3a-2p}$, $\frac{b}{3b-2p}$, $\frac{c}{3b-2p}$. La *tra[ns]formation continue* en A done: *La parabole inscrite qui touche*

droite $\frac{ax}{b-c}+\frac{by}{c-a}-\frac{cz}{a+b}=0$ *tangente comune au cercle ex-inscrit* O_a *et à l'élipse inscrite de Steiner a pour équation*

$$\sqrt{-ax(2a+b+c)}+\sqrt{by(2b+a-c)}+\sqrt{cz(2c+a-b)}=0$$

et pour foyer le point du cercle circonscrit dont les coordonées sont:

$$-\frac{a}{2a+b+c},\quad \frac{b}{2b+a-c},\quad \frac{c}{2c+a-b}.$$

Paris, le 17 septembre 1901.

Mémoires à consulter: Association Française pour l'avancement des sciences Congrès de Marseille 1891. — Etude sur une nouvelle transformation. Mathesis 1892. — Une règle d'analogie. Nouvelles Annales, janvier 1893.

Transformation continue dans le tétraèdre;

Par M. E. Lemoine à Paris.

Notations. Je désigne par A, B, C, D les somets d'un tétraèdre.

1°. *Les faces* ABC, BCD, CDA, DAB seront F_d, F_a, F_b, F_c.

2°. *Les angles plans des faces:*

BDC, CDA, ABD	seront	$D_a, D_b, D_c,$
CAB, DAB, DAC	„	$A_d, A_c, A_b,$
ABC, ABD, DBC	„	$B_d, B_c, B_a,$
BCA, BCD, DCA	„	$C_d, C_a, C_b.$

3°. *Les longueurs des arêtes* BC, CA, AB, DA, DB, DC seront a, b, c, a', b', c'.

4°. *Les angles dièdres* qui ont pour arêtes a, b, c, a', b', c' seront $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{a}', \hat{b}', \hat{c}'$.

5°. *Les angles que fait une arête avec les deus faces qui ne la contiènent pas* seront désignés chacun par la lètre qui désigne l'arête, suivie de la lètre qui désigne la face considérée; il y aura donc les 12 angles

$$\widehat{aF_c},\ \widehat{aF_b},\ \widehat{a'F_d},\ \widehat{a'F_a},$$

$$\widehat{bF_c},\ \widehat{bF_a},\ \widehat{b'F_d},\ \widehat{b'F_b},$$

$$\widehat{cF_b},\ \widehat{cF_a},\ \widehat{c'F_d},\ \widehat{c'F_c}.$$

6°. *Les hauteurs* seront h_d, h_a, h_b, h_c l'indice désignant le so[illegible] d'où èles partent.

7°. *Les rayons et les centres de la sfère inscrite et des sfères ex-scrites de première espèce* seront r, r_a, r_b, r_c, r_d; o, o_a, o_b, o_c, o_d.

Les rayons et les centres des sfères ex-inscrites de seconde es[illegible] *(ou inscrites dans les combles)* seront r'_a, r'_b, r'_c, o'_a, o'_b, o'_c.

8°. *Le volume du tétraèdre, le rayon de la sfère circonscrite et son centre* seront V, R, O.

9°. Les angles de DA et BC, de DB et CA, de DC et AB seront α, β, γ.

10°. *Les longueurs des droites qui joignent les milieus de DA et BC de DB et CA, de DC et AB* seront l, m, n.

Je fais tourner le plan BCD autour de BC come charnière; pour fixer les idées je suposerai que D est d'abord au dessus du plan horizontal ABC et que le mouvement de BCD s'éfectue au sens inverse de celui des aiguilles d'une montre. Tant que D restera au dessus de ABC, j'aurai ce que j'apèle le *premier état* de la figure; après avoir passé par l'infini sur AD au moment du paralélisme de AD et du plan mobile, lorsque ce plan continuera son mouvement, D passera au dessous de ABC en D_1 et j'aurai le *second état* de la figure qui corespondra à ce que nous apelons la *transformation continue en D*. On voit de suite que si l'on examine ce que deviènent dans le second état certaines propriétés du premier, èles pouront, relativement au tétraèdre $ABCD_1$ considéré comme tétraèdre quelconque, contenir des éléments de ce tétraèdre qui ne figuraient point dans la propriété énoncée pour le premier état, par exemple une propriété du premier état où figurait la sfère inscrite à $ABCD$ se transformera en une propriété où figurera la sfère ex-inscrite o_{d1} à $ABCD_1$. C'est l'étude générale des changements qu'éprouvent, dans le passage du premier état de la figure au second, les éléments et les propriétés du tétraèdre qui constitue *la transformation continue* en D, il y a naturèlement aussi les transformations continues en A, en B et en C. En gardant pour le second état de la figure les conventions de signe faites pour les éléments du premier état, on voit que, dans le second état, a, b, c restent a, b, c et que a', b', c' deviènent $-a', -b', -c'$. Comme le couple d'un tétraèdre et du tétraèdre dont il serait le symétrique est complètement déterminé par les six arêtes a, b, c, a', b', c' quand on a indiqué leurs positions respectives, on voit que le changement de a, b, c, a', b', c' en $a, b, c, -a', -b', -c'$ constitue *au fond* toute *la transformation continue* en D, il reste à en développer les conséquences.

F_d, F_a, F_b, F_c deviènent $F_d, -F_a, -F_b, -F_c$; en éfet la transformation opérée laisse ABC sans changement, mais dans les triangles BCD, ADC, ADB on fait respectivement les transformations a, b', c' en $a, -b', -c'$; b, c', a' en $b, -c', -a'$; c, a', b', en $c, -a', -b'$, c'est-à-dire qu'on opère sur chacun d'eux la *transformation continue* du triangle étudiée dans la note p. 243 relative au triangle.

La même remarque donc la transformation de tous les éléments qui ne dépendent que des éléments d'une face, ainsi

$$\begin{array}{lcl} D_a,\ D_b,\ D_c & \text{deviènent} & -D_a,\ -D_b,\ \ -D_c, \\ A_d,\ A_c,\ A_b & " & A_d,\ \pi - A_c,\ \pi - A_b, \\ B_d,\ B_c,\ B_a & " & B_d,\ \pi - B_c,\ \pi - B_a, \\ C_d,\ C_a,\ C_b & " & C_d,\ \pi - C_a,\ \pi - C_b. \end{array}$$

La continuité montre que h_d, h_a, h_b, h_c deviènent $-h_d, h_a, h_b, h_c$. Les formules $V = \frac{1}{3} h_d \cdot F_d = \frac{1}{3} h_a F_a$ etc. montrent alors que V devient $-V$. R devient $-R$, car les rayons menés par O perpendiculairement à ABC sont évidement de sens contraire dans les deus états de la figure. On voit directement que $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{a}', \hat{b}', \hat{c}'$ deviènent $\pi - \hat{a}$, $\pi - \hat{b}$, $\pi - \hat{c}$, $\hat{a}', \hat{b}', \hat{c}'$. l, m, n ne changent pas, ce qui peut se déduire de la formule de Chasles $6V = l \cdot a \cdot a' \cdot \sin \alpha$.

Il nous reste à examiner ce que deviènent $r, r_a, r_b, r_c, r_d, r_a', r_b', r_c'$. Etablissons ou rapelons d'abord deus propositions nécessaires.

I. On sait que s'il y a une sfère inscrite dans un comble, c'est que la some des deus faces qui n'ont pas l'arête de ce comble pour coté est plus grande que la some des deus autres.

II. Soit un triangle ABC fig. (1). M un point de son plan, point dont les distances à BC, CA, AB sont respectivement x, y, z. Soit DM la perpendiculaire au plan ABC menée par M. Je dis qu'il y aura toujours un point Δ sur DM à partir duquel si l'on prend un point D tel que $MD > M\Delta$, la some de deus des triangles DCB, DCA, DAB sera plus grande que la some du troisième triangle et de ABC. En éfet, posons $MD = t$. Les raports des surfaces des trois triangles DCB, DCA, DAB sont évidement les mêmes que les raports de

$$a\sqrt{1 + \left(\frac{x}{t}\right)^2}, \quad b\sqrt{1 + \left(\frac{y}{t}\right)^2}, \quad c\sqrt{1 + \left(\frac{z}{t}\right)^2}$$

qui tendent indéfiniment vers a, b, c quand t croît indéfiniment. Si nous suposons que a soit le plus grand des cotés de ABC il suffira

de démontrer qu' à partir d'une certaine valeur t, on a, pour toutes les valeurs de t plus grandes que t_1:

$$b\sqrt{1+\left(\frac{y}{t}\right)^2}+c\sqrt{1+\left(\frac{z}{t}\right)^2}>\frac{2S}{t}+a\sqrt{1+\left(\frac{x}{t}\right)^2}.$$

Ce qui est évident puisque les deus membres de l'inégalité décroissent constament quand t croît et qu'on a à la limite, pour $t=\infty$, $b+c>a$.

Les deus théorèmes précédents montrent que je peus admettre, en opérant *la transformation continue* en D, que le tétraèdre est tel que, avant le passage à l'infini de D, les trois sfères inscrites dans les combles, le sont certainement dans les combles BC, CA, AB. On a donc dans notre ipotèse:

$$\frac{3V}{r}=F_a+F_b+F_c+F_d,\qquad \frac{3V}{r'_a}=F_b+F_c-F_a-F_a,$$

$$\frac{3V}{r_a}=F_b+F_c+F_d-F_a,\qquad \frac{3V}{r'_b}=F_c+F_a-F_d-F_b,$$

$$\frac{3V}{r_b}=F_c+F_d+F_a-F_b,\qquad \frac{3V}{r'_c}=F_a+F_b-F_c-F_d.$$

$$\frac{3V}{r_c}=F_d+F_a+F_b-F_c,$$

$$\frac{3V}{r_d}=F_a+F_b+F_c-F_d,$$

Les cinq premières formules sont évidement générales, mais nous pouvons dire que les 3 dernières le sont aussi, c'est-à-dire ont lieu indépendament de notre précédente ipotèse sur la position de o'_a, o'_b, o'_c dans les combles BC, CA, AB; il sufit pour cela de regarder r'_a, r'_b, r'_c come positifs si o'_a, o'_b, o'_c sont dans les combles BC, CA, AB et comme négatifs s' ils sont dans les combles DA, DB, DC, les valeurs de ces rayons changeant alors de signe en passant par l'infini.

Les valeurs de r, r_a, r_b, r_c, r'_a, r'_b, r'_c tirées de ces équations permètent de voir que par la *transformation continue en D* ces rayons se changent respectivement en r_d, r'_a, r'_b, r'_c, r, r_a, r_b, r_c.

On établirait de même la *transformation continue* en A, en B et en C; seulement il y a une remarque essentièle à faire. Dans la marche suivie pour établir la *transformation continue* en D nous avons suposé les points o'_a, o'_b, o'_c dans les combles BC, CA, AB; pour établir la transformation continue en A par exemple, ils doivent être suposés dans les combles BC, BD, CD, c'est-à-dire que nous apèlerons r'_a, $-r'_b$, $-r'_c$ ce que nous avons apelé r'_a, r'_b, r'_c pour établir la transformation continue en D.

Exemples. — 1. La formule suivante qui, avec nos notations, est cèle que Catalan a donée dans les Nouvelles Annales 1847 p. 255

$$2\left(\frac{1}{r_b'}+\frac{1}{r_c'}-\frac{1}{r_a'}\right)=\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}+\frac{1}{r_d}-\frac{3}{r_a}$$

et les trois autres analogues, donent par transformation continue en D

$$2\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}-\frac{1}{r_a}\right)=\frac{1}{r_b'}+\frac{1}{r_c'}+\frac{1}{r}-\frac{3}{r_a'},$$

$$2\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_c}-\frac{1}{r_b}\right)=\frac{1}{r_c'}+\frac{1}{r}+\frac{1}{r_a'}-\frac{3}{r_b'},$$

$$2\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}-\frac{1}{r_c}\right)=\frac{1}{r}+\frac{1}{r_a'}+\frac{1}{r_b'}-\frac{3}{r_c'},$$

$$2\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)=\frac{3}{r}-\frac{1}{r_a'}-\frac{1}{r_b'}-\frac{1}{r_c'}.$$

2. Si l'on apèle a_1, b_1, c_1, d_1 les intersections de Ao, Bo, Co, Do avec les faces oposées à A, B, C, D; a_2, b_2, c_2, d_2 les points de contact de la sfère inscrite avec les faces F_a, F_b, F_c, F_d; V_1, V_2 les volumes des tétraèdres $a_1b_1c_1d_1$, $a_2b_2c_2d_2$ on a[1])

$$V_1=\frac{3V\cdot F_aF_bF_cF_d}{(F_a+F_b+F_c)(F_d+F_b+F_c)(F_a+F_d+F_c)(F_a+F_b+F_d)},$$

$$V_2=\frac{9r^2V^3}{4F_a\cdot F_b\cdot F_c\cdot F_d}.$$

La transformation continue en D apliquée à ces deus formules done, sans qu'il soit besoin de s'arêter à définir V_{1d}, V_{2d}:

$$V_{1d}=\frac{3V\cdot F_aF_bF_cF_d}{(F_a+F_b+F_c)(F_b+F_c-F_d)(F_c+F_a-F_d)(F_a+F_b-F_d)},$$

$$V_{2d}=\frac{9r_d^2V^3}{4F_aF_bF_cF_d}.$$

On aurait de même, par *transformation continue* en A, V_{1a}, V_{2a} etc.

Nous pouvons aussi apliquer la *transformation continue* à trouver les volumes analogues des tétraèdres corespondants aux sfères des combles. Soient par exemple pour la sfère inscrite dans l'un des combles BC ou AD $V_{1a'}$, $V_{2a'}$ les volumes corespondants à V_1, V_2, on a

$$V_{1a}=\frac{3V\cdot F_aF_bF_cF_d}{(F_b+F_c+F_d)(F_b+F_c-F_a)(F_b+F_d-F_a)(F_c+F_d-F_a)},$$

$$V_{2a}=\frac{9r_a^2V^3}{4F_aF_bF_cF_d}.$$

1) Voir Ernest Genty N. A. 1880 p. 527 et 1881 p. 342.

Par *transformation continue* en D nous obtiendrons

$$V_{1a'} = \frac{3V \cdot F_a F_b F_c F_d}{(F_b + F_c - F_d)(F_b + F_c - F_a)(F_a + F_d - F_b)(F_a + F_d - F_c)}$$

$$V_{2a'} = \frac{9 r_a'^2 V^3}{4 F_a F_b F_c F_d}.$$

Ce sont de nouveaus téorèmes qu'il ne serait pas aussi simple de démontrer par une autre voie et dont l'énoncé d'ailleurs eût été dificilement deviné.

Voici un tableau des principaux éléments de tétraèdres *transformés en D, en A, en B* et *en C*. (Voir p. 255.)

Dans les quatre transformations V et R deviènent $-V$ et $-R$; α, β, γ deviènent $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$, $\pi - \gamma$, enfin l, m, n ne changent pas.

Dans la transformation continue apliquée au triangle les exemples donés montrent que les expressions analytiques se transforment et qu'à un point M peuvent corespondre trois transformés continus M_a, M_b, M_c. Pour la transformation continue apliquée au tétraèdre nous alons entrer dans quelques détails.

Si x, y, z, t sont les coordonées normales absolues d'un point M, on a $3V = xF_a + yF_b + zF_c + tF_d$; suposons que f, φ, ψ, θ soient les fonctions des éléments du tétraèdre qui donent x, y, z, t et apelons f_a, φ_a, ψ_a, θ_a ce que deviènent f, φ, ψ, θ quand on leur aplique la *transformation continue* en D. Si l'on *transforme continuement* en D l'équation précédente, èle devient

$$-3V = -f_d F_a - \varphi_d F_b - \psi_d F_c + \theta_d F_d,$$

d'où l'on conclut qu'il y a un point M_d dont les coordonées normales tétraèdriques absolues sont f_d, φ_d, ψ_d, $-\theta_d$, c'est le *transformé* en D de M. Il y a aussi le *transformé* M_a en A dont les coordonées sont $-f_a$, φ_a, ψ_a, θ_a, le *transformé* en B et le *transformé* en C. J'apèle M_a, M_b, M_c, M_d les transformés continus de M de *première espèce*.

Je peus conclure de ce qui précède que si une propriété géométrique est exprimée en coordonées tétraèdriques normales par l'équation $\Phi(x, y, z, t, P, Q, R\ ..)$ et que je désigne par P_d, Q_d, R_d .. ce que deviènent P, Q, R par *transformation continue* en D, l'équation $\Phi(x, y, z, -t, P_d, Q_d, R_d \ldots) = 0$ représentera la propriété primitive *transformée* en D.

J'ai apelé M_a, M_b, M_c, M_d *transformés continus* de 1ière espèce du point M, ils corespondent aus *trois transformés continus* qui peuvent exister pour un point du triangle, mais, dans le tétraèdre, il peut y en avoir d'autres. En éfet, reprenons l'équation

$$2V = f_d F_a + \varphi_d F_b + \psi_d F_c + \theta_d F_d$$

Eléments de tétraèdre	Transformés en D	Transformés en A	Transformés en B	Transformés en C
a, b, c, a', b', c'	$a, b, c, -a', -b', -c'$	$a, -b, -c, -a', b', c'$	$-a, b, -c, a', -b', c'$	$-a, -b, c, a', b', -c'$
F_a, F_b, F_c, F_d	$-F_a, -F_b, -F_c, F_d$	$F_a, -F_b, -F_c, -F_d$	$-F_a, F_b, -F_c, -F_d$	$-F_a, -F_b, F_c, -F_d$
D_a, D_b, D_c	$-D_a, -D_b, -D_c$	$D_a, \pi-D_b, \pi-D_c$	$\pi-D_a, D_b, \pi-D_c$	$\pi-D_a, \pi-D_b, D_c$
A_d, A_c, A_b	$A_d, \pi-A_c, \pi-A_b$	$-A_d, -A_c, -A_b$	$\pi-A_d, \pi-A_c, A_b$	$\pi-A_d, A_c, \pi-A_b$
B_d, B_c, B_a	$B_d, \pi-B_c, \pi-B_a$	$\pi-B_d, \pi-B_c, B_a$	$-B_d, -B_c, -B_a$	$\pi-B_d, B_c, \pi-B_a$
C_d, C_a, C_b	$C_d, \pi-C_a, \pi-C_b$	$\pi-C_d, C_c, \pi-C_b$	$\pi-C_d, \pi-C_a, C_b$	$-C_d, -C_a, -C_b$
$\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{a}', \hat{b}', \hat{c}'$	$\pi-\hat{a}, \pi-\hat{b}, \pi-\hat{c}, a', b', c'$	$\pi-\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{a}', \pi-\hat{b}', \pi-\hat{c}'$	$\hat{a}, \pi-\hat{b}, \hat{c}, \pi-\hat{a}', \hat{b}', \pi-\hat{c}'$	$\hat{a}, \hat{b}, \pi-\hat{c}, \pi-\hat{a}', \pi-\hat{b}', \hat{c}'$
h_a, h_b, h_c, h_d	$h_a, h_b, h_c, -h_d$	$-h_a, h_b, h_c, h_d$	$h_a, -h_b, h_c, h_d$	$h_a, h_b, -h_c, h_d$
$\widehat{a'F_d}, \widehat{a'F_a}, \widehat{aF_b}, \widehat{aF_c}$	$\pi-\widehat{a'F_d}, -\widehat{a'F_a}, \widehat{aF_b}, \widehat{aF_c}$	$-\widehat{a'F_d}, \pi-\widehat{a'F_a}, \widehat{aF_b}, \widehat{aF_c}$	$\widehat{a'F_d}, \widehat{a'F_a}, \pi-\widehat{aF_b}, -\widehat{aF_c}$	$\widehat{a'F_d}, \widehat{a'F_a}, -\widehat{aF_b}, \pi-\widehat{aF_c}$
$\widehat{b'F_d}, \widehat{bF_a}, \widehat{b'F_b}, \widehat{bF_c}$	$\pi-\widehat{b'F_d}, \widehat{bF_a}, -\widehat{b'F_b}, \widehat{bF_c}$	$\widehat{b'F_d}, \pi-\widehat{bF_a}, \widehat{b'F_b}, -\widehat{bF_c}$	$-\widehat{b'F_d}, \widehat{bF_a}, \pi-\widehat{b'F_b}, \widehat{bF_c}$	$\widehat{b'F_d}, -\widehat{bF_a}, \widehat{b'F_b}, \pi-\widehat{bF_c}$
$\widehat{c'F_d}, \widehat{cF_a}, \widehat{cF_b}, \widehat{c'F_c}$	$\pi-\widehat{c'F_d}, \widehat{cF_a}, \widehat{cF_b}, -\widehat{c'F_c}$	$\widehat{c'F_d}, \pi-\widehat{cF_a}, -\widehat{cF_b}, \widehat{c'F_c}$	$\widehat{c'F_d}, -\widehat{cF_a}, \pi-\widehat{cF_b}, \widehat{c'F_c}$	$-\widehat{c'F_d}, \widehat{cF_a}, \widehat{cF_b}, \pi-\widehat{c'F_c}$
r, r_a, r_b, r_c, r_d	r_d, r'_a, r'_b, r'_c, r	$r_a, r, -r'_c, -r'_b, r'_a$	$r_b, -r'_c, r, -r'_a, r'_b$	$r_c, -r'_b, -r'_a, r, r'_c$.
r'_a, r'_b, r'_c	r_a, r_b, r_c	$r_d, -r_c, -r_b$	$-r_c, r_d, -r_a$	$-r_b, -r_a, r_d$

et opérons sur èle la *transformation continue* en A; nous aurons

$$-3V = f_{da}F_a - \varphi_{da}F_b - \psi_{da}F_c + \theta_{da}F_d.$$

Ce qui montre qu'il y a un point M_1 dont les coordonées absolues sont $-f_{da}, +\varphi_{da}, +\psi_{da}, -\theta_{da}$; il y a de même les points M_2, M_3 dont les coordonées sont $f_{db}, -\varphi_{db}, +\psi_{db}, +\theta_{db}$; $f_{dc}, \varphi_{dc}, -\psi_{dc}, +\theta_{dc}$ obtenus en *transformant* en B et en C la même équation. Si l'on *transformait* en D, B, C l'équation

$$3V = -f_aF_a + \varphi_aF_b + \psi_aF_c + \theta_aF_d$$

etc., on retomberait sur M_1, M_2, M_3. Ce sont ces trois points que nous apelons transformés continus de M de *seconde espèce.*

A un point M, à une propriété donée peuvent donc corespondre 7 points ou 7 propriétés par *transformation continue.* Ainsi au point o de coordonées r, r, r, r corespondent les 4 centres des sfères ex-inscrites de première espèce o_a, o_b, o_c, o_d et les 3 centres o_a', o_b', o_c' des sfères de seconde espèce inscrites dans les combles.

Paris, le 17 septembre 1901.

Mémoire à consulter: Association française pour l'Avancement des Sciences. Congrès de Besançon 1893.

Neue Lehrsätze über die Wurzeln algebraischer Gleichungen.

Von C. Isenkrahe in Trier.

Zu jeder ganzen rationalen Funktion einer komplexen Variabeln läfst sich eine gewisse komplexe Konstante angeben, die ihr in eigentümlicher Weise angehört und eine sehr merkwürdige Eigenschaft besitzt. Die Art dieser Angehörigkeit kann veranschaulicht werden mit Hülfe der bekannten, von Möbius in seinem „barycentrischen Calcul" zu Grunde gelegten Vorstellung.

Sei die erwähnte Funktion mit $f(x)$ bezeichnet, so hat die Gleichung $f(x) = 0$ eine endliche Anzahl von Wurzeln, die Funktion $f(x)$ in der Zahlenebene eine endliche Anzahl von Verschwindungspunkten. Diese denken wir uns, jeden an seinem Ort, als gleich schwere Massenpunkte, dann besitzt das System einen Schwerpunkt, und eben dieser Schwerpunkt kennzeichnet durch seine Lage die vorhin erwähnte komplexe Konstante, die als eine der Funktion $f(x)$ eigentümlich zugehörige Gröfse betrachtet werden kann. In diesem Sinne bezeichne ich sie mit dem Namen *„Schwerpunkt der Funktion $f(x)$"* oder auch *„Schwerpunkt der Gleichung $f(x) = 0$."*

Dieser Schwerpunkt nun haftet der Funktion an mit einer merkwürdigen Beharrlichkeit, welche sich ausspricht in dem Satze:

Der Schwerpunkt einer ganzen rationalen Funktion bleibt unverändert, mag man dieselbe beliebig oft differentiieren, oder unter freier Wahl der Integrationskonstanten integrieren, oder auch iterieren.

Um diesen Satz zu beweisen, setzen wir:

$$f(x) = x^n + (p_1 + q_1 i)x^{n-1} + (p_2 + q_2 i)x^{n-2} + \cdots + p_n + q_n i$$

und bezeichnen die n Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ mit $\alpha_1 + \beta_1 i$,

$\alpha_2 + \beta_2 i, \cdots, \alpha_n + \beta_n i$. Nun folgt aus den Beziehungen zwischen den Koeffizienten und den Wurzeln einer Gleichung, dafs

$$p_1 + q_1 i = -(\alpha_1 + \beta_1 i + \alpha_2 + \beta_2 i + \cdots + \alpha_n + \beta_n i),$$

also

$$-p_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n; \quad -q_1 = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n.$$

Mithin hat der Schwerpunkt aller Wurzeln die Koordinaten $-\frac{1}{n}\cdot p_1$ und $-\frac{1}{n}\cdot q_1$.

Bezeichnet man den Koeffizienten $p_1 + q_1 i$ kurz mit a_1, so hat der Schwerpunkt der Gleichung in der Zahlenebene den Platz $-\frac{1}{n}\cdot a_1$. Diese Eigenschaft läfst sich so aussprechen:

Hilfssatz. *Wenn man den Koeffizienten des zweithöchsten Gliedes einer Gleichung durch die Gradzahl derselben dividiert, den durch diesen Quotienten bezeichneten Punkt der Zahlenebene mit dem Nullpunkt verbindet und die erhaltene Strecke über den Nullpunkt hinaus um sich selbst verlängert, so trifft man auf den Schwerpunkt der Gleichung.* Oder kürzer: *Der Schwerpunkt einer Gleichung nten Grades äquilibriert den nten Teil vom Koeffizienten des zweithöchsten Gliedes auf die Null.*

Wenn das höchste Glied der Funktion $f(x)$ noch mit dem Faktor a_0 behaftet ist, so mufs statt des obigen Ausdrucks $-\frac{1}{n}\cdot a_1$ offenbar $-\frac{1}{n}\cdot\frac{a_1}{a_0}$ gesetzt werden.

Nach Ableitung des vorstehenden Hülfssatzes beweist sich der in Rede stehende Satz sehr einfach. Es sei allgemein:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0,$$

mithin die Lage des Schwerpunktes $-\frac{1}{n}\cdot\frac{a_1}{a_0}$, dann liefert die Differentiation:

$$n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + (n-2) a_2 x^{n-3} + \cdots + a_{n-1} = 0,$$

woraus sich wiederum die Lage des Schwerpunktes bestimmt auf $-\frac{(n-1)a_1}{n(n-1)a_0} = -\frac{1}{n}\frac{a_1}{a_0}$. Er ist also nicht verändert worden.

Ebensowenig wie die erste, kann eine folgende Differentiation die Lage des Schwerpunktes verschieben. Das Gleiche gilt offenbar von der Integration, und die Integrationskonstante kann dabei keine Rolle spielen, weil sie — auch wenn die Integration mit einer Funktion ersten Grades beginnt — niemals Koeffizient des höchsten oder zweithöchsten Gliedes werden kann.

Nun bleibt noch die Iteration zu behandeln. Sei wiederum

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

so erhält man durch Iteration:

$$f(f(x)) =$$
$$a_0(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n)^n + a_1(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n)^{n-1} + \cdots + a_n.$$

Bei der Entwickelung dieser Reihe brauchen wir uns bloſs zu kümmern um diejenigen beiden Glieder, welche die höchsten Potenzen von x, also $x^{(n^2)}$ und x^{n^2-1} enthalten. Demnach genügt es zu schreiben:

$$f(f(x)) = a_0(a_0^n x^{(n^2)} + n a_0^{n-1} a_1 x^{n^2-1} + \cdots) + \cdots + a_n$$
$$= a_0^{n+1} x^{(n^2)} + n a_0^n a_1 x^{n^2-1} + \cdots + a_n.$$

Setzen wir diese Funktion gleich Null, dividieren durch den Koeffizienten des ersten Gliedes und beachten, daſs jetzt n^2 den Grad der Gleichung bezeichnet, so ergiebt sich für die Lage des Schwerpunktes die Gröſse:

$$-\frac{n a_0^n a_1}{n^2 a_0^{n+1}} = -\frac{1}{n} \cdot \frac{a_1}{a_0}.$$

Er ist also auch durch die Iteration nicht von der Stelle gerückt worden; zu beachten ist aber noch ein besonderer Einzelfall. Findet nämlich das Iterationsverfahren nicht auf die Gleichung $f(x) = 0$ Anwendung, sondern, was öfter vorkommt, auf die Gleichung $x = f(x)$ und ist dabei $f(x)$ vom zweiten Grade, also etwa gleich $a_0x^2 + a_1x + a_2$, so hat die Gleichung $x = f(x)$ nach dem obigen Hilfssatz den Schwerpunkt $-\frac{a_1 - 1}{2a_0}$. Die erste Iteration liefert das Ergebnis:

$$x = f(f(x)) = a_0(a_0^2x^4 + 2a_0a_1x^3 + \cdots) + a_2 = a_0^3x^4 + 2a_0^2a_1x^3 + \cdots + a_2,$$

also:

$$a_0^3x^4 + 2a_0^2a_1x^3 + \cdots - x + a_2 = 0.$$

Demnach ist jetzt die Lage des Schwerpunktes bezeichnet durch die Gröſse:

$$-\frac{2a_0^2a_1}{4a_0^3} = -\frac{a_1}{2a_0}.$$

Er ist also verschoben, kann aber durch keine folgende Iteration noch weiter verschoben werden. Denn bei der Gleichungsform $x = f(x)$ hat die vor dem Gleichheitszeichen stehende Gröſse x nur dann einen Einfluſs auf die Lage des Schwerpunktes, wenn sie einen Einfluſs auf den Koeffizienten des zweithöchsten Gliedes hat, also wenn $f(x)$ quadratisch und noch nicht iteriert ist. —

Zum Schlusse füge ich noch einen weiteren Satz bei, dessen Beweis sich aus dem Hilfssatz sofort ergiebt. Wenn aus einer Gleichung $n$ten Grades durch passende Einführung einer neuen Unbekannten das Glied mit der $(n-1)$ten Potenz dieser Unbekannten entfernt ist, so pflegt man die Gleichung eine „reduzierte" zu nennen, und von dieser gilt der Satz:

Wird irgend eine gegebene Gleichung reduziert, so erleiden die beiden Achsen in der Zahlenebene dadurch eine solche Parallelverschiebung, dafs der Schwerpunkt der Gleichung auf die Null zu liegen kommt.

Trier, den 26. April 1901.

Die Gesetze der schwarzen Strahlung und ihre Verwendung.

Von O. Lummer in Charlottenburg.

(Fortsetzung.)

3. *Experimentelle Verwirklichung der schwarzen Strahlung von —180° Cels. bis 2000° Cels. und darüber.* — Zur Verwirklichung des schwarzen Körpers bedienten wir uns für niedere Temperaturen doppelwandiger Gefäſse, deren Zwischenraum durch den Dampf siedenden Wassers, durch Eis, feste Kohlensäure, flüssige Luft etc. auf überall gleichmäſsiger Temperatur erhalten wurde.[1]) Das innere Gefäſs diente als Strahlungsraum und kommunizierte durch ein Rohr mit der äuſseren Luft. Auf diese Weise erhält man die schwarze Strahlung innerhalb der Temperaturen von 100° bis — 180° C.

Zur Erreichung höherer Temperaturen war man auf Salpeterbäder angewiesen, welche bei etwa 230° C beginnen und bestenfalls noch bei 700° C anwendbar sind. Darüber hinaus muſste man zum Chamotteofen greifen, der vermittelst Kohle- oder Gasfeuerung geheizt wird. Abgesehen davon, daſs man über eine Temperatur von 1400° C kaum hinauskommt, stellen sich bei dieser Art der Feuerung zwei wesentliche Schwierigkeiten ein.

Einmal ist es, wie erwähnt, selbst mit Hilfe eines doppelwandigen Chamotteofens unmöglich, im strahlenden Hohlkörper eine vollkommen gleichmäſsige Temperaturverteilung zu erreichen; ferner verursacht die intensive Gasfeuerung mancherlei Übelstände und bringt starke Temperaturschwankungen mit sich, die zumal bei Messungen im Spektrum sehr störend auf die empfindlichen bolometrischen wie galvanometrischen Meſsapparate einwirken.

Diese Übelstände sind beseitigt durch die Konstruktion des in Fig. 1 bis 3 abgebildeten „elektrisch geglühten“ schwarzen Körpers[2]), welcher

1) O. Lummer und E. Pringsheim: „Die Strahlung eines schwarzen Körpers zwischen 100 und 1300° C.“ Wied. Ann. **63**, 395—410, 1897.

2) O. Lummer und F. Kurlbaum. Ann. d. Phys. (4) **5**, 829—836, 1901.

bereits bei Erörterung des Stefanschen Gesetzes erwähnt worden ist. Wie schon der Name andeuten soll, dient bei diesem schwarzen Körper der elektrische Strom als Heizquelle. Ein etwa 0,01 mm dickes Platinblech wird zu einem Cylindermantel von 4 cm Durchmesser und 40 cm Länge geformt, indem die Ränder des Bleches im Knallgasgebläse zusammengeschweifst werden. Damit die Stromlinien parallel der Cylinderachse verlaufen, sind an die Enden des Platincylinders ringsum dickere Platinbleche angeschweifst. An diese dickeren Rohransätze sind die Zuleitungsbleche *b* (Fig. 3) geschweifst, die zu den Klemmbacken (*a*) des Stativs führen, denen der elektrische Strom durch dicke Kabel zugeführt wird (Fig. 2).

In diesen Heizmantel aus dünnem Platinblech pafst eng anschliefsend das innere der beiden in Fig. 1 gezeichneten Rohre aus schwer schmelzbarer Masse, welches die schwarze Strahlung liefern soll.

Dieses von der Kgl. Porzellanmanufaktur in Charlottenburg hergestellte Rohr von 2 mm Wandstärke trägt fest eingebrannt in seiner

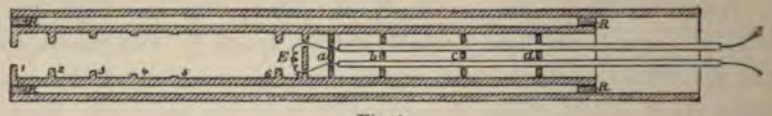


Fig. 1.

Mitte die Querwand 7 und die Diaphragmen 1 bis 6, welche den Strahlungsraum vor allzustarker Abkühlung durch die eindringende Luft schützen sollen. Die Querwand 7 hat zwei Löcher, durch welche die Drähte des Le Chatelierschen Thermoelementes eingeführt werden, dessen Lötstelle *E* sich im Strahlungsraum nahe der Querwand befindet. Die Diaphragmen *a*, *b*, *c* und *d* tragen Porzellanröhrchen, und diese enthalten die Drähte des Elementes.

Das Innere des Strahlungsrohres ist mittels einer Mischung aus Chrom-Nickel- und Kobaltoxyd geschwärzt, welche Schwärzung selbst Temperaturen über 1500° C Stand hält.

Der Platinheizmantel ist so viel länger als das Strahlungsrohr, dafs das hintere Ende flach zusammengedrückt, das vordere Ende aber konisch verjüngt werden kann, um noch gerade der aus dem vordersten engsten Diaphragma 1 austretenden Strahlung freien Durchgang zu gestatten (vgl. Fig. 1).

Zum Schutz gegen den Wärmeverlust durch Ausstrahlung ist über das Platinrohr an beiden Enden eng anliegend je ein Ring *R* (Fig. 1) geschoben und über diese Ringe wiederum ein passendes Rohr aus feuerfester Masse, sodafs zwischen beiden Rohren ein Luftraum ent-

steht. Zum weiteren Schutz ist dieses Überstülprohr noch mit Asbestpappe umgeben.

Die Lufthülle ist erforderlich, will man den Körper mit einem Strom von weniger als 100 Amp. Stärke auf die höchste zulässige Temperatur von 1520° C bringen. Oberhalb dieser Temperatur beginnt die verwandte schwer schmelzbare Porzellanmasse weich zu werden.

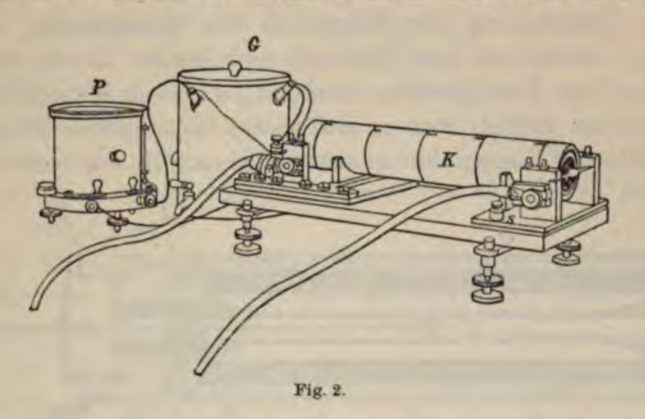


Fig. 2.

Auch fängt diese Masse dann an leitend zu werden, sodaſs das Thermoelement beim Wenden des Heizstromes einen Unterschied von etwa 25° erreicht.

Aus Figg. 2 und 3 ist die Montierung und Stromzuführung dieses schwarzen Körpers (K) ersichtlich. Die mit Stellschrauben versehene Schieferplatte trägt zwei Paar Klemmbacken aus Messing, deren Einrichtung aus der Fig. 2 genügend zu erkennen ist. Fig. 3 zeigt den montierten schwarzen Körper noch einmal, von vorn gesehen, sodaſs man in die strahlende Öffnung blickt.

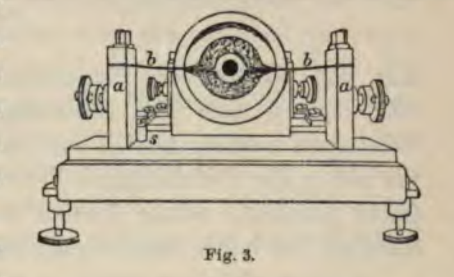


Fig. 3.

Die erreichte Temperaturgleichheit des die „schwarze" Strahlung liefernden Hohlraumes (5, 6, 7) ist eine überraschende. Zur Beurteilung der Temperaturverteilung bedient man sich mit Vorteil der *Helligkeitsverteilung* im Innern des strahlenden Hohlraumes.

Im gleichtemperierten Hohlraum müssen bekanntlich alle Helligkeitsunterschiede verschwinden. Da nun die Helligkeit rapid mit der Temperatur zunimmt (vgl. Arch. **1**, 81), so setzen sich die kleinsten Temperaturunterschiede in relativ groſse Helligkeitsdifferenzen um. Wenn also, wie bei diesem Strahlungskörper im stationären Zustande,

im strahlenden Hohlraum 5, 6, 7 weder die Blende 6 noch das Thermoelement E sich vom Hintergrund (Querwand) abheben, so ist der Schlufs berechtigt, dafs die aus diesem Hohlraum kommende Strahlung thatsächlich die *„schwarze“* Strahlung darstellt, und zwar von derjenigen Temperatur, welche das Thermoelement anzeigt.

Zur Festlegung der „strahlungstheoretischen“ Temperaturskala und zur Entscheidung der Frage, ob den Gesetzen der schwarzen Strahlung, welche wir zum Teil erst noch kennen lernen werden, die Bedeutung von Naturgesetzen zukommt, d. h. ob sie beliebig extrapoliert werden dürfen, war es erwünscht, die schwarze Strahlung bei möglichst hoher Temperatur zu verwirklichen. Es war von vornherein

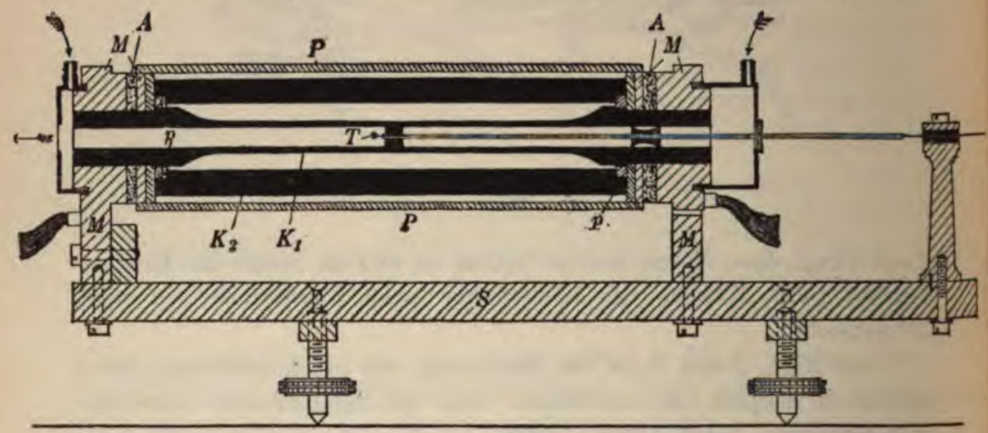


Fig. 4.

klar, dafs oberhalb des Platinschmelzpunktes (etwa 1750° C) *das Heizrohr zugleich auch zum Strahlungsrohr* gemacht werden mufste. Als Substanzen konnten hierbei nur die sogenannten „Leiter zweiter Klasse“, wie sie in der Nernstlampe Verwendung finden, und die Kohle in Betracht kommen, welche freilich die unangenehme Eigenschaft hat, in der Luft bei hoher Glut schnell zu verbrennen.

Aus verschiedenen Gründen erschien schliefslich die Kohle als das geeignetste Material zur Konstruktion hochtemperierter schwarzer Körper. Um die Verbrennung des elektrisch geheizten Kohlerohres zu verhindern, wird das Kohlerohr in einem möglichst dicht nach aufsen abgeschlossenen Luftraum geglüht. Aus der Fig. 4 ist die Konstruktion des neuen Kohlekörpers wohl ohne weiteres ersichtlich.

Obwohl der *innere* cylindrische Hohlraum des Strahlungsrohres mit der atmosphärischen Luft in Verbindung steht, gelingt es doch, ein kaum 1 mm dickes Kohlerohr genügend lange Zeit zu glühen, ohne

dafs die Wandstärke sich wesentlich ändert. Es ist dieser Umstand deswegen günstig, weil dickwandigere Rohre bei den uns zur Verfügung stehenden Stromstärken von 200 Amp. nicht auf die gewünschten hohen Temperaturen zu erhitzen wären.

Zur Erzielung einer möglichst konstanten Temperatur kommen auch hier nur Akkumulatorenströme in Betracht. Bisher haben wir mit diesem „Kohlekörper" eine Temperatur von etwa 2000° C erreicht und hoffen, durch Anwendung dünnwandigerer Kohlerohre noch bedeutend höher zu kommen. Die dünnwandige Strecke des Heizrohres, welche den Strahlungsraum umschliefst, ist durch Drehen auf der Drehbank aus dem dickwandigen Kohlerohre gewonnen worden. Die Pfeile zeigen den Gang des Stickstoffs an, mit dem das innere Kohlerohr durchspült werden kann.[1])

Mittelst des isoliert eingeführten Thermoelementes, dessen Lötstelle T sich kurz vor dem als Querwand dienenden Kohlepfropf befindet, ist die Temperatur bestenfalls bis zum Platinschmelzpunkt mefsbar. Will man die schwarze Strahlung höherer Temperatur untersuchen, so läfst man das Thermoelement ganz fort und benutzt die Strahlungsgesetze selbst, um aus ihnen die Temperatur zu erschliefsen.[2]) Wir kommen hierauf später ausführlich zurück.

4. *Versuch zur Demonstration der Kirchhoffschen Hohlraumtheorie* — Kirchhoff hat aus seinem Gesetz von der Absorption und Emission des Lichtes die Folgerung abgeleitet, dafs in einem *gleichtemperierten Hohlraum* erstens die individuellen Strahlungseigenschaften der verschiedensten Körper[3]) verschwinden, sodafs diese alle *gleichhell erscheinen*, und dafs ferner ihr Strahlungsvermögen gleich ist demjenigen des schwarzen Körpers von der Temperatur des Hohlraumes. Um diese Konsequenz auch einem gröfseren Kreise anschaulich zu machen, bediene ich mich der in Fig. 5 skizzierten Versuchsanordnung. In dem doppelwandigen Chamotteofen CD befindet sich der kleine Porzellantiegel pq, welcher durch die Heizspiralen EF bis auf helle Rotglut

1) Näheres siehe im Thätigkeitsbericht der Physik. Techn. Reichsanstalt im Jahre 1901, abgedruckt in ZS. f. Instrkde. 1902, S. 120 ff. Kürzlich ist es der Firma Gebr. Siemens & Co. in Charlottenburg gelungen, solche dünnwandige Kohlerohre unter Anwendung von 400 Atm. Druck direkt zu pressen. Auch hat sich gezeigt, dafs die Spülung mit Stickstoff fortgelassen werden kann.

2) O. Lummer und E. Pringsheim: Temperaturbestimmung mit Hilfe der Strahlungsgesetze. Physik. ZS. 3. Jahrg., Nr. 5, p. 97—100, 1901.

3) Ausgenommen sind die luminescierenden Substanzen, deren Strahlungsvermögen nicht eine blofse Funktion der Temperatur ist. Irrtümlicherweise dehnte Kirchhoff obigen Satz auch auf diese Substanzen aus (vgl. Arch. (3) **1**, 84).

erhitzt werden kann. Die Blenden *mm* und *uu* schützen den Tiegel ebenso wie der durchbrochene Deckel des Ofens nach Möglichkeit gegen den Wärmeverlust durch Ausstrahlung und gegen die Abkühlung infolge des Eindringens kalter Luft. Trotz der relativ primitiven Anordnung herrscht im Innern des Heizofens doch eine nahe gleichmäfsige Temperatur, sodafs wenigstens die untere Wand und der Boden des Tiegels gleichtemperiert sind, worauf es allein ankommt. Die im Chamotte eingebetteten Spiralen sind aus Nickeldraht gewickelt von nahe 1 Quadratmillimeter Querschnitt und haben eine Länge von etwa 8 Meter. Beginnt man mit einem Heizstrom von 10 Amp. und überläfst den „Glühtopf" sich selbst, so nimmt infolge steigender Temperatur der Widerstand der Heizspiralen zu und die Stromstärke ab, sodafs bei heller Rotglut sich eine Art stationärer Zustand ganz von selbst einstellt.

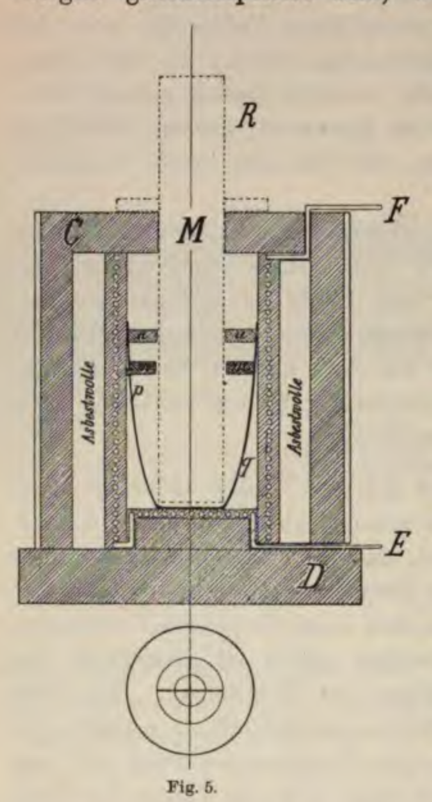


Fig. 5.

Um die Hohlraumtheorie Kirchhoffs zu demonstrieren, ziehe ich auf dem Boden des Tiegels im kalten Zustande mit Hilfe von Feder und Tinte Strichfiguren, etwa Kreise und Radien, wie es die Figur 5 andeutet. Wir wissen, dafs nicht zu dicke Tintenstriche, welche man auf ein blankes Platinblech gezogen hat, *hell auf dunklem Grunde* erscheinen, sobald man das Platinblech bis zum Selbstleuchten erhitzt (vgl. **2**, 167 des Arch.). Ebenso verhalten sich die auf unglasiertes Porzellan gezogenen Tintenstriche; auch sie heben sich in der Glühhitze als helle Schriftzüge auf dunklerem Grunde hervor. Es rührt dies daher, dafs das beim Verdampfen der Tinte zurückbleibende Eisenoxyduloxyd auch im Glühzustande wie bei Zimmertemperatur die Lichtwellen weniger gut reflektiert als Platin und Porzellan es thun, sodafs die Tintenstriche besser absorbieren und stärker emittieren. Anders ist die Erscheinung im gleichtemperierten Hohlraum. Hat sich ein stationärer Zustand eingestellt und man blickt durch die Öffnung *M* des Ofens in das Innere des Tiegels, so sieht man eine

gleichmäſsig helle Fläche, von den Tintenstrichen jedoch keine Spur! Es macht also den Anschein, als ob die beschriebenen und unbeschriebenen Stellen das gleiche Emissionsvermögen hätten, oder als ob das Eisenoxyduloxyd verdampft wäre (vgl. die Versuche von St. John, 2, 169 des Arch.). Beides ist nicht der Fall. Denn man braucht nur das Wärmegleichgewicht im Tiegel zu stören, um sich von der Existenz der Tintenstriche zu überzeugen. Führt man z. B. das dickwandige Metallrohr R (in Fig. 2 punktiert gezeichnet) in das Innere des Tiegels ein, bis daſs es fast den Boden berührt, so erscheinen auch die Tintenstriche wieder *hell auf dunklerem* Grunde, ganz wie bei einer freistrahlenden Fläche. Sobald man aber das Rohr wieder entfernt und einige Zeit wartet, bis der stationäre Zustand eingetreten ist, sind auch die Striche wieder verschwunden, und der Boden wie die Wände des Tiegels scheinen eine einzige helle Fläche zu bilden.

Daſs die Körper im Hohlraum ihre individuellen Unterschiede in Bezug auf Reflexion und Absorption nicht verlieren, ist jedenfalls sicher.

Ebenso sicher ist aber, daſs von den beschriebenen wie nichtbeschriebenen Stellen pro Flächeneinheit und Zeitelement die gleiche Energie zum Auge strömt. Dieser Effekt ist also nur dann möglich, wenn im gleichtemperierten Hohlraum jedem Körper soviel an „erborgter“ Strahlung zu seiner Eigenstrahlung gefügt wird, als er infolge seines Reflexionsvermögens weniger emittiert wie der schwarze Körper gleicher Temperatur (vgl. 2, 167 des Arch.). Sobald der Hohlraum genügend geschlossen und gleichtemperiert ist, herrscht in ihm die „schwarze“ Strahlung, und alle nichtschwarzen Körper werden durch Reflexion dieser Strahlung wenigstens im Effekt zu schwarzen Körpern gestempelt.

Den Einfluſs der „erborgten“ Strahlung durch Reflexion ersieht man recht deutlich auch aus folgendem Experiment. Läſst man das Metallrohr R längere Zeit im Ofen, so erscheinen nach dem Herausziehen des Rohres die Striche sogar *dunkel auf hellem Grunde!* Es findet diese Erscheinung ihre Erklärung nur, wenn man annimmt, daſs bei Anwesenheit des Rohres im Ofen die Wände desselben heiſser werden als der Boden; denn nur dann können die besser reflektierenden Flächen (die nichtbeschriebenen) durch erborgte Strahlung mehr gewinnen als die stärker strahlenden, aber schlechter reflektierenden Tintenstriche.

Es läſst sich nun leicht der Moment abpassen, daſs beim abwechselnden Hineinstecken und Herausziehen des Rohres die Tintenstriche abwechselnd hell auf dunklem oder dunkel auf hellem Grunde erscheinen, dazwischen aber vollkommen verschwinden. Um diese

„Umkehrung" der Striche auch objektiv zu demonstrieren, bringe ich oberhalb der strahlenden Öffnung M eine Konvexlinse von etwa 25 cm Brennweite an, welche auf einem 80 cm darüber befindlichen, schräg gestellten Schirm ein vergröfsertes Abbild des Tiegelbodens entwirft.

5. *Existenz des Maxwell-Bartolischen Ätherdruckes bei Strahlungsvorgängen.* — Durch die oben besprochenen Strahlungsversuche mit gleichtemperierten Hohlkugeln ist zum ersten Male mit Sicherheit dargethan worden, dafs die *„schwarze Strahlung"* das Stefan-Boltzmannsche Gesetz thatsächlich befolgt:

$$\int_0^\infty S_\lambda d\lambda = \text{const. } T^4 = \sigma T^4, \tag{1}$$

gemäfs welchem die Gesamtstrahlung proportional ist der *vierten* Potenz der absoluten Temperatur. Man kann dieses Gesetz als das Fundamentalgesetz der schwarzen Strahlung bezeichnen. Solange man strahlende Substanzen dem Experimente unterwarf, welche wie Platin und alle Metalloxyde in ihren Strahlungseigenschaften vom schwarzen Körper beträchtlich abweichen, konnte man daher unmöglich die Gültigkeit dieses Fundamentalgesetzes erweisen.

Nur vom *„grauen"* Körper durfte man erwarten, dafs er das Gesetz der schwarzen Strahlung befolgen würde. Wenn für diesen Körper auch das Emissionsvermögen (E_λ) kleiner ist als dasjenige (S_λ) des schwarzen Körpers, so ist laut Definition sein Absorptionsvermögen (A_λ) für alle Wellen eine Konstante. Der „graue" Körper absorbiert demnach relativ alle Strahlen im gleichen Prozentsatz. Ist aber für einen Körper $A_\lambda = \text{const.}$, so erhält man für ihn aus dem Kirchhoffschen Gesetze:

$$E_\lambda = A_\lambda S_\lambda \tag{2}$$

durch Integration:

$$\int_0^\infty E_\lambda d\lambda = \int_0^\infty A_\lambda S_\lambda d\lambda = A_\lambda \int_0^\infty S_\lambda d\lambda, \tag{3}$$

also bis auf den Wert der Konstanten thatsächlich das Stefan-Boltzmannsche Gesetz:

$$\int_0^\infty E_\lambda d\lambda = C T^4. \tag{4}$$

Ob es solche grauen Körper giebt? Bisher ist jedenfalls noch keiner dem Experimente zugänglich gemacht worden.

Alle anderen Strahlungskörper sind *selektiv*, d. h. sie reflektieren
ie Strahlen verschiedener Wellenlänge verschieden stark; für sie ist
so A_λ eine Funktion der Wellenlänge. Hieraus folgt notwendig, dafs
iese selektiven Körper dem Stefanschen Gesetze nicht gehorchen
önnen. Nur falls

$$A_\lambda = f(\lambda \cdot T)$$

äre, könnte gleichfalls das Stefansche Gesetz erfüllt sein. Diese
edingung erheischt aber, dafs sich das Absorptionsvermögen stark mit
er Temperatur ändert, was nicht der Fall ist.

Am selektivsten von allen festen, feuerbeständigen Substanzen
heint das *blanke Platin* zu sein, da bei ihm das Absorptionsvermögen
ir die verschiedenen Wellen um mehr als 500% variiert. Ein anderer
usdruck für die stark selektive Eigenschaft des blanken Platins ist
e Thatsache, dafs seine Gesamtstrahlung innerhalb weiter Grenzen
roportional zur *fünften* Potenz der absoluten Temperatur fortschreitet.
eim Eisenoxyd und bei ähnlichen nichtblanken Körpern liegt die Potenz
vischen 4 und 5; wir sehen also, dafs *nur der schwarze Körper die
erte Potenz befolgt, genau wie es von Boltzmann auf theoretischem
Vege vorhergesagt worden war.* Es dürfte daher nicht zu gewagt er-
heinen, wenn man aus der experimentellen Bestätigung der Boltz-
annschen Theorie umgekehrt auch auf die Gültigkeit der ihr zu
runde liegenden Hypothese vom Ätherdruck schliefst! Diese bisher
enig betonte Schlufsfolgerung war es gerade, welche laut persönlicher
itteilung Herrn Boltzmann lebhaft für unsere Gesamtstrahlungs-
ersuche mit dem schwarzen Körper interessierte und ihn einst selbst
im Experimente greifen liefs (vgl. 2, 166 des Arch.)

Der Boltzmannsche Beweis beruht, wie wir sahen, auf der An-
endung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie in
ezug auf Strahlungsvorgänge und auf der Folgerung aus der elektro-
agnetischen Lichttheorie, dafs ein Strahl auf die Flächeneinheit bei
nkrechter Incidenz einen *Druck* ausübt, welcher gleich ist der in der
olumeneinheit in Gestalt dieser Strahlung enthaltenen Energie.[1]) Schon
r Maxwell hatte übrigens Bartoli[2]) auf Grund thermodynamischer
etrachtungen gleichfalls die Existenz eines „Lichtdruckes" nach-
wiesen. Nach Boltzmann[3]) und Goldhammer ist der Druck bei

1) Cl. Maxwell: A treatise of electricity and magnetism Art 792. 1873.
utsche Übersetzung von B. Weinstein. Berlin 1883.

2) Bartoli: „Sopra i movimenti prodotti dalla luce e dal calore." Le
nnier 1876. Exners Repert. d. Phys.

3) L. Boltzmann. Wied. Ann. 22, 291—284. 1884.

vollkommener Reflexion doppelt so grofs wie der, welcher auf eine *vollkommen absorbierende* „schwarze“ Fläche ausgeübt wird. Dafs der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie auf die hier allein in Betracht kommende „Temperaturstrahlung“ anwendbar und auch für lange Wellen gültig ist, folgt zur Evidenz aus der Gültigkeit des Kirchhoffschen Gesetzes und der daraus gezogenen Schlüsse (Hohlraumtheorie etc.). Demnach sind die Resultate für die Gesamtstrahlung des schwarzen Körpers als ein eklatanter Beweis für die Existenz des Ätherdruckes nicht nur, sondern auch für die aus der elektromagnetischen Lichttheorie gefolgerte Gröfse dieses Druckes anzusehen.

Als Stütze für diese Schlufsfolgerung können die Versuche P. Lebedews[1]) angesehen werden. Schon Maxwell selbst hat den direkten experimentellen Nachweis für möglich hingestellt und verschiedene Experimentatoren haben sich bemüht, den Druck zu messen. Aber erst Lebedew ist es, wenn auch nach langen, vergeblichen Versuchen, gelungen, eine mechanische Strahlungswirkung nachzuweisen, welche die Existenz des Ätherdrucks sehr wahrscheinlich macht und auch der Gröfsenordnung nach mit der Maxwellschen Theorie übereinstimmt. Trotzdem möchte ich, bei aller Hochachtung vor der experimentellen Leistung Lebedews, vorläufig wenigstens die Beweiskraft der Strahlungsversuche höher anschlagen als diejenige der direkten Druckmessung.[2]) Wie dem aber auch sei, jedenfalls ist die Existenz des Ätherdruckes als soweit erwiesen zu betrachten, dafs man ihn bei der Erklärung von Phänomenen heranziehen darf, die bisher nur durch vage Hypothesen eine Lösung fanden. Dahin gehört die eigentümliche *Form der Kometenschweife,* deren Richtung von der Sonne fort man auf eine abstofsende Kraft elektrischen Ursprungs schob, ohne auch nur einen Anhaltspunkt über das Vorhandensein einer elektrischen Ladung der Kometenmasse zu haben. Sehr viel einfacher ist die Annahme einer abstofsenden Kraft, welche von der Sonne infolge ihrer Strahlung auf die äufserst fein verteilte Materie der Kometenschweife ausgeübt wird. Thatsächlich lehren die von Lebedew[3]), Arrhenius[4]) und in exakterer Weise von Schwarzschild[5]) angestellten Berechnungen, dafs der Maxwell-Bartolische Ätherdruck als Hauptursache bei der Bildung der eigentümlichen Formen der Kometenschweife anzusehen ist.

---

1) P. Lebedew. Ann. d. Physik Bd. VI, p. 433—458.

2) Vgl. auch M. Thiesen: Verbdlgn. d. Deutsch. phys. Ges. **3**, 177, 1901.

3) P. Lebedew. Wied. Ann. **45**, 292—297, 1892.

4) Svante Arrhenius. Physik. ZS. II. Jahrg. Heft 6 u. 7.

5) K. Schwarzschild. Sitzgsber. d. Münch. Akad. 1901, Heft III, p. 293—338.

6. *Massenanziehung (Gravitation) und Massenabstoſsung (Äther-uck):* — Durch die Existenz des Strahlungsdruckes, welchen die Massen folge ihrer Temperatur auf einander ausüben, kommt in die Betrach-ng der Naturvorgänge ein ganz neues Moment, insofern als der assen*anziehung* infolge der Newtonschen Schwerkraft eine Massen-*stoſsung* infolge der Temperaturstrahlung oder des Ätherdruckes ent-genwirkt.

Fällt eine ebene Welle senkrecht auf eine vollkommen schwarze bene, dann erleidet diese einen Druck in Richtung der Strahlen, der eich ist der in der Volumeneinheit enthaltenen Energie E des Wellen-ges. Eine vollkommen *schwarze* Kugel vom Radius ϱ fängt einen rahlenbüschel vom Querschnitt $\varrho^2\pi$ ab; auf sie wirkt also der Druck:

$$D = \varrho^2 \pi E. \quad)$$

Diesem Strahlungsdruck wirkt die Anziehungskraft infolge der hwere entgegen. Diese Kraft ist gleich der Masse der Kugel mal r Beschleunigung, welche sie infolge der Anziehung durch die rahlungsquelle erhält. Bezeichnen wir die Beschleunigung mit G und s spezifische Gewicht des Kugelmaterials mit s, so erhalten wir dem-ch für die Anziehungskraft:

$$S = \tfrac{4}{3} \varrho^3 \pi s G. \quad)$$

Falls wie bei der Einwirkung der Sonne auf die Planeten die ntfernung r beider groſs ist, wirken sowohl die Druckkraft wie die hwerkraft umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung. ieses Gesetz bleibt für die Schwerkraft erhalten, bis der Planet an e Sonnenoberfläche heranrückt; dagegen hört die Gültigkeit dieses setzes für die Druckkraft schon früher auf, da sich in der Sonnen-he die Energie nicht mehr auf konzentrischen Kugelschalen aus-eitet. Mit Ausnahme dieses Grenzfalles ist somit *die resultierende raft F unabhängig von der Entfernung, also eine für jeden Körper arakteristische Konstante.* Drücken wir die Resultierende aus in Bruch-ilen der Schwerkraft, so erhalten wir:

$$F = \frac{S - D}{S} = 1 - \frac{3E}{4\varrho s G}, \quad)$$

h. die zur Geltung kommende resultierende Kraft hängt bei ge-bener Strahlungsquelle nur ab von dem spezifischen Gewicht s und m Radius ϱ des bestrahlten Körpers.

Wir wollen die Gröſse der Resultierenden in Bezug auf die *Sonnen-ahlung* berechnen.

Ist S die gesamte Strahlungsmenge, welche die Sonnenstrahlen in der Richtung ihrer Fortpflanzung pro Zeiteinheit einer senkrecht dazu stehenden schwarzen Fläche zuführen und v die Lichtgeschwindigkeit, so wird die im Volumen*element* enthaltene Energie oder der Maxwellsche Ätherdruck:

$$E = \frac{S}{v}.$$

Die „*Solarkonstante*" betrage 3 gr Kalorieen pro Quadratcentimeter und Minute; also wird der Erdoberfläche in jeder Sekunde die Energiemenge:

$$S = \frac{3 \text{ gr cal}}{60 \text{ sec cm}^2} = 0{,}05 \frac{10^{10} \text{ erg}}{239 \text{ sec cm}^2}$$

zugeführt. Die Lichtgeschwindigkeit ist $v = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$; also erhalten wir für den Ätherdruck an der Erdoberfläche:

$$E = \frac{0{,}05 \cdot 10^{10} \text{ cm}^2 \text{ gr}}{239 \cdot 3 \cdot 10^{10} \text{sec}^2 \text{ cm}^3},$$

oder rund:

$$E = 0{,}7 \cdot 10^{-4} \frac{\text{gr}}{\text{cm sec}^2}. \tag{4}$$

Dividieren wir diese Gröfse durch die Fallbeschleunigung an der Erde $g = 980{,}6 \text{ cm/sec}^2$, so erhalten wir die Druckkraft in Grammgewichten ausgedrückt:

$$E = \frac{0{,}7 \cdot 10^{-4}}{980{,}6} = 0{,}7 \cdot 10^{-7} \frac{\text{gr Gew.}}{\text{cm}^2}. \tag{5}$$

Die Druckkraft D auf die schwarze Kugel vom Radius $\varrho = 1$ cm ist somit:

$$D = \varrho^2 \pi E = 2{,}2 \cdot 10^{-4} \text{ Dyne}.$$

Ehe wir zur numerischen Berechnung der auf die Kugel ausgeübten Anziehungskraft übergehen, wollen wir den Druck berechnen, den die Sonnenstrahlen auf die gesamte Erdoberfläche ausüben. Laut Gl. (5) ist der Druck pro *Quadratmeter* rund $^2/_3$ mg. Der Erdradius beträgt etwas über 6000 km (genau 6367 km); also fängt die Erde einen Strahlencylinder vom Querschnitt $\varrho^2 \pi = 36 \cdot 10^6 \cdot 10^6 \cdot \pi = 113 \cdot 10^{12}$ Quadratmeter ab. Der Druck auf die als schwarze Fläche gedachte Erdoberfläche wird demnach:

$$\tfrac{2}{3} \cdot 113 \cdot 10^{12} \text{ mg} = 75 \cdot 10^6 \text{ kg} = 7{,}5 \cdot 10^4 \text{ Tonnen}.$$

Dieser Druck wächst, wie erwähnt, umgekehrt proportional zum Quadrat der Entfernung. Da die Entfernung der Erde von der Sonne etwa 216 Sonnenradien beträgt, so würde der Druck der Sonnenstrahlen pro Flächeneinheit an der Oberfläche der Sonne rund $(216)^2 = 47\,000$ mal so grofs sein als an der Erdoberfläche, also etwa $3{,}5 \cdot 10^8$ Tonnen.

Was nun die *Anziehungskraft* infolge der Schwere betrifft, so ist auch diese zu berechnen, wenn wir die Beschleunigung G kennen, welche ein Körper durch die Schwerkraft der Sonne erhält. Aus der Bahngeschwindigkeit v der Erde und ihrer Entfernung r von der Sonne folgt die von der Sonne auf die Erde ausgeübte Normalkraft oder die Sonnenacceleration:

$$G = \frac{v^2}{r}.$$

Setzen wir $v = 3 \cdot 10^6 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ und die Entfernung $R = 15 \cdot 10^{12}$ cm, so wird demnach:

$$G = \frac{9 \cdot 10^{12}}{15 \cdot 10^{12}} = 0{,}6 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}. \tag{6}$$

In Bezug auf die Erde wird also die Anziehungskraft:

$$S = \tfrac{4}{3}\,\varrho^3 \pi s G = 6 \cdot 10^{27} \frac{\text{cm gr}}{\text{sec}^2} \text{ (Dyne)}$$

oder in Grammgewichten ausgedrückt rund:

$$S = 6 \cdot 10^{24} \text{ gr Gew.} = 6 \cdot 10^{18} \text{ Tonnen.}$$

Die Anziehung der Sonne auf die Erde infolge der Schwerkraft überwiegt also bedeutend die Abstofsung infolge des Strahlungsdruckes.

Um zu erfahren, wann beide Kräfte einander gleich werden, gehen wir auf die Gleichung (2) für die resultierende Kraft zurück. Mit Hilfe der Werte von E und G erhalten wir als Ausdruck für die Resultierende in Bezug auf einen Körper vom Radius ϱ cm und vom spezifischen Gewicht s den Wert:

$$F = 1 - \frac{3 \cdot 0{,}7 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 0{,}6\,\varrho s}$$

oder rund:

$$F = 1 - \frac{10^{-4}}{\varrho s}. \tag{7}$$

Hieraus folgt das interessante Resultat, dafs der Druck gleich der Schwerkraft wird, dafs sich also die Massenanziehung seitens der Sonne und die Abstofsung infolge der Sonnenstrahlung gerade aufheben, falls das Produkt $\varrho s = 10^{-4}$ ist. Setzen wir das spezifische Gewicht $s = 1$, so tritt dieser Fall bei einem Radius von $\varrho = 10^{-4}\,\text{cm} = 0{,}001\,\text{mm} = 1\,\mu$ ein. Frei im Raume vorhandene *Wassertröpfchen* würden also angezogen werden, frei schweben oder abgestofsen werden, je nachdem ihr Radius gröfser, kleiner oder gleich $1\,\mu$ wäre. Hiernach würden also gerade die Tröpfchen, deren Gröfse von der Ordnung der Wellenlänge ist, weder abgestofsen noch angezogen. Tröpfchen vom Radius

$^1/_{10}\,\mu$ bezw. $^1/_{100}\,\mu$ würden dagegen nach der dargelegten Theorie schon mit einer Kraft abgestofsen werden, welche die Schwerkraft der Sonne um das *Zehnfache* bezw. *Hundertfache* übertrifft.

Aus dieser Theorie sind von Lebedew[1]) und Arrhenius[2]) Schlüsse gezogen worden auf die Konstitution und Bildung der Kometenschweife. Ehe wir ihrem Gedankengange folgen, wollen wir die Bedingungen prüfen, unter denen die erhaltenen Resultate gültig sind.

Der in (7) für die resultierende Kraft F aufgestellte Ausdruck ist unter der stillschweigenden Voraussetzung gewonnen worden, dafs die beeinflufste Kugel vom Radius ϱ die ganze von ihrer Äquivalentfläche $\varrho^2\pi$ abgefangene Strahlungsenergie auch thatsächlich absorbiert, also weder Energie reflektiert noch *beugt*. Die erstere Bedingung ist erfüllt, falls die Kugel im Kirchhoffschen Sinne absolut *schwarz* ist; der zweiten Bedingung wird aber nur genügt, wenn die Dimension der Kugel grofs ist gegenüber der Länge der auffallenden Wellen. Nun wird $F = 0$ gemäfs der obigen Theorie nur für den Fall, dafs der Kugelradius etwa $1\,\mu$ beträgt, also von der Gröfsenordnung der Wellenlänge der maximalen Strahlungsenergie der Sonne ist. Bekanntlich liegt das Energiemaximum der Sonnenstrahlung nach den Versuchen Langleys im gelbgrünen Teil des Normalspektrums, für den auch unser Auge am empfindlichsten ist. Und soll die Abstofsung die Anziehung überwiegen ($F < 0$), dann mufs der Kugelradius sogar unter $1\,\mu$ herabsinken. Gerade bei so kleinen Kügelchen aber fängt der Einflufs der Beugung an sich bemerklich zu machen, und dieser wächst umsomehr, je kleiner der Kugelradius im Vergleich zur Wellenlänge wird. Da aber a priori klar ist, dafs bei genügender Kleinheit des beugenden Schirms die Lichtbewegung um denselben herumgeht, sodafs auch im „geometrischen Schatten“ Lichtenergie vorhanden ist, so hört jene einfache Theorie unter Vernachlässigung der Beugung gerade da auf gültig zu sein, wo sie anfängt bei ihrer Anwendung auf die Bildung der Kometenschweife interessant zu werden. Diese Theorie lehrt, dafs die Abstofsung mit abnehmender Gröfse des Kugelradius stetig wächst; aus den bekannten Erfahrungssätzen der Beugung kann man schliefsen, dafs dagegen bei *sehr kleinen* Kugelradien der Ätherdruck wieder verschwinden, die resultierende Kraft F also positiv werden und die Schwerkraft über den Strahlungsdruck wieder überwiegen mufs! Ein Urteil über die Gröfse der Tröpfchen, bei der die Abstofsung wieder

1) P. Lebedew. Rapports au Congrès Internat. de Phys. Paris, Gauthier-Villars, 1900.

2) a. a. O.

in die Anziehung übergeht, kann man aber nur durch eine genaue Theorie unter Berücksichtigung der Beugung gewinnen. Diese Theorie ist kürzlich von K. Schwarzschild[1]) gegeben worden.

Die Theorie von K. Schwarzschild: — Um einen *maximalen* Wert für die Druckkraft zu gewinnen, stellt Schwarzschild in der citierten Arbeit seine Berechnung an unter der Voraussetzung, dafs die beeinflufste Kugel eine absolut spiegelnde Oberfläche hat. Wie schon erwähnt, erfährt eine vollkommen spiegelnde Ebene bei senkrechter Incidenz einen *doppelt so grofsen* Druck wie eine vollkommen absorbierende, schwarze Ebene. Gleichwohl lehrt eine einfache Berechnung, dafs eine vollkommen spiegelnde Kugel vom Radius ϱ, welcher grofs im Vergleich zur Wellenlänge ist, genau denselben Druck erfährt ($\varrho^2\pi$) wie eine ebenso grofse schwarze Kugel. Nach Schwarzschild ist also der Druck auf eine spiegelnde Kugel vom Radius ϱ gleich $\varrho^2\pi E$, wenn E wieder die im Volumenelement enthaltene Energie ist.

In dem anderen Grenzfall, wo der Kugelradius ϱ *selbst gegen die Wellenlänge noch klein* ist, wird der Ätherdruck dagegen:

$$75\,\pi^5 \frac{\varrho^6}{\lambda^4} E. \tag{8}$$

Für den Grenzfall, dafs der Kugelradius sehr klein im Vergleich zur Wellenlänge wird, berechnet Schwarzschild auch die Intensität des diffus zerstreuten Lichtes und findet das von Lord Rayleigh[2]) für *durchsichtige* Körperchen abgeleitete Resultat, dafs diese Intensität umgekehrt proportional der *vierten* Potenz der Wellenlänge ist.

Am interessantesten sind die Resultate für Kugeln von der *Gröfsenordnung der Wellenlänge*, welche in der folgenden Tabelle wiedergegeben sind. In ihr bedeutet V das Verhältnis des wirksamen Ätherdruckes D zur auffallenden bezw. abgefangenen Energie $\pi\varrho^2 E$; aufserdem ist zur Abkürzung $p = \frac{2\pi\varrho}{\lambda}$ gesetzt worden. Es wird demnach das Verhältnis V gleich 1 für sehr grofse Kugeln, während es für sehr kleine Werte von ϱ laut Gl. (8) gleich $^{14}/_{3}\, p^4$ wird. Auch für diese Gröfse sind einige Werte berechnet, welche zeigen, dafs der Ausdruck (8) für alle Werte von $\varrho = 0$ bis $\varrho = \lambda/12$ noch ziemlich richtige Resultate liefert.

---

1) K. Schwarzschild: „Der Druck des Lichtes auf kleine Kugeln und die Arrheniussche Theorie der Kometenschweife.“ Münch. Akad. Ber. 1901, Heft III, p. 293—338.

2) Lord Rayleigh. Philos. Magazine 1871.

Tabelle.

$p = \frac{2\varrho\pi}{\lambda}$	$^1/_4$	$^1/_2$	$\sqrt{^1/_2}$	1	$\sqrt{2}$	2	4
$2\varrho/\lambda$	0,08	0,16	0,22	0,32	0,45	0,64	1,27
$V = \frac{D}{\varrho^2\pi E}$	0,018	0,35	1,07	2,42	2,16	1,31	1,22
$\frac{14}{3}p^4$	0,018	0,29	4,67				

Aus dieser Tabelle erkennt man aufserdem, dafs der aus der einfachen Theorie gefolgerte Druck $D = \varrho^2\pi E$ oder $V = 1$ mit einer Genauigkeit von 25% etwa bis herab zu Kugeln von $^3/_5$ Wellenlängen Radius richtige Werte liefert. Allgemein gilt daher: „Das Verhältnis V des wirksamen Druckes zur aufgefangenen Energiemenge $\varrho^2\pi E$ steigt von dem für grofse Kugeln giltigen Wert Eins langsam an, wenn man den Kugelradius verkleinert. Ist dieser bis auf etwa $^1/_3$ Wellenlänge gesunken, so erfolgt ein rapides Anwachsen von V, welches bei $^1/_6$ Wellenlänge Radius zu einem Maximum gleich 2,5 führt. Bei weiterer Verkleinerung von ϱ sinkt V noch rapider ab, als es vorher angestiegen ist. Für $\varrho = \lambda/10$ ist es bereits wieder unter die Einheit herabgesunken und nimmt alsbald verschwindende Werte an."

Mit Hilfe dieses Resultates und unter der Annahme, dafs die gesamte Sonnenstrahlung aus gelbgrünen Wellen besteht („Normalfall"), dafs das spezifische Gewicht der Kugelmaterie gleich 1 ist, und dafs die Solarkonstante 2,5 beträgt, zieht Schwarzschild folgenden wichtigen Schlufs auf das Verhältnis W der Druckkraft zur Schwerkraft: *Im Normalfall wird der Druck des Sonnenlichtes gleich der Schwerkraft, sobald der Kugelradius bis auf 1,25 λ oder 0,75 μ herabsinkt. Bei weiterer Verkleinerung der Kugel wächst der Druck über die Schwerkraft hinaus, bis er sie bei einem Kugelradius von 0,15 λ = 0,09 μ um das 18fache übertrifft. Von diesem Maximalwert sinkt der Druck schnell wieder und wird bereits für den Kugelradius 0,06 λ = 0,035 μ wieder der Schwerkraft gleich, um sich dann rasch der Null zu nähern.*

In Wirklichkeit besteht aber die Sonnenstrahlung aus Wellen *aller* Gröfsen. Unter Benutzung der Langleyschen Messungen über die Verteilung der Energie im Spektrum der Sonne erhält Schwarzschild das Resultat, dafs infolge dieser Energieverteilung der Maximalwert (18) des Verhältnisses W auf die Hälfte des für den Normalfall gültigen Wertes, also auf etwa 10 reduziert wird.

7. *Anwendung der Ätherdrucktheorie auf die Gestalt der Kometen.* — Auf Grund der vorgetragenen Theorie vom Ätherdruck arbeiten sich also stets die Massenanziehung infolge der Schwere und die Abstofsung infolge der Temperaturstrahlung entgegen, und die Resultierende beider Kräfte hängt bei genügender Entfernung beider Körper von einander lediglich ab von der Gröfse und dem spezifischen Gewicht der Körper. Denken wir uns also eine Strahlungsquelle, z. B. die Sonne, und aufser ihr in genügender Entfernung eine Kugel von gewisser Masse mit der Anfangsgeschwindigkeit Null gegeben, so wird diese Kugel zur Sonne in geradliniger Bahn angezogen werden, frei schweben bleiben oder von der Sonne in geradliniger Bahn abgestofsen werden, je nachdem die Resultierende zwischen der Schwerkraft und dem wirksamen Ätherdruck positiv, gleich Null oder negativ ist.

Hat aber die Kugel eine von Null verschiedene Anfangsgeschwindigkeit, so wird die Kugel in einem Kegelschnitt sich der Sonne nähern, in der anfänglichen Richtung geradlinig weiter eilen oder in einer Hyperbel von der Sonne sich entfernen, je nachdem die Schwerkraft gröfser, gleich oder kleiner als die Druckkraft der Sonne ist.

Die Planeten unseres Sonnensystems bewegen sich in Ellipsen um die Sonne, in deren einem Brennpunkte die Sonne steht. Die Resultierende beider wirksamen Kräfte ist hier also *positiv;* thatsächlich lehrt eine einfache Berechnung, dafs bei allen Körpern von der Gröfse der Planeten die Druckkraft gegenüber der Schwerkraft verschwindend klein ist. Ob der Ätherdruck mitwirkt oder nicht, kommt in diesem Falle praktisch auf dasselbe hinaus, und die aus den Bahnelementen unter Zugrundelegung des Newtonschen Gravitationsgesetzes berechneten Massen der Planeten dürften kaum geändert werden, wenn man aufser der Schwerkraft auch die Druckkraft der Strahlung berücksichtigte. Dies ist anders bei einem Körper von so geringer Masse, dafs gerade eben noch die Resultierende beider Kräfte positiv bleibt. Hier dürfte die Aufserachtlassung der abstofsenden Kraft und die alleinige Berücksichtigung der Newtonschen Schwerkraft zu *falschen* Resultaten in Bezug auf die Masse der bewegten Körper führen, eine Folgerung, welche meines Wissens noch nirgends hervorgehoben worden ist.

Wie grofs die Druckkraft gegenüber der Schwerkraft ist, läfst sich schlechterdings nicht sagen, wenn nicht aus anderweitigen Daten die Gröfse des bewegten Körpers und seine Dichte bekannt sind. Denn da beide Kräfte dem gleichen Entfernungsgesetz gehorchen, so behält ein Körper seine planetarische Bahn um die Sonne dauernd bei, die er einmal infolge seiner anfänglichen Geschwindigkeit und anfänglichen

Entfernung von der Sonne unter dem Einflufs der Resultierenden jener beiden Kräfte angenommen hatte, *wie klein auch die Resultierende sei.* Da die Resultierende aber erst bei Körpern von der Gröfsenordnung der Wellenlänge des wirksamen Lichtes Null wird, so konnte die bisherige Nichtberücksichtigung des Strahlungsdruckes keinen wesentlichen Schaden anrichten. Die Einführung des Strahlungsdruckes in die Astronomie hat also die günstige Folge, an den bisherigen astronomischen Erkenntnissen praktisch nichts zu ändern, während sie geeignet ist, bisher rätselhafte Erscheinungen aufzuklären und auf bekannte Vorgänge zurückzuführen.

Dahin gehören die eigentümlichen Erscheinungen, welche die Kometen darbieten. Um die merkwürdige Gestalt und Richtung der Kometenschweife zu erklären, mufste man eine *abstofsende* Kraft einführen, welche dem Gesetz von der Massenanziehung derartig widerspricht, dafs man sie *elektrischen Ladungen* zuschreiben zu müssen glaubte, ohne freilich für diese Annahme genügende Anhaltspunkte zu haben. Nach den Berechnungen von Bredichin[1]) mufs die abstofsende Kraft der Sonne die Schwerkraft um das 1,5- bis 18fache übertreffen, will man auch die gestrecktesten Kometenschweife erklären. Um die von der Sonne auf die Schweifmaterie ausgeübte Abstofsung mittelst der Ätherdrucktheorie zu erklären, braucht man nur anzunehmen, dafs die Kometenschweife aus lauter kleinen Körperchen oder Kügelchen bestehen. Da bei diesen das Verhältnis von Anziehung infolge der Schwere und von Abstofsung infolge der Sonnenstrahlung lediglich eine Funktion der Gröfse und des spezifischen Gewichts der Schweifmaterie ist, so wird die Resultierende für die verschieden grofsen Körperchen eine ganz verschiedene sein.

Denken wir uns einmal, es werde eine in elliptischer Bahn um die Sonne eilende Weltkugel durch irgendwelche Einflüsse kleiner und kleiner. Dann ändert sich infolge Abnahme der Resultierenden beider wirksamen Kräfte dauernd die Bahn, diese geht in andere und andere Ellipsen bzw. Kegelschnitte über, bis bei genügender Kleinheit die Kugel in tangentialer Richtung zur augenblicklichen Bahn forteilt, um bei noch kleinerer Gröfse in einer Hyperbel konvex zur Tangente von der Sonne abgestofsen zu werden. Diese nach einander folgenden Zustände werden *gleichzeitig* eintreten, wenn ein in elliptischer Bahn um die Sonne kreisender Körper plötzlich in Stücke der verschiedensten Gröfse zerfällt. Alle diejenigen Teile, welche genügend grofs sind, werden der

---

1) Bredichin: „Révision des valeurs numériques de la force répulsive. Leipzig, Vofs. 1885. Ann. de l'Observ. de Moscou 1886.

ursprünglichen Bahn folgen. Welches ist die Gröfse dieser Stücke? Nehmen wir an, unsere Astronomen könnten die Änderung einer Bahn aus ihren Zeitbestimmungen etc. merken, falls die Schwerkraft sich nur um $\frac{1}{10000}$ änderte, dann würden für die Astronomen alle diejenigen Teile der ursprünglichen Bahn folgen, deren Radius gröfser als 1 cm ist. Dabei ist das spezifische Gewicht gleich 1 gesetzt. Alle kleineren Stücke werden *andere* Bahnen einschlagen und zwar ebenfalls Ellipsen, bzw. Parabeln und Hyperbeln von immer gröfserer Excentrizität, je näher ihre Radien dem kritischen Wert liegen, für welchen die Resultierende $F = 0$ ist. *Es findet demnach eine Streuung statt.* Die Teilchen mit dem kritischen Radius eilen in tangentialer Richtung zur ursprünglichen Bahn fort und trennen diejenigen Körper, welche auch nach dem Zerfall der Zentralbewegung um die Sonne folgen, von denjenigen Teilchen, welche sich mit der Zeit dauernd von ihr entfernen. Zu den abgestofsenen Teilchen gehören alle diejenigen, für welche die Resultierende negativ ist, also nach der Schwarzschildschen Berechnung nur diejenigen Körperchen, deren Radien zwischen 1,25 λ und 0,15 λ gelegen sind, welche Strecke wir als „kritische Zone“ bezeichnen wollen. Bei den noch kleineren Teilchen soll wieder die Schwerkraft überwiegen, sodafs auch sie elliptische bzw. parabolische und hyperbolische Bahnen um die Sonne beschreiben müfsten.

Zerfällt also ein Planetoid in einen Haufen von Körperchen jeder Gröfse, dann wird sich im weiteren Verlauf ein Komet mit „Kopf“ und „Schweif“ bilden müssen. Alle Teilchen, deren Gröfse oberhalb und unterhalb der *kritischen Zone* gelegen ist, werden in den verschiedensten Kegelschnitten ihren Weg um die Sonne fortsetzen, und von ihnen werden nur diejenigen die ursprüngliche Bahn beibehalten, deren Radius gröfser als 1 cm ist. Diese bilden den „Kopf“ des Kometen. Alle Teilchen dagegen, deren Radien innerhalb der „kritischen Zone“ liegen, werden aus dem Verbande ausgestofsen und solange von der Sonne fortgetrieben, bis sie durch irgendwelche Umstände so klein geworden sind, dafs auch für sie wieder die Schwerkraft überwiegt. Dann verwandelt sich auch bei ihnen wieder die Abstofsung in eine Anziehung, und sie eilen in Kegelschnittkurven der Sonne zu.

Ob der Strahlungsdruck auch eine Rolle gespielt hat bei der Bildung der leuchtenden Nachtwolken, welche man nach dem Ausbruch des Krakatoa 1886 in enormen Höhen beobachten konnte? Auch sie sind jedenfalls von solch winzigen, an Staubkernen kondensierten Wassertröpfchen gebildet gewesen. Die herrlichen Dämmerungerscheinungen, welche durch die Krakatoastaubwolken in der Nähe unserer Erdoberfläche damals hervorgerufen wurden, lassen ebenfalls

auf die Kleinheit dieser Partikelchen von der Gröfse der Wellenlänge schliefsen.

Auch dürfte aus dieser Ätherdrucktheorie hervorgehen, dafs die Sonne zwar ihre kleinsten Partikelchen, z. B. kondensierte Dampf- und Gasteilchen, weit von sich fortzuschleudern vermag, dafs aber gleichwohl diese schliefslich wieder zu ihr zurückkehren werden, wenn sie eine gewisse Kleinheit überschritten haben. Nur diejenigen Körperchen, deren Gröfse innerhalb der „kritischen Zone“ liegen, und welche diese Gröfse beim Passieren der Sonnenatmosphäre auch beibehalten, werden dauernd abgestofsen und eilen in den unendlichen Weltenraum hinein.

Denken wir uns nun einen am Himmel auftretenden Kometen durch Zerfall eines Körpers entstanden, so wird er den oben geschilderten Prozefs von neuem durchmachen, sobald er der Sonne nahe genug kommt. Infolge der Sonnennähe wird notwendig durch die enorme Strahlung der Sonne ein Zerfall der Kometenteilchen eintreten, und es wird eine Streuung bezw. Schweifbildung in dem geschilderten Sinne stattfinden. Thatsächlich beobachtet man auch, dafs sich der Kometenschweif bei Annäherung an die Sonne oft ins Ungeheure verlängert, wobei gleichzeitig seine Helligkeit bedeutend zunimmt. So konnte der Komet von 1882 selbst am hellen Tage gesehen werden, bis sein Kopf in der Sonnenscheibe verschwunden war! Findet aber in der Sonnennähe ein derartiger Zerfall in Teilchen der verschiedensten Gröfse statt, dann ist auch eine notwendige Folge, dafs der Schweif von der Sonne *abgewendet* sein mufs. Je weiter sich der Komet von der Sonne entfernt, um so geringer wird die Einwirkung der Strahlung, bis überhaupt kein Zerfall mehr eintritt. Gleichzeitig weichen die Bahnen der verschiedenen Teilchen immer mehr von einander ab, und die Folge davon ist, dafs schliefslich nur noch die den Kopf bildenden gröfseren Stücke beisammen bleiben. Bei mehrfacher Wiederholung dieses Zerfallprozesses, denen die *periodisch* wiederkehrenden Kometen natürlicherweise unterworfen sind, mufs somit eine Auflösung des Kometen in einen Sternschnuppenring eintreten.

Es ist jetzt nur noch die Frage zu diskutieren, ob in den beobachteten Kometen Körperchen von der Dimension der Wellenlänge und darunter vorkommen. Diese Frage ist zu bejahen, da man allen Anlafs hat, anzunehmen, dafs der bewegliche oder gleichsam „flüchtige“ Teil der Kometen aus *Kohlenwasserstoffen* besteht, die sich in Form feinster Kügelchen an kosmischen Staubpartikelchen als Kondensationskerne niederschlagen. Durch Zersetzung der Kohlenwasserstoffe werden diese Kügelchen zumal in der Sonnennähe verdampfen und sich verkleinern; die ausgestofsenen Dämpfe der höher siedenden Kohlenwasser-

stoffe werden sich wieder kondensieren, eventuell reinen Kohlenstoff oder Rufs abscheiden, und so dürfte sich die Schweifbildung, die Schweifrichtung und die Schweifverlängerung bei Annäherung an die Sonne leicht erklären. Nur ein Widerspruch bliebe noch zu lösen. Während nämlich Bredichin aus der Form der gestrecktesten Kometenschweife auf eine Abstofsung schliefsen zu müssen glaubt, welche die Schwerkraft um das 18fache übertrifft, ergiebt die Schwarzschildsche Berechnung für das Verhältnis beider Kräfte bestenfalls die Zahl 10. Dabei ist aber zu bedenken, dafs das spezifische Gewicht der Kohlenwasserstoffe nur 0,8 beträgt, und dafs ferner die Solarkonstante nach Langley gleich 3, nach Ångström sogar gleich 4 zu setzen ist, während sie bei der Berechnung von Schwarzschild nur gleich 2,5 angenommen war. Auch dürfte die Sonnenstrahlung im freien Äther an Intensität diejenige in der Nähe der Erdoberfläche noch übertreffen. Aus alledem glaube auch ich, *dafs die Zurückführung der an den Kometen beobachteten Abstofsungskräfte auf den Druck der Sonnenstrahlung im Bereich der Möglichkeit liegt, und dafs die Kometentheorie von Lebedew und Arrhenius ernster Beachtung wert ist.* (Forts. folgt.)

Charlottenburg, im Juni 1902.

Rezensionen.

Jacques Hadamard. La série de Taylor et son prolongement analytique. Paris C. Naud 1901. VIII und 100 S. 8°.

Das Prinzip der analytischen Fortsetzung einer Potenzreihe mit gegebenen Koeffizienten war durch Weierstraſs und Méray zwar vollkommen definiert und in seiner grundlegenden Bedeutung für die Funktionenlehre seither allgemein anerkannt worden; im Grunde genommen ist man aber Jahrzehnte lang über jene *Definition* selbst nicht hinausgekommen: es fehlte durchaus an analytischen Hülfsmitteln, um dieselbe für die weitere Ausbildung der allgemeinen Funktionenlehre ausreichend nutzbar zu machen. Herrn Hadamard gebührt das Verdienst, durch seine 1892 publizierte Abhandlung: *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*[1]) dem fraglichen Probleme in äuſserst erfolgreicher Weise näher getreten zu sein und zu weiteren Untersuchungen in dieser Richtung angeregt zu haben. Er hat sich neuerdings der dankenswerten Mühe unterzogen, die inzwischen mächtig angewachsene Litteratur über den fraglichen Gegenstand zu sichten und die bisher gewonnenen Ergebnisse samt den Methoden, welche zu ihnen geführt haben, in übersichtlicher und anschaulicher Weise zusammenzufassen. Bei dem allgemeinen und aktuellen Interesse, welche diese H.sche Schrift zweifellos beanspruchen darf, mag die folgende, von einigen kritischen Bemerkungen (in Form von Fuſsnoten) begleitete, gedrängte Darstellung ihres wesentlichen Inhalts manchem Leser dieser Zeitschrift vielleicht nicht unwillkommen erscheinen.

I.[2]) Von dem Begriffe der *holomorphen* (nach Cauchys Terminologie: *synektischen*), d. h. wohldefinierten und im komplexen Sinne differenzierbaren Funktion $f(x)$ ausgehend, gelangt Herr H. vermittelst der Cauchyschen Darstellung von $f(x)$ durch ein Randintegral zur Taylorschen Reihe und hiermit zum Begriffe der *analytischen* Funktion im Weierstraſsschen Sinne.[3])

---

1) Journ. de math. (4) 8 (1892), p. 101—186.

2) Die Nummern I bis X des Textes entsprechen den zehn Kapiteln des H.schen Buches.

3) Unter den *Singularitäten*, deren eine *analytische Funktion* fähig ist, führt Herr H. auf S. 9 auch solche an, welche *in einem Flächenstücke überall dicht* liegen („*distribuées dans des aires singulières*“). Diese Ausdrucksweise scheint mir nicht korrekt: zum mindesten widerspricht sie der im allgemeinen acceptierten Weierstraſschen Definition der *singulären* Stellen einer analytischen Funktion als *Grenz*stellen des Stetigkeitsbereichs (Math. Werke II, p. 78). *Singuläre Flächenstücke* können daher sehr wohl für einen *arithmetischen Ausdruck*, *nicht* aber für eine *analytische Funktion* vorhanden sein: hier erscheinen lediglich die *Grenz*-

II. Wird sodann eine Taylorsche Reihe $\mathfrak{P}(x \mid \alpha) \equiv \sum a_m (x-\alpha)^m$ mit *endlichem Konvergenzkreise* C als *Funktionselement* zur Definition von $f(x)$ zu Grunde gelegt, so entsteht zunächst die Hauptfrage: Besitzt $f(x)$ überhaupt eine *analytische Fortsetzung* und, wenn dies der Fall ist, *wie* hat man eine Stelle β innerhalb C zu wählen, damit $\mathfrak{P}(x \mid \alpha, \beta)$ mit Sicherheit eine solche liefert? Da aber die Möglichkeit, mit Hülfe einer solchen *„abgeleiteten"* Reihe $\mathfrak{P}(x \mid \alpha, \beta)$ den Kreis C zu überschreiten, einzig und allein davon abhängt, ob $\mathfrak{P}(x \mid \alpha)$ in der Verlängerung der Linie $\overline{\alpha\beta}$ auf C eine *singuläre* Stelle besitzt, und andererseits die Berechnung und Diskussion von $f(x)$ mit Hülfe einer Reihe von der Form $\mathfrak{P}(x \mid \alpha, \beta)$, zumal bei weiterer Fortsetzung des fraglichen Verfahrens, auf unüberwindliche Komplikationen führt, so resultieren aus der obigen Frage sofort die folgenden zwei:

1) Wie bestimmt man aus dem Bildungsgesetze, genauer gesagt, aus gewissen *Grenzeigenschaften* der Koeffizienten a_m die auf C gelegenen und eventuell auch die sonstigen *singulären* Stellen von $f(x)$?

2) Welche analytischen Hülfsmittel stehen *aufser* dem angedeuteten *„Ableitungsprozesse"* zur Verfügung, um $f(x)$ *aufserhalb* C zu definieren bezw. zu berechnen?

Die Beantwortung der Frage 1), welche naturgemäfs derjenigen von 2) voranzugehen hat, bietet aufserordentliche Schwierigkeiten, wenn man bezüglich der Auswahl der a_m vollste Allgemeinheit walten läfst. Andererseits gewinnt man nur Resultate verhältnismäfsig speziellen Charakters, wenn man die a_m in der Weise einschränkt, dafs nur besondere, relativ einfache Singularitäten auf C zum Vorschein kommen. Ein befriedigender Mittelweg zwischen den verschiedenen, aus diesen beiden Gesichtspunkten entspringenden Methoden ist bisher noch nicht gefunden worden.

III. Die zur Beantwortung der Frage 1) zunächst erforderliche Feststellung des wahren Konvergenzradius R von $\sum a_m x^m$ liefert der bekannte Cauchysche Satz, wonach *allgemein*:

$$(1) \qquad R = \overline{\lim_{m=\infty}} \left| \sqrt[m]{a_m} \right|^{-1} \text{[1]}$$

und *speziell:*

$$(2) \qquad R = \lim_{m=\infty} \left| \frac{a_m}{a_{m+1}} \right|,$$

---

stellen als *singuläre*, während $f(x)$ *im Innern* überhaupt *nicht existiert*. Für den Ausdruck *„aire singulière"* wäre daher zweckmäfsiger die sonst übliche (auch von Herrn H. auf p. 5 als gleichbedeutend gebrauchte) Bezeichnung *„espace lacunaire"* zu substituieren.

1) Herr H. bedient sich zur Bezeichnung des *oberen Limes* (*„limite supérieure pour m infini"*) der von mir eingeführten Schreibweise: $\overline{\lim_{m=\infty}}\, u_m$. Wenn aber auf p. 16, Fufsnote 3) gesagt wird, dafs in anderen Untersuchungen $\overline{\lim}\, u_m$ dasjenige zu bedeuten habe, was wir als *obere Grenze* der u_m zu bezeichnen pflegen, so will mir dieser Usus äufserst unzweckmäfsig erscheinen. Ich denke, man sollte das *Zeichen lim* durchaus für einen wirklichen *Limes* = *Grenzwert*, *Häufungsstelle* reservieren und insbesondere alles vermeiden, was zu einer Konfusion der definitionsmäfsig streng geschiedenen (cf. Encyklopädie I, p. 72) Begriffe: *oberer Limes* und *obere Grenze* beitragen könnte.

falls dieser letzte Grenzwert *existiert*. Existiert überdies auch $\lim \frac{a_m}{a_{m+1}} = x_0$, so ist x_0 allemal eine *singuläre* Stelle (Fabry), aber *keineswegs* (wie ein älterer, von Herrn Lecornu falsch formulierter und unzulänglich bewiesener Satz besagt) die *einzige* auf C gelegene (Beispiel: $\mathfrak{P}(x) = \frac{x}{1-x} + \lg(1+x)$). Ebensowenig braucht, wenn x_0 die *einzige* singuläre Stelle von C ist, $\lim \frac{a_m}{a_{m+1}}$ zu existieren (Satz von Hadamard: Kap. VII, 2).

Ein zweiter Fall, in welchem die Koeffizienten a_m unmittelbar die Existenz einer bestimmten singulären Stelle, nämlich $x = R$, erkennen lassen, ergiebt sich, wenn die a_m zum mindesten für $m \geqq m_0$ durchweg *reell* und $\geqq 0$ sind.[1])

Zur Aufstellung eines *allgemeinen* Kriteriums dafür, ob eine bestimmte, auf C gelegene Stelle x_0 für $f(x) = \mathfrak{P}(x)$ eine *reguläre* bezw. *singuläre* sei — wobei ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit allemal $R = 1$ und zunächst auch $x_0 = 1$ angenommen werden kann — dient sodann die Bemerkung, dafs das eine oder andere der Fall ist, je nachdem bei positivem $\beta < 1$ der Konvergenzradius von $\mathfrak{P}(x \mid \beta)$, d. h. $\overline{\lim} \left| \sqrt[m]{\frac{1}{m!} f^{(m)}(\beta)} \right|^{-1} > (1-\beta)$ bezw. $= (1-\beta)$ ausfällt. Die hieraus für die *unendliche* Reihe

$$(3) \qquad \left| \frac{1}{m!} f^{(m)}(\beta) \right| = \left| \sum_{m}^{\infty}{}_{\nu} (\nu)_m \cdot \alpha_\nu \beta^{\nu - m} \right| \;^{2)}$$

entspringende, schwer diskutable Bedingung läfst sich durch Ausscheidung der für den fraglichen Grenzwert als unwesentlich sich erweisenden Terme in die entsprechende für:

$$(4) \qquad \left| \sum_{m}^{m+p}{}_{\nu} (\nu)_m \cdot \alpha_\nu \beta^{\nu - m} \right| \quad (\text{wo } p \text{ endlich})$$

transformieren und für die eventuelle Feststellung des *singulären* Charakters von $x = 1$ bezw. (mit Hülfe der Substitution von $\beta \cdot e^{\omega i}$ für β) von $x = e^{\omega i}$ verwerten (Hadamard). Eine weitere Vereinfachung des fraglichen Ausdruckes gewinnt Herr Fabry durch Aufsuchung des *Maximal*-Terms $(\nu)_m \cdot \beta^{\nu - m}$ und Division mit diesem letzteren. Indem er sodann zunächst die Frage in den Vordergrund stellt: „Wann ist der Punkt $x = 1$ ein *regulärer*?" gelangt er durch Benutzung des Umstandes, dafs ein *regulärer* Punkt auf C *niemals isoliert* auftreten kann, sondern stets die Existenz eines aus *lauter regulären* Punkten bestehenden *C-Bogens* erfordert, zu einem allgemeinen

1) Die hierauf bezügliche Zitatnummer (**84**) auf p. 20 wäre richtiger durch (**26**) zu ersetzen: in (**84**) wird lediglich der von mir in (**26**) bewiesene, übrigens zuerst wohl von Herrn Vivanti in (**27**) ohne Beweis benützte Satz auf Funktionen zweier Variablen übertragen.

2) $(\nu)_m$ bedeutet den von Herrn H. mit C_ν^m bezeichneten Binomial-Koeffizienten: $\frac{\nu \cdot (\nu - 1) \cdots (\nu - m + 1)}{1 \cdot 2 \cdots m}$.

Theorem, welches dann in zahlreichen Fällen erkennen läſst, ob der Punkt $x=1$ bezw. auch $x = e^{\omega i}$ ein *singulärer* ist. Die Existenz solcher *regulärer Bögen* erweist andererseits Herr Leau, indem er vermittelst des Ausdruckes (3) von der Regularität einer unbegrenzten Folge von Potenzreihen auf diejenige einer in bestimmter Weise daraus zusammengesetzten Potenzreihe schlieſst, und gewinnt auf diese Weise auſser verschiedenen, schon von Herrn H. auf anderem Wege (s. VII) bewiesenen Sätzen das bemerkenswerte Resultat, daſs Potenzreihen von der Form $\sum \varphi\left(\frac{1}{m}\right) \cdot x^m$, $\sum g(m) \cdot x^m$ (wo $\varphi(t)$ regulär für $t=0$, $g(t)$ eine *ganze*, bezüglich ihres Unendlichwerdens für $|t| = \infty$ an gewisse Beschränkungen geknüpfte Funktion) auf dem Einheitskreis *ausschlieſslich* die singuläre Stelle 1 besitzen.

Ein vorteilhafteres Kriterium zur Beurteilung des regulären bezw. singulären Verhaltens von $\mathfrak{P}(x)_{x=1}$, als das aus (3) resultierende, nämlich ein solches, das von vornherein nur eine *endliche* Anzahl von a_m enthält, ergiebt sich durch geeignete Substitution einer neuen Veränderlichen für x, insbesondere mit Hülfe der bekannten Eulerschen Transformation[1]): $x = \frac{\alpha z}{1+z}$ (Fabry, E. Lindelöf). Diese Methode gestattet, einen groſsen Teil der zuvor erwähnten Resultate merklich einfacher abzuleiten und in mehrfacher Hinsicht zu erweitern.

IV. Auf die Existenz von Potenzreihen, für welche *jede* Stelle des Konvergenzkreises eine *singuläre* ist, und die somit überhaupt keine analytische Fortsetzung besitzen, wurde man *zuerst*[2]) aufmerksam durch das Verhalten gewisser Modulfunktionen und sodann durch den von Weierstraſs

---

1) Ich selbst habe in einer vom November 1897 datierten Arbeit (Math. Ann. **50** [1898], p. 458) zuerst auf den Nutzen dieser Transformation für die Theorie der analytischen Fortsetzung aufmerksam gemacht und dieselbe a. a. O. für ein spezielles Problem der vorliegenden Art verwertet. An dem Abschlusse der dort ausdrücklich angekündigten, bereits vor längerer Zeit begonnenen allgemeineren Untersuchungen wurde ich leider damals durch meine Mitarbeit an der Encyklopädie der Math. Wiss. verhindert: im Jahre 1898 erschienen dann bereits die vollkommen gleiche Ziele verfolgenden Arbeiten der Herren Fabry und Lindelöf, welche völlig unabhängig von mir, und, wie es scheint, auch von einander, auf die Benutzung des nämlichen Grundgedankens verfallen waren.

2) Dieser, wie mir scheint, von Herrn H. nicht genügend hervorgehobene (vielmehr durch die *gleichzeitige* Erwähnung der viel neueren *„fonctions fuchsiennes“* einigermaſsen verdunkelte) Thatbestand erscheint mir *darum* von besonderem Interesse, weil er ein überaus lehrreiches Beispiel dafür bietet, wie gewisse einfache, ja so zu sagen selbstverständliche mathematische Wahrheiten zuweilen auf äusserst komplizierten Umwegen entdeckt worden sind. Auch halte ich es nicht für ganz korrekt, wenn Herr H. jenen Modulfunktionen die Reihe $\sum a^m \cdot x^{b^m}$ als *erstes* Beispiel gegenüberstellt, an welchem die Nicht-Fortsetzbarkeit *direkt* aus den Eigenschaften der *Potenzreihe* erkannt worden sei. Auch hier beruhte diese Erkenntnis auf einem zunächst ganz andere und zwar wesentlich *schwierigere* Ziele verfolgenden Umwege, dem Nachweise *der totalen Nicht-Differenzierbarkeit* der *trigonometrischen* Reihe $\sum a^m \cos(b^m t)$ (Weierstraſs, Math. Werke II, p. 222 = Berl. Berichte 1880, p. 741), während das für die Erledigung der *vorliegenden* Frage ausreichende und typische Verhalten der *Potenz*reihe $\sum a^m x^{b^m}$, wonach gleichzeitig mit $x=1$ auch alle Einheitswurzeln der Form $x^{b^m}=1$ $(m=1,2,3,\ldots)$

bemerkten Umstand, dafs der reelle Theil von $\sum a^m x^{b^m}$ für $x = e^{ti}$ bei geeigneter Einschränkung von a, b nirgends nach t differenzierbar ist. Die im Anschlusse hieran von verschiedenen Autoren aufgefundenen allgemeineren Typen nicht-differenzierbarer trigonometrischer Reihen (Darboux, Cellérier, Lerch[1])), sowie von Potenzreihen, deren Absolutwerte in der Nähe jeder Stelle von C unbegrenzt wachsen (Lerch), liefern analog geartete Beispiele, denen andererseits solche gegenüberstehen, die, wie $\sum a^m x^{m^2}$ ($|a| < 1$: Fredholm), auf C durchweg noch Derivirte jeder Ordnung besitzen. Sind hiermit gewissermafsen die beiden äufsersten Möglichkeiten des fraglichen Verhaltens bezeichnet, so zeigt eine genauere Überlegung, dafs die *Nicht-Fortsetzbarkeit* geradezu als *Regel*, die *Fortsetzbarkeit* als *spezieller Fall* anzusehen ist (Pringsheim[2]), Borel, Fabry). Als ein allgemeines Kriterium für die Nicht-Fortsetzbarkeit der Reihe $\sum a_m x^{c_m}$ findet Herr Fabry die Bedingung $\lim\limits_{m=\infty} (c_{m+1} - c_m) = \infty$, nachdem zuvor schon Herr Hadamard die engere Bedingung: $\lim\limits_{m=\infty} \frac{c_{m+1} - c_m}{c_m} > 0$ angegeben und Herr Borel diese letztere zu der folgenden erweitert hatte: $\lim\limits_{m=\infty} \frac{c_{m+1} - c_m}{\sqrt{c_m}} > 0$. Es

---

singuläre Stellen sein müssen, erst später bemerkt wurde. Eine entsprechend modifizierte, analoge Eigenschaft ist ja schliefslich auch für die von Weierstrafs zunächst mit Hülfe der *Transformationstheorie* (Werke II, p. 226) als nicht-fortsetzbar erkannte Modulfunktion $\vartheta_3(0 \mid q) = 1 + 2 \sum_1^\infty q^{m^2}$ ganz *direkt* nachweisbar (cf. Méray, Bullet. des sc. math. (2) **12** [1888], p. 248).

1) Hier fehlt der Name Dini, dessen wichtige (die wesentlichen, viel später von Herrn Lerch angegebenen Typen schon enthaltende) Arbeit: *Su alcune funzioni che in tutto un intervallo non hanno mai derivata* (Ann. di matem. (2) **8** [1877], p. 121; vergl. auch: Fondamenti [1878], § 119—129) im Litteraturnachweise hinter (**18**) zu zitieren gewesen wäre. Auch sollte wohl die unter Nr. (**57**) zitierte Arbeit hinter (**26**) eingeschoben werden.

2) Der eigentliche Grundgedanke meines Beweises für den fraglichen Satz scheint mir nicht ganz exakt wiedergegeben zu sein. Da ich die nämliche, nicht ganz zutreffende Darstellung auch bei Herrn Borel (*Mém. sur les séries divergentes*, 1899, p. 59) gefunden habe, so sei es mir gestattet, etwas näher hierauf einzugehen. Nach Herrn H. und B. soll mein Beweis etwa folgendermafsen lauten: Ist $f(x) = \sum a_m x^m$ willkürlich vorgelegt, so kann man allemal setzen: $f(x) = \varphi(x) + (f(x) - \varphi(x))$, wo $\varphi(x)$ *irgend eine nicht-fortsetzbare* Potenzreihe bedeutet. Soll also $f(x)$ *fortsetzbar* sein, so müssen die Singularitäten von $\varphi(x)$ und $(f(x) - \varphi(x))$ sich in hinreichendem Mafse kompensieren, was nicht zu erwarten steht, wenn $f(x)$ wirklich willkürlich gedacht wird. — In Wahrheit schliefse ich aber, wie mir scheint, weit prägnanter folgendermafsen: Man kann auf unendlich viele Arten aus $f(x) = \sum a_m x^m$ eine *nicht-fortsetzbare* Reihe $\varphi(x) = \sum a_{p_m} \cdot x^{p_m}$ *herausheben*; ist dann $\psi(x) = \sum a_{q_m} \cdot x^{q_m}$ die Reihe der *übrigbleibenden* Terme, so kann $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ offenbar nur fortsetzbar sein, wenn die a_{p_m}, a_{q_m} *so ineinander greifen*, dafs die Singularitäten von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ sich hinlänglich kompensieren, was doch offenbar nur möglich ist, wenn zwischen den a_{p_m}, a_{q_m}, also schliefslich für die Gesamtheit der a_m *sehr spezielle Relationen* bestehen.

giebt aber auch sehr allgemeine Typen nicht-fortsetzbarer Reihen von der Form $\sum \varphi(m) \cdot x^m$, wo die $\varphi(m)$ durchweg *von Null verschieden* und $\varphi(t)$ eine *analytische* Funktion von t ist.[1])

V. Besitzt $f(x) = \sum a_m x^m$ auf C einen *einzigen, einfachen Pol* α, so ist allemal[2]):

$$\lim_{m=\infty} \frac{a_m}{a_{m+1}} = \alpha \quad \left(\text{also: } \lim_{m=\infty} \left|\sqrt[m]{a_m}\right| = \frac{1}{|\alpha|}\right). \tag{5}$$

Der Satz ist *umkehrbar,* wenn der Grenzwert (5) so zustande kommt, dafs $|a_{m+1} - a_m| < \lambda^m$, wo $\lambda < 0$. Besitzt $f(x)$ innerhalb einer gewissen Umgebung von $x = 0$ nur die $(p+1)$ *einfachen Pole* $\alpha_1, \cdots, \alpha_{p+1}$, wo durchweg $|\alpha_\nu| \leq |\alpha_{\nu+1}|$ und eventuell auch mehrere α_ν zu je einem mehrfachen Pole zusammenfallen dürfen, so tritt an die Stelle der Relation (5) die folgende:

$$\overline{\lim_{m=\infty}} \left|\sqrt[m]{D_{m,p}}\right| = |\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_{p+1}|^{-1}, \tag{6}$$

wo $D_{m,p}$ eine aus $a_m, a_{m+1}, \cdots, a_{m+2p}$ zusammengesetzte symmetrische Determinante bedeutet; dabei kann noch $\overline{\lim}$ durch $\lim$ ersetzt werden, wenn durchweg $|\alpha_\nu| < |\alpha_{\nu+1}|$.

Auch dieses Resultat ist unter geeigneten Einschränkungen umkehrbar und kann alsdann zur Charakterisierung der *auf* C und, sofern sich in der Umgebung von C überhaupt nur *polare* Unstetigkeiten finden, auch der *aufserhalb* C gelegenen Pole dienen.

Der Fall, dafs $f(x)$ auf C auch andere als polare Unstetigkeiten besitzt, kann nach einer im Prinzipe von Darboux herrührenden Methode behandelt werden, bei welcher der *Index* der niedrigsten, unendlich werdenden Derivierten und die Art ihres Unendlichwerdens den Ausschlag giebt. Um in dieser Richtung möglichst allgemeine Resultate zu erhalten, erweist es sich als zweckmäfsig, die Liouville-Riemannschen *Derivierten mit beliebigem reellen Index* α: $D_x^\alpha f(x)$ und zugleich eine mit $\mathfrak{D}_x^\alpha f(x)$ bezeichnete *Modifikation* derselben einzuführen. Beide Operationen werden zunächst

1) Übrigens kann man die Existenz derartiger Reihen sehr leicht in folgender Weise erkennen. Bedeutet $\sum a_m x^m$ irgend eine *fortsetzbare* Reihe mit durchweg von Null verschiedenen Koeffizienten, so wähle man irgend eine *nicht-fortsetzbare* Reihe vom Typus $\sum b_{p_m} \cdot x^{p_m}$, wo die b_{p_m} lediglich der Beschränkung unterliegen: $|a_{p_m} + b_{p_m}| > 0$ (z. B. $b_{p_m} = -2a_{p_m}$). Bestimmt man alsdann eine analytische Funktion $\varphi(t)$ derart, dafs:

$$\varphi(p_m) = a_{p_m} + b_{p_m}, \text{ im übrigen } \varphi(m) = a_m, \text{ wenn } m \neq p_m,$$

so ist offenbar $\sum \varphi(m) \cdot x^m$ eine Reihe von der verlangten Art.

2) Gilt auch für den Fall eines n-fachen Poles.

durch gewisse *bestimmte Integrale* bezw. deren Differentialquotienten nach x definiert und stehen sodann zu $f(x) = \sum_1^\infty {}_m\, a_m x_m$ in der Beziehung:

$$(7) \qquad D_x^\alpha f(x) = \sum_1^\infty {}_m \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\alpha)} a_m x^{m-\alpha}, \quad \mathfrak{D}_x^\alpha f(x) = \sum_1^\infty {}_m\, m^\alpha \cdot a_m x^m.$$

Ferner wird als *Ordnung* von $f(x)$ auf C bezw. dem C-Bogen $\widehat{\vartheta_0 \vartheta_1}$ die *obere Grenze* ω der Zahlen α eingeführt, für welche $D_x^{-\alpha} f(x)$ endlich, stetig und *limitiert*[1]) ist: die letztere Forderung soll besagen, dafs für jedes m:

$$(8) \qquad \left| m \cdot \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} {\cos \atop \sin} (m\vartheta) \cdot f(e^{\vartheta i}) \cdot d\vartheta \right| < J \qquad (J \text{ endlich}; 0 \leq \vartheta_0 < \vartheta \leq \vartheta_1 \leq 2\pi)$$

Zwischen der (auf den *ganzen* Kreis C bezüglichen) *Ordnungszahl* ω und dem Koeffizienten a_m besteht alsdann die merkwürdige Relation:

$$(9) \qquad \omega = 1 + \overline{\lim_{m=\infty}} \frac{\lg |a_m|}{\lg m},$$

welche aussagt, dafs der Konvergenz- bezw. Divergenz-Charakter von $\sum |a_m|$ mit demjenigen von $\sum m^{\omega-1}$ übereinstimmt.

Definiert man schliefslich noch als *Ordnung* von $f(x)$ in einem einzelnen *C-Punkte* x_0 die Ordnung für einen unendlich kleinen, den Punkt x_0 umfassenden Bogen, so stimmt dieselbe mit dem *gewöhnlichen* Begriffe der *Ordnungszahl* überein, wenn $f(x)$ für $x = x_0$ so wie $(x - x_0)^{-\omega} \varphi(x)$ unendlich wird (wo $\varphi(x_0)$ *endlich* und von Null verschieden ist oder höchstens *logarithmisch* unendlich wird bezw. verschwindet). Auch ist dann umgekehrt die Gesamt-Ordnungszahl auf C nichts anderes als die Maximal-Ordnung aller auf C befindlichen singulären Stellen. Diese Bemerkung kann dazu dienen, um $f(x)$ für jede *reguläre* Stelle von C als Grenzwert eines gewissen Polynoms (also auch durch eine nach Polynomen fortschreitende Reihe) darzustellen, falls $\omega < \infty$ ist, sowie auch einen Grenzausdruck in den a_m zur Berechnung der Singularitäten α von der *höchsten* vorkommenden Ordnung λ anzugeben, falls $f(x)$ in der Umgebung von α die Form besitzt: $(x-\alpha)^\lambda \cdot (\lg(x-\alpha))^\mu \cdot \mathfrak{P}(x-\alpha)$ (wo: $\mu \gtreqless 0$). Der Fall, dafs $f(x)$ auf C eine *einzige* und zwar *wesentliche* Singularität α besitzt, kann mit Hülfe der Eulerschen Transformation behandelt werden, wenn α *isoliert* ist (Le Roy)[2]), allgemeiner mit Hülfe eines von Herrn

1) Mit diesem Ausdrucke will ich Herrn H.s Bezeichnung „*à écart fini*" wiedergeben. Eine einigermafsen wörtlichere Übersetzung, wie etwa „*mit beschränkter Schwankung*" erweist sich als unzweckmäfsig, da dieser letztere Ausdruck bereits eine bestimmte und zwar etwas *engere* Bedeutung gewonnen hat (cf. Encyklopädie II, p. 40). Jede Funktion *mit beschränkter Schwankung* ist zwar auch „*à écart fini*", das *Umgekehrte* scheint aber zum mindesten *nicht nachgewiesen*.

2) Die übrigen Untersuchungen dieses Kapitels stammen durchweg von Herrn Hadamard.

Appell herrührenden Satzes, auch wenn α eine *Häufungsstelle* von aufserhalb C gelegenen Singularitäten ist.

VI. Auf die vorstehenden, *der Bestimmung der singulären Stellen* gewidmeten Untersuchungen folgen nun solche über die Herstellung der *analytischen Fortsetzung*, und zwar zunächst anknüpfend an den Frobeniusschen Satz:

$$f(1) \equiv \lim_{x=1} \sum_0^\infty {}^m a_m x^m = \lim_{n=\infty} \sum_0^n {}^m \frac{S_m}{m+1} \qquad (s_m = a_0 + \cdots + a_m) \tag{10}$$

und die durch Iteration sich ergebenden analogen Sätze von Hoelder, als erste Beispiele für die legitime Verwertung einer *divergenten* Reihe zur Berechnung von $f(x)$. Eine direkte Verallgemeinerung der betreffenden Grenzprozesse bietet Borels *„limite généralisée"*:

$$f(x) = \lim_{\alpha=\infty} \frac{1}{\varphi(\alpha)} \cdot \sum_0^\infty {}^m C_m \alpha^m \cdot S_m(x), \qquad (S_m(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m) \tag{11}$$

wo α reell und positiv, $\varphi(\alpha) = \sum_0^\infty {}^m C_m \alpha^m$ eine *ganze* Funktion (gewöhnlich $\varphi(\alpha) = e^\alpha$) und die hierauf gegründete Theorie der *„summierbaren divergenten Reihen"*. Eine andere Methode (Stieltjes, Padé) besteht in der Umformung von $\mathfrak{P}(x)$ in einen *Kettenbruch* oder ein *bestimmtes Integral* (Stieltjes). Als weittragendste Methode erweist sich aber die Transformation von $\mathfrak{P}(x)$ in eine nach *Polynomen* fortschreitende Reihe. Ein für reelle stetige Funktionen von Weierstrafs bewiesenes Theorem gestattet nämlich die folgende Verallgemeinerung: „Jedes in einem beliebig gestalteten Bereiche holomorphe $f(x)$ läfst sich daselbst durch eine Reihe von *Polynomen* (Appell, Hilbert, Painlevé) oder auch von *rationalen Funktionen* (Runge) darstellen." Die wirkliche Herstellung solcher Polynomentwickelungen unter der Voraussetzung, dafs $f(x)$ lediglich durch ein Funktionselement $\sum a_m x^m$ $\left(\text{bezw.} \sum a_m (x - x_0)^m\right)$ definiert ist, wird sodann durch ein Fundamental-Theorem von Mittag-Leffler geliefert, nämlich:

$$f(x) = \sum_0^\infty {}^\nu \sum_0^{m\nu} {}^\mu \gamma_\mu^{(\nu)} \cdot a_\mu x^\mu, \tag{12}$$

wobei als Geltungsbereich ein sogenannter *Stern* erscheint, d. h. das gesamte Ebenengebiet, welches nach Ausscheidung geradliniger[1]), von allen singulären Punkten α in der Richtung $\overline{0\alpha}$ nach ∞ gezogener Schnitte L_α übrig bleibt; die $\gamma_\mu^{(\nu)}$ sind numerische, von den a_μ unabhängige Konstanten, welche auch *a priori* gewählt werden können.

Den zunächst ziemlich komplizierten Mittag-Lefflerschen Beweis haben (zum Teil ohne nähere Kenntnis desselben) die Herren Painlevé,

1) Allgemeiner kann man für die L_α auch irgendwelche andere von den α ins Unendliche sich erstreckende Kurven substituieren, deren Punkte aus denjenigen einer von der Stelle 1 aus ins Unendliche gezogenen Musterkurve (ohne Doppelpunkt) durch Multiplikation mit α entstehen (Leau).

Leau und Borel wesentlich vereinfacht. Letzterer geht von der Bemerkung aus, daſs auf Grund der Cauchyschen Relationen:

$$(13)\qquad f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\mathfrak{C})} \frac{f(z)\cdot dz}{z-x}, \quad a_m = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\mathfrak{C})} \frac{f(z)\cdot dz}{z^{m+1}}$$

die Aufstellung der Entwickelung (12) lediglich von der entsprechenden für $\frac{1}{1-x}$ abhängt. Hat man nämlich eine solche gefunden, etwa:

$$(14)\qquad \frac{1}{1-x} = \sum_0^\infty{}_\nu \sum_0^\infty{}_\mu \gamma_\mu^{(\nu)} \cdot x^\mu \qquad (\text{exkl. } 1 \leq x \leq +\infty)$$

(was auf unendlich viele Arten, z. B. mit Hilfe der oben erwähnten Sätze von Runge, Painlevé und Hilbert erzielt werden kann), so folgt:

$$(15)\qquad \frac{1}{z-x} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{z}} = \sum_0^\infty{}_\nu \sum_0^\infty{}_\mu \gamma_\mu^{(\nu)} \frac{x^\mu}{z^{\mu+1}} \qquad \left(\text{exkl. } 1 \leq \frac{x}{z} \leq +\infty\right)^{1)},$$

woraus dann durch Multiplikation mit $f(z)\cdot dz$ und Integration über irgend eine die Stelle x umschlieſsende, aber keinen der Strahlen L_α schneidende Kurve $\mathfrak{C}$ mit Berücksichtigung von (13) unmittelbar die Formel (12) hervorgeht.

Obschon das fragliche Theorem für die *Berechnung* der *singulären Punkte* zunächst keinen Anhalt bietet, so liefert dasselbe, zumal im Anschluſs an die (miteinander sehr verwandten) Beweismethoden von Mittag-Leffler und Leau immerhin geeignete Hilfsmittel, um die früher erwähnten Methoden zur Auffindung von *auſserhalb* C gelegenen Singularitäten merklich zu erweitern.[2] So ergiebt sich z B. auf diesem Wege, daſs die in (III) erwähnten Reihen: $\sum \varphi\left(\frac{1}{m}\right).x^m, \sum g(m)\cdot x^m$ $\left(\text{auſserdem auch: } \sum \lg \varphi\left(\frac{1}{m}\right)\cdot x^m\right)$ im Endlichen[3]) *überhaupt* nur die singuläre Stelle $x = 1$ besitzen (Leau).

VII. Nicht selten lassen sich Eigenschaften einer Potenzreihe $f(x) = \sum a_m x^m$ aus denjenigen einer anderen, dazu in irgendwelcher Beziehung stehenden: $\varphi(x) = \sum a'_m x^m$ ableiten — *vice versa*; z. B. wenn gesetzt wird: $\varphi(x) = f'(x)$, $x^\alpha D_x^\alpha f(x)$, $\mathfrak{D}_x^\alpha f(x)$. Durch Verallgemeinerung der zur Defi-

---

1) D. h. wenn die Linie $\overline{0x}$ den geometrischen Ort der z-Punkte (also schlieſslich die Kurve $\mathfrak{C}$) nicht schneidet.

2) Ein an das obige Theorem direkt anschlieſsendes Kriterium zur Feststellung der auf irgend einem Strahle $(0, \infty)$ dem Nullpunkte nächstgelegenen Singularität hat neuerdings Herr Mittag-Leffler angegeben: C. R. **133** (12. August 1901), p. 357.

3) Bei Herrn H., p. 63, heiſst es, in diesem Zusammenhange wohl nicht ganz korrekt: *„dans tout le plan"*. Übrigens wäre hier auch noch bezüglich der etwa vorhandenen *verschiedenen Zweige* von $f(x)$ eine der Fuſsnote 1) auf p. 69 analoge Bemerkung zu machen. Beispiel: $\sum_1^\infty{}_m \frac{x^m}{m^2} = \frac{1}{x}\lg\frac{1}{1-x}$ für $x = 0$.

nition der letzteren Symbole dienlichen Integrale gelangt Herr H. zu der Festsetzung:

$$(16)\quad \varphi(x) = \int_0^1 V(t)\cdot f(tx)\cdot dt, \quad \text{d. h. schließlich} = \sum_0^\infty{}_m \left(\int_0^1 V(t)\cdot t^m \cdot dt\right) a_m x^m$$

und sodann zu dem folgenden Satze: „$\varphi(x)$ besitzt in der ganzen Ebene *höchstens*[1]) die Singularitäten von $f(x)$“, — der u. a. auch wiederum die in (III) und (VI) erwähnten Leauschen Resultate und andere ähnlich geartete liefert (Le Roy).

Das von Poincaré für die Theorie der *ganzen* Funktionen mit Erfolg verwendete Integral:

$$(17)\qquad \int_0^\infty e^{-t}\cdot F(tx)\cdot dt \quad (F(x) \text{ eine ganze Funktion})$$

stellt, soweit es konvergiert, eine analytische Funktion von x dar und liefert für die spezielle Wahl

$$(18)\qquad F(x) = \sum_0^\infty{}_m \frac{1}{m!} a_m x^m$$

$\left(\text{wegen: } \int_0^\infty t^m e^{-t}\cdot dt = m!\right)$ die Beziehung:

$$(19)\qquad f(x) = \int_0^\infty e^{-t}\cdot F(tx)\cdot dt \quad \left(\text{wo: } f(x) = \sum_0^\infty{}_m a_m x^m\right),$$

d. h. $f(x)$ ist mit Hülfe der *„assoziierten“* Funktion $F(x)$ durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt (Borel), welches übrigens nur eine andere Form des Grenzausdrucks (11) zur *„Summierung der divergenten Reihe* $\sum a_m x^m$“ darstellt[2]) und im allgemeinen einen über C hinausreichenden polygonalen Konvergenzbezirk P besitzt: jenes Integral giebt dann in P die analytische Fortsetzung von $f(x)$ und liefert auch gewisse Kriterien zur Berechnung singulärer Stellen. Andere Integraldarstellungen dieser Art sind von Borel, Servant, Desaint für analoge Zwecke verwertet worden, den allgemeinsten Typus: $\int F(t)\cdot \Phi(x,t)\cdot dt$ hat Herr Pincherle ausführlich untersucht.

Auf Integraldarstellungen von Potenzreihen beruhen auch die ersten Beweise der folgenden beiden Sätze:

„Ist

$$f(x) = \sum a_m x^m, \qquad F(x) = \sum b_m x^m, \qquad \varphi(x) = \sum a_m b_m x^m,$$

und bezeichnet man mit α_λ, β_μ die singulären Stellen von $f(x)$, $F(x)$, so hat $\varphi(x)$ *höchstens* die singulären Stellen $\alpha_\lambda\beta_\mu$ (Hadamard). Die Natur

1) Auch hier gilt das am Schlusse der vorigen Fußnote Gesagte.

2) Dies hätte vielleicht p. 67 ausdrücklich hervorgehoben werden sollen. Vergl. im übrigen: Borel, Journ. de math. (5) **2** (1896), p. 109. Ann. de l'École norm. (3) **16** (1899), p. 55.

dieser Singularitäten $\alpha_\lambda \beta_\mu$ (einschliefslich des Verschwindens einer solchen Singularität) hängt in bestimmter Weise von derjenigen der α_λ, β_μ ab" (Borel).

„Ist

$$f(x) = \sum \frac{a_m}{x^{m+1}},\ F(x) = \sum \frac{b_m}{x^{m+1}},\ \varphi(x) = \sum \frac{a_0 b_m + (m_1) \cdot a_0 b_{m-1} + \cdots + a_m b_0}{x^{m+1}},$$

und bezeichnet man mit α_λ, β_μ die singulären Stellen von $f(x)$, $F(x)$, so hat $\varphi(x)$ *höchstens* die singulären Stellen $\alpha_\lambda + \beta_\mu$" (Hurwitz, Pincherle, Dell' Agnola).

Durch wiederholte Anwendung des ersten dieser beiden Sätze ergiebt sich ein entsprechender Satz für Reihen von der Form $\sum a_m^p \cdot x^m$ und sodann für $\sum P(a_m) \cdot x^m$, wo P ein Polynom p^{ten} Grades. Mit Hilfe des Grenzüberganges $p = \infty$ gelangte dann Herr Leau noch zu gewissen Erweiterungen der in (III) und (VI) erwähnten Resultate.

VIII. Fafst man die Umformungen, welche bisher zur Untersuchung von $f(x) = \sum a_m x^m$ angewendet wurden (Substitution einer neuen Veränderlichen, Derivation mit beliebigem Index, Einführung von Integrationsprozessen) in das Schema zusammen:

$$\varphi(x) = A(f(x)), \tag{20}$$

wo A eine der angeführten Operationen bedeutet, so genügen diese letzteren durchweg dem *„distributiven"* Gesetze:

$$A(f_1(x) + f_2(x)) = A(f_1(x)) + A(f_2(x)) \tag{21}$$

und können darnach als spezielle Fälle der durch diese Funktionalgleichung charakterisierten allgemeinen Klasse von Operationen aufgefafst werden, welche von Pincherle als *distributive Operationen*, von Bourlet als *additive* (bei H. *lineare*) *Transmutationen* bezeichnet und ausführlich studiert worden sind.[1] Herr Pincherle gelangte auf diesem Wege u. a. zu sehr einfachen Beweisen der am Schlusse von (VII) angeführten Sätze von Hadamard und Hurwitz (letztere mit Aufhebung der von Herrn Hurwitz ursprünglich gemachten Einschränkung, dafs die α_λ, β_μ lauter einfache Pole sein sollten).[2]

Es werde nun ferner mit A^{-1} die zu A *inverse* Operation bezeichnet und angenommen, dafs dieselbe ein eindeutiges Resultat giebt, also:

$$A^{-1}(\varphi(x)) = f(x). \tag{22}$$

Denkt man sich in Gleichung (20) für f alle Funktionen eines gewissen Funktionsbereiches[3] S eingesetzt (z. B. alle Potenzreihen $\sum a_m x^m$,

---

1) Dabei ist *hier* immer von „analytischen" Transmutationen die Rede, d. h. solchen, bei denen $A(fx)$, soweit dieser Ausdruck überhaupt einen Sinn hat, allemal eine *analytische* Funktion vorstellt.

2) Eine elementare Darstellung dieser Beweise findet man bei G. Vivanti, *Teoria delle funzioni analitiche* (Milano, 1901), p. 350, 360.

3) Für die genauere Grundlegung der auf p. 75 von Herrn H. eingeführten Begriffe *„espace fonctionnel"* und *„champs fonctionnel"* wäre wohl noch auf Pincherle, *Sul concetto di piano in uno spazio ad infinite dimensioni* (Rend. Accad. Bologn., 30. Jan. 1898) hinzuweisen gewesen.

deren Konvergenzradius eine gewisse Zahl R übersteigt), so entspricht ein gewisser Bereich S' von Funktionen φ. Ist dann S' ganz in S enthalten und kleiner als S, so besitzt für solche φ, welche dem Bereich $(S - S')$ angehören, die Gleichung (20) *keine* dem Bereiche S angehörige Lösung f. Diese (von Herrn Pincherle als Degenereszenz der betreffenden Transmutation bezeichnete) Eventualität gestattet dann in dem als Beispiel angeführten Falle den folgenden Schlufs: die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dafs φ dem Bereiche S' angehört, sind auch notwendig und hinreichend dafür, dafs f einen Konvergenzradius $> R$ besitzt. Substituiert man also in (22) solche φ, welche *nicht* dem Bereiche S' angehören, so können auch nur solche f zum Vorschein kommen, welche *nicht* dem Bereiche S angehören, d. h. Potenzreihen, deren Konvergenzradius $\leqq R$; und es lassen sich unter Umständen über diese letzteren noch speziellere Aussagen machen, falls man die φ gerade dem Bereiche $(S - S')$ entnimmt. Durch geeignete Spezialisierung der Operation A läfst sich z. B. aus der Gesamtheit der für $|x| > R$ konvergierenden Potenzreihen das vollständige System derjenigen konstruieren, welche auf dem Kreise $|x| = R$ bestimmten Singularitätencharakter besitzen.

IX. Ist $\overline{\lim}\,|\sqrt[m]{a_m}| = \infty$, so *divergiert* $\sum a_m x^m$ für jedes von Null verschiedene x, definiert also zunächst überhaupt keine bestimmte Funktion. Die Frage, wie man eine solche Reihe nichtsdestoweniger für die *Definition* einer analytischen Funktion verwerten kann, gewinnt lediglich dadurch eine Bedeutung, dafs Reihen dieser Art durch rein formale Entwickelung wohl definierter arithmetischer Ausdrücke (z. B. bestimmter Integrale) zum Vorschein kommen oder, ebenfalls rein formal, gewissen Differentialgleichungen genüge leisten. Der letztere Umstand führt zunächst zur Ersetzung der divergenten Potenzreihe durch einen konvergenten Kettenbruch[1]) (Laguerre; vergl. auch (VI): Padé). Das analoge Verfahren hat Stieltjes auf Reihen der Form $\sum (-1)^m C_m \cdot x^{-m}$ (C_m reell und positiv) angewendet und neben der Kettenbruchdarstellung eine solche von der Form $\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u}$ angegeben, wo $\psi(u)$ durch das unendliche Gleichungssystem: $\int_0^\infty u^m \cdot \psi(u) \cdot du = C_m$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ definiert ist. Herr Borel hat das fragliche Problem dahin formuliert, $f(x)$ so zu bestimmen, dafs $\lim\limits_{x=0} f(x) = a_0$, $\lim\limits_{x=0} f^{(m)}(x) = m!\, a_m$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$, sofern x auf einen gewissen Winkel mit dem Scheitel O beschränkt wird. Durch seine Methode der Summation divergenter Reihen findet er *eine* Lösung in der Form (cf. Gleichung (19)): $f_1(x) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot F(tx)\, dt$, wenn wiederum $F(x) = \sum \frac{1}{m!} a_m x^m$ die zu $\sum a_m x^m$ assoziierte Funktion bedeutet; es giebt dann aber noch unendlich viele andere Lösungen, z. B.

1) Diese Methode findet sich schon bei Euler: cf. Encyklopädie I, p. 110, Fufsnote 294.

$f(x) = f_1(x) + C \cdot e^{-\frac{1}{x}}$. Auch die Entwickelung nach Polynomen ist für die Lösung der vorliegenden Frage verwertet worden (Borel).[1])

Ein anderes hierher gehöriges Problem, nämlich: „Wie läſst sich der Weierstraſssche Begriff der analytischen Fortsetzung in der Weise *erweitern*, daſs auch für analytische Funktionen, die jetzt als *nicht*-fortsetzbar erscheinen, eine Fortsetzung *eindeutig* definirt werden kann?" — hat noch keine irgendwie befriedigende Lösung gefunden. Auch die Übertragung der in I—VIII behandelten Fragen und Methoden auf Reihen, die nach *anderen* Funktionen, als ganzen Potenzen fortschreiten (Darboux, Servant), sowie auf Potenzreihen mit *mehreren* Veränderlichen (Lemaire, Painlevé, Biermann, Lerch) ist über bescheidene Anfänge noch nicht hinausgekommen.

X. Eine Anwendung haben zunächst die Mittag-Lefflerschen Polynomentwickelungen bei der Integration von Differentialgleichungen der Dynamik gefunden (Volterra). Da ferner jeder *Pol* von $F(x)^{-1}$ eine *Nullstelle* von $F(x)$, so können die Hadamardschen Resultate von Kap. V unmittelbar zur Berechnung der Nullstellen α_ν ganzer rationaler oder transzendenter Funktionen dienen, im letzteren Falle, falls die Anzahl der α_ν unendlich ist, auch zur Auffindung von Relationen zwischen dem Wachstum der $|\alpha_\nu|$ und dem asymptotischen Verhalten der Reihenkoeffizienten (Hadamard). Derartige asymptotische Wertbestimmungen ergeben sich auch für die Koeffizienten *nicht* beständig konvergierender Potenzreihen aus der Natur der auf C gelegenen singulären Stellen. Die Kriterien für die Nicht-Fortsetzbarkeit von Potenzreihen lassen sich unmittelbar in solche umsetzen, welche aussagen, ob eine *trigonometrische* Reihe eine *analytische* Funktion definiert oder nicht (wobei auch im *letzteren* Falle die unbeschränkte Differenzierbarkeit vorhanden sein kann). Daraus läſst sich u. a. erschlieſsen, daſs gewisse partielle Differentialgleichungen mit *analytischen* Koeffizienten lediglich *nicht-analytische* Lösungen zulassen (Borel).

Eine Ergänzung der hier mitgeteilten, im wesentlichen auf *Grenz*-Eigenschaften der Reihen-Koeffizienten beruhenden Untersuchungen bieten diejenigen, bei welchen deren *arithmetische* Natur in den Vordergrund tritt: dahin gehört vor allem der von Eisenstein ausgesprochene, von Heine[2]) bewiesene Satz über die Koeffizienten einer $\mathfrak{P}(x)$, welche Wurzel einer algebraischen Gleichung ist, und dessen von Tschebyscheff ausgesprochene (aber, wie es scheint, nirgends bewiesene) Erweiterung[3]), die ein analoges Kriterium dafür giebt, daſs $\mathfrak{P}(x)$ aus einer endlichen Anzahl von algebraischen Funktionen, Exponential-Funktionen und Logarithmen zusammengesetzt ist; ferner eine Anzahl ähnlicher Sätze über die Integrale gewisser Differential-Gleichungen (F. Gomes Teixeira, Hurwitz, Pincherle). Es verdient bemerkt zu werden, daſs ein Satz von dem eben angedeuteten Charakter, nämlich über die *arithmetische* Beschaffenheit der Koeffizienten von Potenzreihen, welche *meromorphe* Funktionen darstellen bezw. *nicht* dar-

---

1) Hier steht auf p. 85, Zeile 3 von unten das unverständliche Zitat (**86**).

2) Hier wäre unter (**95**) auſser Heines Arbeit im 45. Bande des Journ. f. Math. vor allem auch diejenige im 48. Bande (1854), p. 267—275 zu zitieren; ferner: Hermite, Proceed. of the Lond. Math. Soc. VII (1875), p. 173.

3) Eine auf den Fall gewisser spezieller transcendenter Gleichungen bezügliche Erweiterung giebt Heine, Handb. der Kugelf., 2. Aufl., I (1878), p. 52.

stellen können, ganz direkt aus einem der in V erwähnten Hadamardschen Sätze hergeleitet werden kann (Borel).

In einem Schlufswort kommt Herr H. zu folgendem Resultat: Das Problem *der analytischen Fortsetzung* erscheint durch Mittag-Lefflers Theorem im wesentlichen gelöst; dasjenige *der Bestimmung der Singularitäten* nur für eine immerhin ansehnliche Reihe besonderer Fälle, in denen sich die Resultate ganz verschiedenartiger Methoden begegnen. Als besonders wirksame Hilfsmittel haben sich die Verallgemeinerung des Grenzwert-Begriffes und die Einführung der Transmutationen erwiesen. Die Hauptschwierigkeit für weitere Untersuchungen besteht in einer geeigneten Umgrenzung des in seiner vollen Allgemeinheit kaum zugänglichen Problems: in dieser Hinsicht wäre es schon als ein bemerkenswerter Fortschritt anzusehen, wenn es gelänge, den Fall der Nicht-Fortsetzbarkeit von $\Sigma a_m x^m$ durch Formulierung geeigneter Bedingungen von vornherein definitiv auszuscheiden.

Soviel über den Inhalt der vorliegenden Schrift. Die Gruppierung des weitverzweigten Stoffes ist vortrefflich, die Darstellung überall klar und durchsichtig. Besondere Erwähnung verdient das aufserordentlich reichhaltige, sorgfältig geordnete Litteraturverzeichnis.

Die von mir gegen einige Einzelheiten gemachten Einwendungen erscheinen relativ geringfügig und sind keinesfalls dazu angethan, die Vorzüge des interessanten und lehrreichen Buches in nennenswerter Weise zu mindern.

Der Vollständigkeit halber will ich schliefslich noch einige Druckfehler anmerken, die mir bei der Lektüre aufgefallen sind: Auf p. 19, Zeile 3 von unten lies: „*premier*" statt „*second*", dagegen Zeile 7 von unten: „*second*" statt „*premier*". — Auf p. 27 Gl. (22) ist rechts der Faktor $(-1)^m$ hinzuzufügen. — Auf p. 28, Fufsn. (1), Zeile 3 lies: $L(m!)$ statt $L(!)$. — Auf p. 34 ist nicht ersichtlich, worauf die Fufsnote (1) sich bezieht. — Auf p. 42, Zeile 8, 9, desgl. Fufsnote (1), Zeile 3 lies: „*de ce numéro*" statt „*du numéro précédent*"; ferner Zeile 12 des Textes: „*No. 2*" statt „*No. 1*". — Auf p. 81, Zeile 15 lies: λ_i statt λ; desgl. Zeile 17: $\lambda_{m,0}$ statt $\lambda_{m,}0$. — Auf p. 96, Zeile 10 von unten lies: „*du reste*" statt „*d'ores et*". — Auf p. 99, Fufsnote, Zeile 3, lies: „*ch. X, No. 2*" statt: „*ch. X, No. 1*". — Im Inhaltsverzeichnis von Kap. IV. fehlt Nr. 8.

München, März 1902. ALFRED PRINGSHEIM.

E. Borel. Leçons sur les séries divergentes. Paris 1901, Gauthier-Villars. VI + 182 S. 8⁰.

Die Theorie der divergenten Reihen macht eigenartige Wandlungen durch. Während in dem „naiven" Zeitalter der höheren Analysis, den Zeiten von Leibniz, Bernoulli, Euler u. a. mit den unendlichen Reihen wie mit endlichen Gebilden operiert wurde, trat in dem „kritischen" Zeitalter, vor allem infolge der Arbeiten von Abel und Cauchy eine starke Reaktion ein. Die Reihen wurden in konvergente und divergente Reihen unterschieden und der Schwerpunkt auf die konvergenten Reihen gelegt, während die divergenten sich nur bei wenigen Gelegenheiten, wie in der Theorie der Gammafunktionen und in einem gewissen Teile der theoretischen Physik als

nützlich und anwendbar zeigten. Hierin ist nun in den letzten Zeiten eine Wandlung eingetreten. Durch die Arbeiten der Herren Poincaré und Stieltjes, denen sich bald solche von Herrn Borel u. a. anschlossen, ist die Aufmerksamkeit der Mathematiker neuerdings in erhöhtem Maſse den Gebilden der divergenten Reihen zugewandt worden. Es hat sich durch diese Arbeiten gezeigt, daſs die divergenten Reihen in nützlicher Weise für die Theorie gewisser Differentialgleichungen, sowie für die gesamte Funktionentheorie verwandt werden können, daſs sie Berechnungen zulassen, die bei anderen Theorien auf Schwierigkeiten stoſsen. Es ist der Zweck und die Aufgabe des vorliegenden Werkes, den Leser über den Stand der heutigen Erkenntnis auf diesem ebenso wichtigen wie interessanten Gebiete zu orientieren und zu gleicher Zeit die Richtung anzugeben, in welcher die Entwickelung dieser Theorie fortschreitet. Teilweise geht das Werk über den skizzierten Rahmen hinaus. Die letzten Betrachtungen, die sich auf die Mittag-Lefflerschen Entwickelungen beziehen, gehören nur teilweise in das Gebiet der divergenten Reihen, werden aber gewiſs von vielen Lesern mit besonderer Freude begrüſst werden.

Das inhaltreiche Buch ist elegant und frisch geschrieben und wird sicher dazu beitragen, das Interesse für diese neuen Theorien in weitere Kreise zu tragen.

Gewissermaſsen als Programm stellt Herr Borel in einer längeren historisch-philosophischen Einleitung folgenden Satz auf:

Einer jeden divergenten Reihe soll eine Gröſse so zugeordnet werden, daſs die Substitution derselben an Stelle der Reihe bei den gewöhnlichen Rechnungen stets oder fast immer exakte Resultate zuläſst. Zwei Operationen werden hierbei von vornherein ausgeschlossen. Erstens darf die Anordnung der Glieder nicht geändert werden und zweitens darf eine Anzahl auf einander folgender Glieder nicht unendlich oft durch ihre Summe ersetzt werden. Die Durchführung dieses Programms erstreckt sich über fünf Kapitel, deren Inhalt wenigstens teilweise folgendermaſsen charakterisiert werden möge.

Das erste Kapitel behandelt die *asymptotischen* Reihen und knüpft in seinem wesentlichen Teile an einige Untersuchungen von Herrn Poincaré an. Es sei eine Funktion $J(x)$ gegeben und die Entwickelung:

$$C_0 + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \cdots,$$

die auch divergent sein kann; dann stellt diese Entwickelung die Funktion *asymptotisch* dar, wenn die Differenz

$$J(x) - \left(C_0 + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \cdots \frac{C_n}{x^n}\right)$$

mit wachsendem x von der Ordnung x^{-n} unendlich klein wird, d. h.

$$x^n\left[J(x) - \left(C_0 + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \cdots + \frac{C_n}{x^n}\right)\right]$$

sich der Null nähert, oder also $J(x)$ die Form hat:

$$J(x) = C_0 + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \cdots + \frac{C_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{C_n + \varepsilon_n}{x^n}.$$

Es wird nach dem Vorgange von Stieltjes gezeigt, wie bei gegebenem $J(x)$ die etwa dazu gehörenden Werte von C bestimmt werden können. Bei diesen Zuordnungen zeigt es sich, daſs ein und derselben Reihe mehrere Funktionen zugeordnet werden können, eine Unebenheit, die unter Umständen durch Hinzunahme weiterer Bedingungen für die Funktion $J(x)$ gehoben werden kann. Auf diese asymptotischen Reihen werden die Grundoperationen der Addition, Multiplikation und Division angewendet und ebenso deren Integration und Differentiation untersucht. Dann aber wird im Anschluſs an Untersuchungen von Herrn Kneser eine Anwendung auf die asymptotische Darstellung der Integrale der Differentialgleichung

$$y'' + \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots\right)y' + \left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \cdots\right)y = 0$$

gegeben, wobei die in dieser Gleichung auftretenden Reihen für groſse Werte von x konvergent sein sollen. Die Koeffizienten werden reell angenommen und nur reelle Werte von x in Betracht gezogen. Die Theorie dieser Differentialgleichungen wird auf solche von der Form zurückgeführt:

$$y'' = y[a^2 + \varphi(x)],$$

wobei $\varphi(x)$ für $x = \infty$ gegen Null konvergiert und das Integral $\int_x^\infty \varphi(x)\,dx$ einen Sinn hat. Die Untersuchung wird im wesentlichen geometrisch ausgeführt und in Bezug auf weitere Anwendungen auf die Arbeiten der Herren Kneser und Horn verwiesen.

Das zweite Kapitel beschäftigt sich in erster Linie mit einigen Untersuchungen von Stieltjes. Derselbe hat die Funktionen von z untersucht, welche durch Kettenbrüche von der Form dargestellt werden:

$$\cfrac{1}{a_1 z + \cfrac{1}{a_2 z + \cfrac{1}{a_3 z + \cdots}}},$$

wobei die Gröſsen a positiv sind. Wenn die Reihe $\sum a_n$ divergent ist, so definiert der Kettenbruch eine analytische Funktion, deren singuläre Punkte den negativen Teil der reellen Achse ausfüllen. In diesem Umstand liegt eine Beschränkung der Anwendbarkeit der Theorie von Stieltjes. Andrerseits kann der Kettenbruch in eine unendliche Reihe entwickelt werden:

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \cdots$$

Die Gröſsen c sind positiv und können, wenn auch in komplizierter Weise, durch die Gröſsen a dargestellt werden, während umgekehrt die Berechnung der Gröſsen a durch die Gröſsen c eine einfache ist. Nun kann es vorkommen, daſs die unendliche Reihe divergent, der Kettenbruch dagegen konvergent ist — *in diesem Falle soll der divergenten Reihe der Wert des Kettenbruchs als Summe zugeordnet werden.* Da das Operieren mit Kettenbrüchen kein einfaches ist, so führt Stieltjes an dessen Stelle ein bestimmtes Integral ein. Dieses bestimmte Integral ergiebt durch Entwickelung die unendliche Reihe, und umgekehrt; wenn die divergente Reihe gegeben ist, kann das bestimmte Integral mit Hilfe eines Kettenbruchs gebildet

werden. Die hierbei stattfindenden Beziehungen werden zunächst im Anschlufs an die Stieltjesschen Untersuchungen studiert, sodann aber verallgemeinert und für die Integration von Differentialgleichungen verwertet.

Der Schwerpunkt der Untersuchungen des dritten Kapitels liegt in den folgenden Überlegungen.

Sei $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ eine beliebige Reihe, s_n die Summe der $n+1$ ersten Glieder, dann legen wir den Ausdruck zu Grunde

$$s = \lim_{a=\infty} \frac{s_0 + s_1 \frac{a}{1} + s_2 \frac{a^2}{1 \cdot 2} + s_3 \frac{a^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots}{1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{1 \cdot 2} + \cdots}.$$

Man kann diesen Ausdruck als verallgemeinerte Grenze der Zahlenreihe

$$s_0, \; s_1, \; s_2, \; \cdots$$

ansehen — im Falle der konvergenten Reihen fällt er mit dem gewöhnlichen Grenzbegriff zusammen, im anderen Falle ist er neu. Diese Gröfse s wird durch ein unmittelbar aufzustellendes bestimmtes Integral ausgedrückt. Hat dasselbe einen Wert, so nennt Herr Borel *die Reihe* $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ *summierbar*, s *ihren Wert, ihre Summe.* Ähnlich wie in der gewöhnlichen Reihentheorie werden zwei Arten von summierbaren Reihen unterschieden: die *absolut* summierbaren und die *nicht absolut* summierbaren. Die Untersuchung beschränkt sich auf die erste Kategorie, für welche die einfachsten Rechenoperationen abgeleitet werden.

Herr Borel wendet sich sodann zu Reihen von der Form:

$$\varphi(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \cdots,$$

bei denen also noch eine variable Gröfse z enthalten ist. Er beweist als fundamentalen Lehrsatz den folgenden: Man nehme an, dafs die Reihe als absolut summierbar sei für einen Punkt M mit den Koordinaten ϱ_0, ϑ_0, dann ist sie absolut summierbar für die Punkte

$$z = \varrho e^{i \vartheta_0}; \qquad (0 < \varrho < \text{[illegible]} < \varrho_0)$$

es stellt ferner ihre Summe eine analytische Funktion dar, welche keinen singulären Punkt im Kreise hat, der über OM als Durchmesser beschrieben ist. (O der Nullpunkt.) Im Anschlufs an diesen Satz werden ähnlich wie bei den vorigen speziellen Reihen die Operationen auseinandergesetzt, die man mit derartigen Reihen vornehmen kann, und dann einige Anwendungen auf die Differentialgleichungen gegeben.

Das vierte und fünfte Kapitel beschäftigen sich mit einer fundamentalen Frage der Funktionentheorie. Weierstrafs hat die Definition der analytischen Funktion gegeben und zwar auf Grund der Potenzreihe. Diese Definition, sowie die Darstellung der Funktionen in einzelnen Punkten der Ebene ist theoretisch einwandfrei, praktisch dagegen wenig anwendbar, da die Fortsetzungen der Potenzreihen zu grofsen Schwierigkeiten führen. Hier treten nun die Theorien ein, die in den beiden letzten Kapiteln auseinandergesetzt werden. Zunächst definiert Herr Borel in einer von der früheren verschiedenen Weise, was unter der *Summe* einer Potenzreihe, deren Konvergenzradius von Null verschieden ist, in einem Punkte $z = z_0$ zu verstehen

ist, wenn z_0 aufserhalb des Konvergenzbezirkes gelegen ist. *Es soll das nämlich der Wert sein, den die entsprechende analytische Funktion in diesem Punkte annimmt*, und zwar setzt Herr Borel als Weg im allgemeinen den geradlinigen von O bis z_0 voraus. Die Hauptfrage ist dann, in welchen Punkten die Reihen absolut summierbar sind, so zwar, dafs die beiden gegebenen Summendefinitionen zusammenfallen. Herr Borel findet für die entsprechenden Punkte das Innere resp. die Begrenzung eines eigenartig begrenzten Polygons, welches jedenfalls den Konvergenzbezirk in jedem nicht singulären Punkte überschreitet. In diesem Polygon kann dann die Summe der Potenzreihe nach den Methoden des vorigen Paragraphen berechnet werden, ein Resultat, auf dessen Wichtigkeit kaum aufmerksam gemacht zu werden braucht.

Da das Innere des Polygons bisweilen den Konvergenzbezirk nicht viel überschreitet, so verallgemeinert Herr Borel sein Verfahren und kommt dadurch zur Summation der Taylorschen Reihe in einem viel ausgedehnteren Bereiche — ein Verfahren, welches freilich, wie Herr Borel selbst bemerkt, in einigen Punkten bei der praktischen Durchführung zu Schwierigkeiten führt.

Anwendungen auf die Bestimmung der singulären Punkte einer vorgelegten Potenzreihe beschliefsen das inhaltreiche Kapitel, und zwar knüpfen diese Anwendungen an Arbeiten der Herren A. Pringsheim, Le Roy und Leau an.

In völlig anderer Weise behandelt Herr Mittag-Leffler dasselbe Problem. Derselbe denkt sich den Nullpunkt mit allen singulären Punkten einer analytischen Funktion durch gerade Linien verbunden und schliefst die Fortsetzung derselben bis in die Unendlichkeit von der Ebene aus. Das auf diesem Wege entstehende geometrische Gebilde nennt er einen Stern und zeigt, dafs und wie eine analytische Funktion durch eine unendliche Reihe von Polynomen dargestellt werden kann, die im Innern eines jeden im Innern des Sterns gelegenen Bereiches gleichmäfsig konvergiert. Die Konstruktion der Polynome ist eine einfache und durchsichtige und erfordert nur die Kenntnis der Differentialquotienten im Nullpunkt. Diese schönen Untersuchungen werden zunächst im fünften Kapitel wiedergegeben, sodann aber zeigt Herr Borel im Anschlufs an Arbeiten der Herren Runge, Hilbert und Painlevé, wie derartige Darstellungen von der Art der Mittag-Lefflerschen in unendlicher Fülle gegeben werden können. Freilich ist das Bildungsgesetz im allgemeinen nicht so durchsichtig wie bei Mittag-Leffler.

Einige Bemerkungen über die Beziehungen der Mittag-Lefflerschen Entwickelung zu der Theorie der divergenten Reihen schliefsen das inhaltreiche Werk, dessen Lektüre empfohlen werden kann.

Dresden. M. Krause.

Fr. Autenheimer, Elementarbuch der Differential- und Integralrechnung mit zahlreichen Anwendungen aus der Analysis, Geometrie, Mechanik und Physik; für höhere Lehranstalten und den Selbstunterricht. Fünfte verbesserte Auflage, bearbeitet von Alfred Donadt. Leipzig 1901, Bernh. Friedr. Voigt. X + 602 S. 8⁰.

Die Eigentümlichkeit des Lehrbuchs von Autenheimer liegt erstens in der grofsen Menge ausführlich durchgerechneter Aufgaben aus den ver-

schiedensten Gebieten, insbesondere auch aus der analytischen und technischen Mechanik, Physik und Geodäsie; sodann wird in dem Buche ein eigentümliches Ökonomieprinzip befolgt, das man auch vom rein wissenschaftlichen Standpunkt nur sympathisch ansehen kann. Der Verfasser stellt den Grundsatz auf, jede einzelne Aufgabe mit dem geringst möglichen Aufwande an theoretischen Hilfsmitteln zu lösen und dem Leser bei jeder vorgetragenen Lehre sobald wie möglich zu zeigen, was mit ihr geleistet werden kann.

Hieraus ergiebt sich eine ungewöhnliche Anordnung des Stoffes, die neuerdings in Werken von ähnlicher Tendenz nachgeahmt worden ist. Nach den ersten Elementen der Differentialrechnung und der Reihentheorie, bei denen über erste Ableitungen nicht hinausgegangen wird, folgt sofort eine gröfsere Sammlung wohl gewählter Maximums- und Minimumsaufgaben; ferner die üblichen Konstruktionen von Tangenten u. dgl. Sodann wird zum Begriff des Integrals und zu den einfachsten Integrationen übergegangen, und hier zeigt sich schon, dafs mit den erworbenen theoretischen Hülfsmitteln eine Menge der interessantesten Aufgaben behandelt werden kann. Die nun folgenden Abschnitte bilden den wertvollen Kern des Werkes; sie handeln von der Rektifikation und Quadratur ebener Kurven, von der Kubatur und Komplanation der Rotationsflächen, von der Bestimmung der Schwerpunkte und Trägheitsmomente, von verschiedenen dynamischen Aufgaben, insbesondere dem freien Fall mit und ohne Widerstand, von der Bestimmung der Arbeitsleistungen durch Integration, von verschiedenen Reibungserscheinungen, endlich von hydromechanischen Aufgaben und Bestimmungen von Potential und Attraktion. Jetzt erst wendet sich der Verfasser zum zweiten Teil der Differentialrechnung, den höheren Ableitungen, den Taylorschen Reihen nebst verschiedenartigen Anwendungen, endlich zu einem zweiten Teil der Integralrechnung, in welchem die Integration rationaler Brüche und einfache Differentialgleichungen behandelt werden.

Die Anordnung und Behandlung der Aufgaben zeugt von Autenheimers grofsem pädagogischem Geschick; das Buch bietet durchweg eine höchst anregende Lektüre, nicht nur für den Anfänger, sondern auch für den Mathematiker, der die praktische Tragweite der Infinitesimalrechnung einmal überschauen will. Der Herr Herausgeber der fünften Auflage hat die Aufgaben kontrolliert und vermehrt.

Die schwache Seite des ursprünglichen Werkes von Autenheimer war die Darstellung der allgemeinen Begriffe, ohne welche nun einmal ein verständnisvolles Operieren mit den Symbolen der Infinitesimalrechnung unmöglich ist. In dieser Beziehung hat der Herr Herausgeber das Buch, was mit Dank anzuerkennen ist, bedeutend verbessert. Hervorzuheben ist die klare und strenge, dabei doch auf das Nötigste beschränkte Theorie der Reihen, die sorgfältige Ableitung des Differentials des Logarithmus, die Restbestimmungen bei der Taylorschen Reihe, der strenge Beweis für die Vertauschbarkeit der Differentiationen bei Funktionen zweier Variablen. Der Herr Herausgeber hebt selbst hervor, dass man an manchen Punkten vielleicht noch gröfsere Strenge wünschen könnte; bei solchen Gelegenheiten erhebt sich ja leicht ein Konflikt mit den Ansprüchen an Verständlichkeit und Lesbarkeit des Lehrbuchs. Ich erlaube mir auf einige Punkte hinzuweisen, die der Verbesserung fähig sind, ohne dafs man den Kreis der sonst schon

in dem Werke gebrauchten Beweismittel zu überschreiten braucht, also ohne dafs die Verständlichkeit leidet.

Der wichtigste Fehler, der sich nicht nur in den früheren Auflagen des Werkes, sondern auch sonst vielfach findet, z. B. in den bekannten Werken von Lorentz und Nernst-Schoenflies, ist folgender. Bekanntlich ist die Grundthatsache der Integralrechnung, dafs man aus der Gleichung $du = 0$ folgern kann $u =$ const. Nun wird aber vermittelst der Differentialrechnung nur bewiesen, dafs aus der letzteren Gleichung die erstere folgt; der S. 90 gemachte Hinweis auf § 15 scheint auf einem Versehen zu beruhen, und leistet den für die Integralrechnung nötigen Beweis nicht. Dieser Fehler ist durch die Rücksicht auf die Verständlichkeit u. dgl. wohl kaum zu entschuldigen; dem Leser entgeht entschieden die Einsicht in das Wesen der Integralrechnung, wenn hier einfach hinreichende und notwendige Bedingung heimlich vertauscht wird, eine Verwechslung, die doch auch im praktischen Leben zu höchst bedenklichen Konsequenzen führen kann. Bekanntlich wird der Beweis des fraglichen Satzes auf Grund des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung geführt; da dieser vom Herrn Herausgeber an einer andern Stelle entwickelt wird, so würde der strenge Beweis nicht mehr als die so wie so schon gebrauchten Hilfsmittel erfordern.

Ein weiteres Bedenken erhebt sich S. 72, da beim Beweis des binomischen Satzes stillschweigend angenommen wird, dafs $(1 + x)^m$ stets nach Potenzen von x entwickelt werden kann; vielleicht wäre es hier angebracht, auf den später bewiesenen Taylorschen Satz zu verweisen. Ferner ist auch der Beweis des Satzes III S. 71 unvollständig, da nicht gezeigt ist, dafs die erhaltene Reihe wirklich der gesuchte Differentialquotient ist; hier wäre freilich die Heilung des Schadens wohl nur dadurch möglich, dafs die ganze Reihentheorie erst nach den Elementen der Integralrechnung oder wenigstens nach dem Mittelwertsatz behandelt würde.

Endlich ein paar Kleinigkeiten. Bei der Erklärung des Differentialquotienten scheint es mir gut, das verwirrende Symbol $0 : 0$ zu vermeiden. Die Definition des Grenzbegriffs S. 10 („nähert sich hierbei der Wert der Funktion mehr und mehr einer bestimmten, endlichen, konstanten Gröfse A, ohne diese *dem absoluten Betrage nach* überschreiten zu können . . .“) ist mit einem von Autenheimer herrührenden Fehler behaftet. — Gegen die mehrfach vorkommende Redeweise „Differentiieren in Hinsicht x“ mufs im Interesse einer reinen Sprache protestiert werden.

Mit diesen Ausstellungen soll aber der Wert des Buches und besonders das Verdienst des Herrn Herausgebers nicht herabgesetzt werden. Die Ausgleichung zwischen den Ansprüchen der Wissenschaft und des Unterrichts besonders solcher Studierenden, welche in erster Linie die Anwendungen der Mathematik im Auge haben, ist ein noch nicht gelöstes, schwieriges Problem, zu dessen Lösung der Herr Herausgeber einen dankenswerten Beitrag geleistet hat; das Buch von Autenheimer wird auch in der neuen Gestalt Lehrern und Lernenden willkommen sein.

Berlin. A. Kneser.

E. Hefs. Weitere Beiträge zur Theorie der räumlichen Konfigurationen. I. Die linearen Transformationen der Kleinschen Kf. $(60_{15}, 30_6)$ nach ihrer geometrischen Bedeutung nebst Anwendung auf regelmäfsige Gebilde des vierdimensionalen Raumes. II. Die Kf. $(60_{15}, 72_5)$[1]) und die ihr zugehörige Gruppe von linearen Transformationen nebst Übertragung auf die Hypersphäre und Anwendung auf die hierdurch bestimmten regelmäfsigen Gebilde des vierdimensionalen Raumes. (Nova acta Leopoldina **75**, 482 S. Halle 1899.)

Als gemeinsame Quelle der beiden in den vorliegenden Abhandlungen untersuchten Kff. kann die bekannte *Figur dreier Tetraeder in desmischer Lage* gelten. Beide Kff. enthalten desmische Systeme, und durch *ein* solches in ihr enthaltenes System ist die Kleinsche Kf. eindeutig, die Hefssche zweideutig bestimmt. Stephanos, welcher die desmische Figur zuerst eingehend studierte, erkannte auch ihren Zusammenhang mit der schon vorher von Klein gerundenen Kf. Bei ihm findet sich auch die Hefssche Kf. zuerst, aber nur beiläufig, erwähnt. Ihre Herleitung aus dem desmischen Tetraedersystem gab Hefs in seiner Arbeit über perspektive Dreiecke (Math. Ann. **28**). Diese sowie die vorliegende Abhandlung sind die einzigen, welche sich eingehend mit der in Rede stehenden Kf. befassen; dieselbe scheint also wenig bekannt zu sein, während die Litteratur über die Kleinsche Kf. einen beträchtlichen Umfang aufweist.

Ich will mich deshalb im folgenden vorzugsweise mit der Hefsschen Kf. beschäftigen. Das Symbol $(60_{15}, 72_5)$ charakterisiert sie als eine *Gruppierung von 60 Punkten, 60 Ebenen und 72 Geraden* von der Beschaffenheit, dafs *jeder Punkt (jede Ebene) mit 15 Ebenen (Punkten), jede Gerade mit 5 Punkten und 5 Ebenen incident ist.* Um diese Gruppierung deutlicher zu übersehen, empfiehlt es sich, zur Bezeichnung der Kf.-Punkte diejenigen $\frac{5!}{2} = 60$ Anordnungen von 5 Elementen 1, 2, 3, 4, 5 in der sogleich genauer anzugebenden Weise zu verwenden, welche aus einer von ihnen, etwa 12345, durch eine gerade Anzahl von Transpositionen abgeleitet werden. Die so erhaltenen 60 Anordnungen werden durch die alternierende Permutationsgruppe der Elemente 1, 2, 3, 4, 5 nur unter einander vertauscht. Es besteht aber diese Gruppe, abgesehen von der Identität, aus:

1) 15 Operationen $(i)\,(kl)\,(mn)$ von der Ordnung 2,
2) 20 „ $(i)\,(k)\,(lmn)$ „ „ „ 3,
3) 24 „ $(iklmn)$ „ „ „ 5.

Sind nun die 60 Punkte der Kf. zweckmäfsig durch die 60 Anordnungen bezeichnet, so können wir ihre Gruppierung folgendermafsen beschreiben:

1) Die 15 Punkte, welche aus einem Punkte durch die Permutationen 2. Ordnung hervorgehen, liegen in einer Ebene. — So wird jedem Punkte eine Ebene zugewiesen, und man erhält die 60 Ebenen der Kf.

2) und 3) Ist τ eine Permutation 3. (5.) Ordnung, so gehen durch ihre Wiederholungen τ, τ^2, τ^3 (τ, τ^2, τ^3, τ^4, τ^5), deren letzte die Identität darstellt, aus einem Punkte 3 (5) Punkte hervor, welche auf einer Geraden $g^{(3)}$ ($g^{(5)}$) liegen.

1) Diese Kf. wird im Referat als „Hefssche“ zitiert.

Jede dieser drei Eigenschaften genügt, um die Kf. zu charakterisieren; aus jeder von ihnen lassen sich also alle Eigenschaften der Kf., insbesondere auch sehr leicht die beiden anderen aufgeführten herleiten. Es giebt 200 Geraden $g^{(3)}$ (72 Geraden $g^{(5)}$), jede ist mit 3 (5) Kf.-Punkten und ebensovielen Kf.-Ebenen incident, während durch jeden Punkt (in jeder Ebene) 10 Geraden $g^{(3)}$ und 6 Geraden $g^{(5)}$ gehen (liegen). — Die 24 Operationen 5. Ordnung sind nicht alle von derselben Art. Wie nämlich die sämtlichen 120 Anordnungen $iklmn$ in zwei Klassen zerfallen, so kann man auch zwei Klassen von Operationen $(iklmn)$ unterscheiden. Diese beiden Klassen haben auch eine verschiedene geometrische Bedeutung. Jede Gerade $g^{(5)}$ nämlich wird durch die 5 Kf.-Punkte auf ihr in 5 *Primärstrecken* (nach Eberhards Terminologie) zerlegt, und es läfst sich nun leicht ersehen, dafs durch die Operationen der einen Klasse die Punkte auf den Geraden $g^{(5)}$ in der Weise cyklisch vertauscht werden, dafs jeder Punkt um eine Primärstrecke rückt, während die Operationen der anderen Klasse eine Verschiebung um zwei Primärstrecken bewirken. Welche Klasse aber die Verschiebungen der ersten, welche die der zweiten Art hervorruft, kann natürlich aus der Bezeichnung nicht a priori abgelesen werden, sondern bedarf erst der Festsetzung.

Aus der unter 1) angeführten Zuordnung der Punkte und Ebenen der Kf. ist ihr reziproker Charakter leicht zu erschliefsen. *Es existiert nun ein bestimmtes Polarsystem π, welches jeden Kf.-Punkt mit der ihm zugewiesenen Ebene vertauscht. Die Ordnungsfläche F dieses Polarsystems ist imaginär.*

Von nun an möge jede Anordnung $iklmn$ der 5 Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 durch das Symbol $a_{1i}a_{2k}a_{3l}a_{4m}a_{5n}$ ersetzt werden. Dann knüpft die Beschreibung der Kf. an das Schema der *Determinante*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

an, *deren 60 positive Terme* nunmehr *die Kf.-Punkte bezeichnen.* Den *25 Elementen* der Determinante entsprechen *25* in der Kf. enthaltene *desmische Systeme.* Die 12 positiven Terme nämlich, welche ein bestimmtes Element a_{ik} enthalten, liefern die Ecken dreier desmischer Tetraeder.[1]) Man erhält somit 75 Tetraeder, welche, wie sich weiter zeigt, Poltetraeder im System π sind. — Die oben besprochene Permutationsgruppe stellt sich jetzt dar als die *alternierende Gruppe von Kolonnenpermutationen.* Als völlig gleichberechtigt tritt neben diese die *alternierende Gruppe der Zeilenpermutationen.* Beide zusammen erzeugen als ihr direktes Produkt eine *Gruppe von $60 \cdot 60 = 3600$ Operationen*, welche sämtlich die positiven Determinantenterme nur unter einander vertauschen. *Die entsprechenden Vertauschungen der Kf.-Punkte werden durch ebensoviele Kollineationen ver-*

1) Über die desmischen Systeme in ihrem Zusammenhang mit der hier eingeführten Bezeichnung vgl. die Abh. des Ref. „Die Geraden der Reyeschen Kf.“ Arch. f. M. u. Ph. (3) **1**, 124.

wirklicht, und demgemäfs hat man zunächst eine Gruppe G von 3600 Kollineationen, welche die Kf. in sich selbst überführen. Dieselben sind *eigentliche* (d. h. die Transformationsdeterminante ist positiv); *sie lassen die Fundamentalfläche F invariant* und zwar in der Weise, dafs jede der beiden (imaginären) Regelscharen in sich übergeht. Es giebt ferner noch 3600 *uneigentliche* Kollineationen, welche die Kf. und F invariant lassen, dabei aber die beiden Regelscharen von F mit einander vertauschen. Die zugehörigen Permutationen der Kf.-Punkte werden im Schema der Determinante durch Vertauschungen der Zeilen mit den Kolonnen angezeigt. Natürlich kommen nur solche Vertauschungen in Betracht, bei denen die bisherigen Zeilen (und ebenso Kolonnen) in ihrer neuen Stellung eine Reihenfolge aufweisen, welche aus der ursprünglichen durch eine gerade Anzahl von Transpositionen hervorgeht. Indem man endlich die 7200 Kollineationen mit dem Polarsystem π zusammensetzt, erhält man ebensoviele zur Kf. gehörige *Korrelationen*. Damit sind aber auch alle linearen Transformationen der Kf. in sich erschöpft.

Diejenigen beiden Gruppen von je 60 eigentlichen Kollineationen, welche durch blofse Kolonnen- bez. blofse Zeilenpermutationen ausgedrückt werden, sind den beiden Regelscharen von F in der Weise koordiniert, dafs durch die Operationen einer solchen Gruppe immer nur die Elemente der einen Regelschar permutiert werden, die der anderen aber sämtlich fest bleiben. Hierdurch tritt der Zusammenhang dieser Untersuchungen mit der *Theorie der endlichen Gruppen linearer Substitutionen einer* (komplexen) *Veränderlichen* (bez. projektiver Verwandtschaften eines Gebildes erster Stufe — in unserem Falle einer Regelschar —) und der Theorie der *regulären Körper* in Evidenz; und zwar haben wir hier *Ikosaedergruppen* vor uns. — Somit wird durch die Hefssche Kf. eine Fläche F vom zweiten Grade und weiterhin auf jeder ihrer Regelscharen eine Ikosaedergruppe bestimmt. Umgekehrt gehört aber auch zu jeder Fläche F und zwei auf ihren Regelscharen willkürlich angenommenen Ikosaedergruppen eine bestimmte Hefssche Kf.

Von den in der Gruppe der Kf. enthaltenen Untergruppen hat Hefs als besonders wichtig diejenigen hervorgehoben, bei welchen nach der hier gewählten Bezeichnung ein *negativer Determinantenterm invariant* bleibt. Eine solche Gruppe enthält 60 eigentliche und ebensoviele uneigentliche Kollineationen, durch welche 5 bestimmte Punkte des Raumes auf alle möglichen Arten permutiert werden. Diese 5 Punkte sind den 5 Elementen, aus denen sich der Determinantenterm zusammensetzt, in bestimmter Weise zugeordnet. *Man hat den 60 negativen Termen entsprechend $60 \cdot 5 = 300$ solche Punkte.* Dieselben ergeben sich als die Punkte derjenigen 25 desmischen Systeme, welche zu den 25 desmischen Systemen der Kf. konjugiert (im Sinne von Stephanos) sind. In jedem von ihnen laufen 4 Geraden $g^{(3)}$ und 6 Kf.-Ebenen zusammen, ein vollständiges Vierkant bildend.

Ein weiteres Interesse gewinnt die Kf. in ihrer Verbindung mit der *elliptischen* oder *sphärischen Geometrie*. Die erstere zu erhalten, wählt man die imaginäre Fläche F zur *Fundamentalfläche für die elliptische Mafsbestimmung*, d. h. man nennt zwei Gebilde „*kongruent*“ bez. „*symmetrisch*“, wenn sie durch eine *eigentliche* bez. *uneigentliche*, die Fläche F invariant lassende Kollineation in einander übergehen. Diese Kollineationen selbst heifsen dann *Bewegungen* bez. *symmetrische Operationen*. Durch die 60 Kf.-

Ebenen wird der Raum in 7200 *Elementartetraeder* zerlegt, welche nunmehr alle kongruent bez. symmetrisch sind. Um jeden der oben erwähnten 300 Punkte liegen 24 Elementartetraeder, durch deren Zusammenfassung ein *reguläres Tetraeder* entsteht, welches den Punkt zum Zentrum, zu Ecken Kf.-Punkte, zu Kanten Primärstrecken aus Geraden $g^{(5)}$ besitzt. Die 300 so entstehenden regulären Tetraeder sind kongruent und füllen den ganzen Raum genau einmal aus. Ebenso sind die Ecken der erhaltenen Gebietseinteilung regulär und kongruent. Eine andere derartige Gebietseinteilung, nämlich in 60 kongruente *reguläre Dodekaeder*, erhält man durch Zusammenfassen der um einen jeden Kf.-Punkt herumliegenden 120 Elementartetraeder. Alle diese Verhältnisse lassen sich am Schema der Determinante leicht verfolgen.

Will man statt der *elliptischen* die *sphärische Geometrie* zur Betrachtung heranziehen, so hat man in einem vierdimensionalen ebenen Raume R_4 einen dreidimensionalen sphärischen Raum S_3 *(Hypersphäre)* anzunehmen. Nun enthält aber R_4 einen ebenen unendlich fernen Raum $R_3^{(\infty)}$ von 3 Dimensionen, welcher von S_3 in einer imaginären zweidimensionalen Fläche F zweiten Grades geschnitten wird. Werden aus dem Zentrum O von S_3 die Punkte, Geraden und Ebenen von $R_3^{(\infty)}$ auf S_3 projiziert, so ergiebt sich als Abbildung jedes Punktes ein Gegenpunktepaar, während die Geraden und Ebenen von $R_3^{(\infty)}$ auf S_3 Hauptkreise und Hauptkugeln liefern. Jede *Drehung* von S_3 um O ruft auf $R_3^{(\infty)}$ eine eigentliche Kollineation hervor, welche F ungeändert läfst, während die entsprechenden uneigentlichen Kollineationen durch *Spiegelungen* von S_3 an einem äquatorialen ebenen Raume R_3 in Verbindung mit Drehungen geliefert werden. Wird jetzt in $R_3^{(\infty)}$ eine zu F gehörige Hefssche Kf. konstruiert, so giebt ihre Übertragung auf S_3 ein *reguläres sphärisches Netz* mit der doppelten Anzahl von Punkten, Kanten, Tetraedern u. s. w. Werden schliefslich die sphärischen Kanten und Grenzflächen durch ebene ersetzt, so ergeben sich zunächst zwei reguläre Polytope (d. h. Begrenzungen regulärer vierdimensionaler Körper): das *600-Zell* aus 600 Tetraedern und das *120-Zell* aus 120 Dodekaedern bestehend.

Die 600 Ecken des letzteren, welche den oben erhaltenen 300 Punkten entsprechen, zerfallen wie diese in Gruppen zu je 5, die einander paarweise als Gegengruppen entsprechen. Jede solche Gruppe besteht aus den Ecken eines regulären *5-Zells.* Aber auch die drei übrigen regulären Polytope ergeben sich aus der Hefsschen Kf. Werden die drei Tetraeder eines desmischen Systems oder nur zwei oder endlich nur eines von ihnen auf S_3 übertragen, so ergeben sich im ersten Falle die 24 Ecken des reg. *24-Zells*, im zweiten die 16 Ecken des reg. *8-Zells*, im dritten die 8 Ecken des reg. *16-Zells.*

Die drei zuletzt genannten reg. Polytope ergeben sich auch bei Betrachtung der Kleinschen Kf., da diese ja desmische Systeme enthält. Zur Kleinschen Kf. gehört eine Gruppe von 11 520 Kollineationen und ebensovielen Korrelationen, welche aber wie die Kf. selbst (im Gegensatz zur Hefsschen) nicht vollständig reell sein kann. Die geometrische Deutung der einzelnen Operationen und die Untersuchung der in ihrer Verbindung auftretenden Flächen zweiten und Komplexe ersten und zweiten Grades machen den wesentlichen Inhalt der ersten Abhandlung aus.

Charlottenburg, d. 21. September 1901. E. Steinitz.

Ernst Rudert. Über kleine Kugelkreise. Eine Anwendung von Grafsmanns Ausdehnungslehre. Dissertation (Leipzig). Leipzig. B. G. Teubner. 1900. 37 S. 4⁰.

Die vorliegende Arbeit bildet die Fortsetzung einer Programm-Abhandlung (3. Städt. Realschule zu Leipzig, 1899), in welcher der Verfasser gezeigt hat, wie die Grafsmannsche Ausdehnungslehre die Mittel liefert, um für die Geometrie der Kugelfläche die Gröfsen- wie die Lagenbeziehungen der Gebilde mit gleicher Leichtigkeit und Einfachheit zur Darstellung zu bringen. Unter den verschiedenen Methoden der Ausdehnungslehre würde die Punktrechnung den direktesten Weg zu diesem Ziele bilden. Aber im Interesse einer möglichst compendiösen elementaren Begründung der erforderlichen Hauptgesetze und Rechnungsregeln hat der Verfasser nach dem Vorgange Peanos die Streckenrechnung zu Grunde gelegt, in welcher der nach einem Kugelpunkte führende Radius als Vektor zur Darstellung dieses Punktes benutzt wird. Es können dann die erforderlichen Rechnungsgesetze aus einfachen geometrischen Beziehungen entwickelt werden, während bei Grafsmann umgekehrt diese Gesetze begründet und nachher auf die geometrischen Gebilde angewendet werden.

Während die Sätze der sphärischen Trigonometrie den Schlufs der ersten Abhandlung bildeten, behandelt der Verfasser in den zwei Abschnitten der vorliegenden Arbeit den Kreis auf der Kugel und seine Beziehungen zu anderen Kreisen, sowie zu den Dreiecken. Als „kleiner Kugelkreis“ oder „Nebenkreis“ (P, ϱ) wird jeder Kreis auf der Kugel bezeichnet, wobei ϱ $\left(<\frac{\pi}{2}\right)$ den Bogenabstand jedes Kreispunktes (X) von dem sphärischen Mittelpunkte (P) bedeutet. Da aber P und X gleichzeitig die Vektoren dieser Punkte darstellen, so liefert die Grafsmannsche Definition des inneren Produkts zweier Strecken sofort die Gleichung des Kreises in der Form: $P \mid X = \cos \varrho$. An die Stelle der Sekanten und Tangenten der ebenen Geometrie treten hier schneidende und berührende Hauptkreise. In entsprechender Weise findet die Übertragung zahlreicher anderer Begriffe der ebenen Kreisgeometrie statt, u. a. der Potenzen, Orthogonalkreise, Kreis- und Polarnetze, Ähnlichkeitspunkte und -Linien, Centralen, Kreisgebüsche, Kreisbüschel u. s. w. — Der zweite Abschnitt behandelt in gleicher Weise die den sphärischen Dreiecken ein- und umbeschriebenen Kreise. — Überall wird der Fortschritt der in einfachen Formeln sich vollziehenden Rechnung, in der die innere Multiplikation naturgemäfs die Hauptrolle spielt, unmittelbar von den geometrischen Resultaten begleitet, und so kommt ein übersichtlicher Aufbau der sphärischen Kreisgeometrie zu Stande, dem sich für den Leser die gewohnte Form der ebenen Kreisgeometrie von selbst orientierend und zum Vergleich auffordernd zur Seite stellt. — Auch die verwandten Arbeiten anderer Forscher aus älterer und neuerer Zeit werden berücksichtigt, und einzelne, z. B. bei Gudermann und Steiner vorkommende Unrichtigkeiten verbessert.

Hagen i. W. V. Schlegel.

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze.

55. Erwünscht sind möglichst einfache Beweise der folgenden Sätze.

Eine ebene Kurve $\mathfrak{C}$, welche die Punkte A und B verbindet, umschliefse mit der geraden Strecke AB ein Gebiet $\mathfrak{G}$ und sei so beschaffen, dafs jede von zweien ihrer Punkte begrenzte gerade Strecke ganz im Innern oder auf der Grenze des Gebiets $\mathfrak{G}$ verläuft. Dieselbe Beschaffenheit habe eine zweite, die Punkte A und B verbindende ebene Kurve; verläuft dieselbe ganz im Gebiet $\mathfrak{G}$, so ist sie kürzer als $\mathfrak{C}$.

Eine Oberfläche $\mathfrak{F}$ werde durch eine ebene geschlossene Kurve $\mathfrak{K}$ begrenzt, und umschliefse mit der innerhalb der Kurve $\mathfrak{K}$ liegenden ebenen Fläche das Gebiet $\mathfrak{R}$; sie sei ferner so beschaffen, dafs jede von zweien ihrer Punkte begrenzte gerade Strecke ganz im Innern oder auf der Grenze des Gebiets $\mathfrak{R}$ verläuft. Dieselbe Beschaffenheit habe eine zweite, durch die Kurve $\mathfrak{K}$ begrenzte Oberfläche; verläuft dieselbe ganz im Innern des Gebiets $\mathfrak{R}$, so hat sie kleineren Flächeninhalt als $\mathfrak{F}$.

Diese Sätze besagen im wesentlichen dasselbe wie die Postulate 2, 3 in Verbindung mit den Definitionen 2, 4 im ersten Buche der Schrift von Archimedes über Kugel und Cylinder. (Opera ed. Heiberg Bd. I, S. 7, 9.)

Berlin. A. Kneser.

---

56. Um einen bequemen Eingang in die Theorie der algebraischen Kurven vom Geschlechte 1 zu gewinnen, wähle man in einer ebenen Kurve 3. Ordnung (ohne Doppelpunkt) einen Punkt A und ziehe in ihm die Tangente, welche die Kurve noch in B schneiden möge; ebenso liefere die Tangente in B den dritten Punkt C. Wird nun das Dreieck ABC als Fundamentaldreieck homogener Koordinaten x, y, z angesehen, so soll die Kurvengleichung aufgestellt und daraus direkt bewiesen werden, dafs die Kurve in der Form dargestellt werden kann:

$$\begin{aligned} x &= \lambda\sigma^2(u)\,\sigma(u-v),\\ y &= \mu\sigma^2(u-v)\,\sigma(u+v),\\ z &= \nu\sigma(u)\,\sigma(u+v)\,\sigma(u-2v),\end{aligned}$$

wobei u ein veränderlicher Parameter, v, λ, μ, ν Konstanten sind, und wobei die Invarianten g_2 und g_3 der zugehörigen Funktion $\wp(u)$ nichts anderes

sind als die Aronhold-Sylvesterschen Fundamental-Invarianten der die Kurve darstellenden ternären kubischen Form.

Man suche eine analoge Darstellung für die Raumkurven vierter Ordnung erster Art.

Berlin. Rich. Müller.

---

57. Man untersuche die hin- und hergehende Bewegung eines schweren und elektrischen Punktes, der von einem senkrecht unter ihm befindlichen festen, gleichnamig elektrischen Punkte nach dem Coulombschen Gesetze abgestofsen wird. (Angenähert veranschaulicht durch eine kleine Korkkugel oberhalb eines kugelförmigen Konduktors.)

Wenn das absolute *C-G-S*-System zugrunde gelegt wird, und alsdann g die Fallbeschleunigung, m die Masse des beweglichen Punktes, ε_1 und ε_2 die beiden elektrostatischen Ladungen, x den variablen Abstand des beweglichen Punktes vom festen Punkte zur Zeit t, h und h' den kleinsten resp. gröfsten Wert dieses Abstandes bezeichnen, so soll nachgewiesen werden, dafs:

$$h \cdot h' = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{mg}, \tag{1}$$

$$x = h \left[\frac{\sigma_3(u)}{\sigma_2(u)}\right]^2, \tag{2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt[3]{4}\sqrt{\tfrac{1}{2}g}\,(h' - h)\frac{\sigma(u)\,\sigma_1(u)}{\sigma_2(u)\,\sigma_3(u)}, \tag{3}$$

$$t = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{\tfrac{1}{2}g}}\left[e_1 u + \frac{\sigma_2'(u)}{\sigma_2(u)}\right] \tag{4}$$

ist.

Welches sind die Konstanten e_1, e_2, e_3 und die Invarianten g_2, g_3 der zugehörigen Funktion $\wp(u)$? Man berechne die Schwingungsdauer für ein numerisches Beispiel.

(Ueber die Bezeichnung vergleiche man die von Herrn H. A. Schwarz herausgegebenen „Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen". Göttingen 1883 oder zweite Ausgabe Berlin 1893).

Berlin. Rich. Müller.

---

58. Integration der Differenzialgleichung $x^{2n}\frac{d^n y}{dx^n} \pm k^2 y = 0$. Bei der Lösung setze man $x^{n-1} e^{\frac{\alpha}{x}} = y$ und beweise, dafs die $n$te Ableitung, also $\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{(-1)^n \alpha^n e^{\frac{\alpha}{x}}}{x^{n+1}}$ ist.

Herzberg a. Harz. Adolf Francke.

---

59. Sind $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$ drei beliebige Kurven zweiter Klasse, so giebt es in dem Gewebe

$$\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \lambda_3 \varphi_3 = 0$$

stets vier Kreise, deren Centra die Schnittpunkte zweier gleichseitigen Hyperbeln sind.

Darmstadt, 20. April 1902. S. Gundelfinger.

---

60. Sind $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\cdots$, $\varphi_6 = 0$ irgend sechs linearunabhängige Flächen zweiter Klasse, so giebt es in der fünffach unendlichen Schar

$$\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \cdots + \lambda_6 \varphi_6 = 0$$

acht Kugeln, deren Centra die Schnittpunkte dreier orthogonalen Hyperboloide sind.

Darmstadt, 20. April 1902. S. Gundelfinger.

---

61. Das Maximum des Abstandes je zweier Randpunkte eines gewöhnlichen Vielecks sei als *Durchmesser* desselben bezeichnet. Der Durchmesser eines Vielecks ist entweder eine Seite oder eine Diagonale desselben; im letzteren Falle braucht er nicht aus lauter Innenpunkten des Vielecks zu bestehen. Es wird behauptet: „*Der Inhalt eines jeden Vielecks von gegebenem Durchmesser a ist kleiner als der Inhalt des Kreises vom Durchmesser a*, d. i. als $\pi a^2/4$."

Innsbruck. O. Stolz.

B. Lösungen.

Zu **37**. (Bd. II, S. 356.) (S. Gundelfinger.) Besitzt Q die Koordinaten a, b und zieht man durch Q irgend eine Sekante unter dem Winkel α gegen die positive x-Achse, so wird für jeden Punkt P auf dieser Sekante

$$x = a + t \cos \alpha, \qquad y = b + t \sin \alpha,$$

also speziell zur Bestimmung der positiven oder negativen Entfernungen t_k $(k = 1, 2, 3, \ldots, 2n)$ eines der Punkte $P_1, P_2, \cdots, P_{2n}$ von Q:

$$f(a, b) + t\left\{\cos \alpha \frac{df(a, b)}{\partial a} + \sin \alpha \frac{df(a, b)}{\partial b}\right\} + \cdots + t^{2n} (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^n = 0.$$

Also: $QP_1 \cdot QP_2 \cdots QP_{2n} = t_1 \cdot t_2 \cdots t_{2n} = f(a, b)$, d. h. unabhängig von dem Winkel α.

Darmstadt, 7. Mai 1901.

Der vorstehende Beweis dürfte auch jetzt noch der Mitteilung wert sein, weil aus demselben die Zeichenregel für die QP_i resp. Qp_i, vor allem aber die vollständige Analogie mit der Kreislehre folgt. Nennt man z. B.

$QP_1 \cdots QP_n$ die Potenz des Punktes Q in Bezug auf die Kurve $f(x, y) = 0$, so gilt u. a. das Theorem:

Der geometrische Ort aller Punkte, welche in Bezug auf zwei koachsiale Lemniskaten gleiche Potenz besitzen, ist eine gleichseitige Hyperbel (für die spezielle Lemniskate das System der beiden Winkelhalbierenden).

Hat die Gleichung $f(x, y) = 0$ als Glieder der $2n$-ten Ordnung nur den Term $(x^2 - y^2)^n$, so wird

$$QP_1 \cdot QP_2 \cdots QP_n = (-1)^n\, Qp_1 \cdot Qp_2 \cdots Qp_n,$$

sobald die beiden durch Q gezogenen Geraden normal zu einander sind.

Darmstadt, den 20. April 1902. S. Gundelfinger.

Zu **50.** (Bd. III. S. 170) (E. N. Barisien). Sei Y der gesuchte Ähnlichkeitspunkt gleicher Art mit S. Dann gilt die Proportion $YB : YB_1 = AB : A_1B_1$. Sind r und r_1 die Radien der gegebenen Kreise, so ist $SB : SB_1 = r : r_1$. Verbindet man A und B mit C, ferner A_1 und B_1 mit C_1, so erhält man zwei ähnliche Dreiecke ABC, ferner $A_1B_1C_1$, da die entsprechenden Seiten parallel sind, resp. auf einander fallen. Demnach ist $AB : A_1B_1 = r : r_1$ und folglich $YB : YB_1 = SB : SB_1$, was nur möglich ist, wenn Y und S auf einander fallen, da beide Punkte zwischen B und B_1 liegen müssen.

Sei S_1 der zweite Ähnlichkeitspunkt der gegebenen Kreise und X der gesuchte Ähnlichkeitspunkt zweiter Art der Kreise über AB und A_1B_1 mit den Mittelpunkten M und M_1. Dann sind die Punkte CSC_1S_1 vier harmonische Punkte, ebenso die Punkte ASM_1X. Wir beziehen die beiden Punktreihen so auf einander projektiv und perspektiv, dafs einander zugeordnet sind: M und C, M_1 und C_1, S und S; dann entsprechen sich auch X und S_1. Das Centrum der Perspektivität ist der unendlich ferne Punkt, da CM und C_1M_1 senkrecht auf AB stehen; folglich ist auch XS_1 senkrecht auf der Sehne. Der gesuchte Ort für X ist der Kreis über SS_1 als Durchmesser.

Einbeck. R. Neuendorff.

---

2. Anfragen.

Zusatz zu der Anfrage 5 dieses Bandes auf S. 85.

Für den speziellen Fall der im Archiv **3**, S. 85, 5 behandelten Aufgabe, wo der Punkt R auf der Halbierungslinie (t) des Winkels pTq liegt, habe ich folgende Konstruktionen mittels Lineals und Zirkels gefunden:

a) Für *vier* mögliche Lösungen, d. h., wo $d > 2 \cdot \overline{RO}$ ist. Man ziehe durch R eine Senkrechte r zur Halbierungslinie t. Der Schenkel q wird von r in O geschnitten. Man mache auf r $\overline{RO} = \overline{OS}$ und errichte in S eine Senkrechte s auf r. Man beschreibe aus R mit der gegebenen Länge d einen Kreis k, welcher von t und s (auf ders. Seite von r) in A und B

geschnitten wird. Die Gerade AB giebt im Schnitt mit r den Punkt M. Man beschreibe über $\overline{MR}$ als Durchmesser einen Kreis k_1. Aus R fälle man eine Senkrechte auf p und trage auf dieser den Abstand $\overline{RP}$ des Punktes R von p bis N auf $(\overline{RP} = \overline{RN})$. Von N fälle man eine Senkrechte n auf r, welche k_1 in N_1 und N_2 schneidet. Die Verbindungslinien MN_1 und MN_2 schneiden den Kreis k in den Punkten 1, 2, 3, 4, welche, mit R verbunden, die gesuchten Transversalen liefern.

b) Für *drei* mögliche Lösungen, d. h., wo $d = 2 \cdot \overline{RO}$ ist. Der Kreis k geht hier durch S. Der Kreis k_1 ist der über $\overline{RS}$ als Durchmesser beschriebene. Sonst ist die Konstruktion völlig gleich der vorigen.

c) Für *zwei* mögliche Lösungen, d. h., wo $d < 2 \cdot \overline{RO}$ ist. Man bestimme wie vorher die Gerade n, und beschreibe wieder aus R den Kreis k. Der über $\overline{RS}$ als Durchmesser beschriebene Halbkreis k' schneidet k in einem Punkt W. Aus dem Schnittpunkt von n und r beschreibe man einen Kreis k_1, welcher durch W geht. Dieser schneidet r in zwei Punkten, von welchen der eine V stets innerhalb, der andere U stets aufserhalb des Winkels pTq zu liegen kommt. Die im ersteren (V) auf r errichtete Senkrechte trifft den Kreis k in den Punkten 1 und 2, welche, mit R verbunden, die gesuchten Transveralen bestimmen.

Agram. G. Majcen.

Antwort auf die Anfrage **6** *dieses Bandes auf S. 85.*

Wie Herr G. Rados aus Budapest die Güte hatte mir mitzuteilen, ist der in der Anfrage 6 angegebene Satz bereits von ihm aufgestellt worden. Vgl. Zur Theorie der orthogonalen Substitutionen. Math. u. Naturw. Ber. aus Ungarn 1892, 95—97; Über die Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten der orthogonalen Substitutionen. A. a. O. 1899, 236—240.

Berlin. E. Jahnke.

---

3. Kleinere Notizen.

Bemerkungen zu dem Aufsatz von Herrn C. Koehler: „Über die Klassifikation der Kurven und Flächen zweiten Grades“ auf S. 21—33 und S. 94—111.

1. Herr Koehler beruft sich (l. c. S. 21, Anm. 2) auf einen Auszug aus Vorträgen, welche ich Herrn Brückel zum Zwecke der Herausgabe gehalten, und welche dieser vereinbartermafsen im Journal für Math. **119**, 210 ff. mitgeteilt hat. Wie Herr Brückel l. c. S. 210—211 hervorhebt, sind speziell die Kriterien der Flächen 2. O. und ihrer Schnitte mit Ebenen dem *Inhalte* nach die gleichen, die ich bereits 1876 in Hesses analyt. Geometrie des Raumes (Suppl. II) gegeben habe.

In der That gehen die von mir gebrauchten Gröfsen $f(y, y)$ und $f(y, y) f(2z) - f^2(y, z)$ (Brückel l. c. p. 214) aus den in Suppl. II von

Hesses Raumgeometrie eingeführten $\binom{puv}{puv}$ und $\binom{pu}{pu}$ mutatis mutandis hervor, wenn man $p_y = 0$, $u_y = 0$, $v_y = 0$ und $p_z = 0$, $u_z = 0$ annimmt.

2. In einem nachträglichen Zusatz zu S. 22, Z. 12 v. o. seiner „Klassifikation etc." erwähnt Herr Koehler neben der Abhandlung des Herrn Frobenius (Berl. Sitzungsber. 1894, S. 245 f.) auch meiner Arbeit im Journal von Crelle **91**, S. 229 (1881). Richtig ist allerdings, daſs auch ich unabhängig von Herrn Frobenius den Satz gefunden hatte: „Ist r der Rang eines symmetrischen Systems, so giebt es in demselben eine nicht verschwindende Hauptunterdeterminante vom Grade r." (Man vergl. die Andeutung in Suppl. I zu Hesses Raumgeometrie S. 454, Z. 1—6.) *Den ersten ausgeführten Beweis hat jedoch Herr Frobenius bereits in Crelles Journal* ***82****, S. 242 gegeben,* dem ich erst später ebendaselbst **91**, S. 229 zwei weitere hinzugefügt habe.

3. Den Begriff des Ranges einer symmetrischen Determinante mit dem Trägheitsgesetz der quadratischen Formen in Verbindung zu setzen, muſste jedem Kenner der algebraischen Theorie der Flächen 2. O. als selbstverständlich erscheinen, besonders im Hinblick auf die Werke von Möbius, Plücker und eine Abhandlung aus dem Nachlasse Jacobis (Journal von Crelle **53**, S. 275). Schwierigkeiten konnte nur die strenge Durchführung der Beweise für *alle* Fälle bereiten. Diese Durchführung dürfte wohl zum ersten Male in Supplement I zu Hesses Raumgeometrie von mir gegeben worden sein. (Man vergl. die Zusammenfassung auf S. 459, Z. 13—1 v. u.)

4. In der Anmerkung 2 auf S. 34 seiner „Klassifikation" giebt Herr Koehler eine hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung, um eine Fläche zweiter Ordnung als reell zu charakterisieren. Die hinreichenden und notwendigen Bedingungen für eine *imaginäre* Fläche im Raume von n Dimensionen lassen sich nach meinen Entwicklungen auf S. 225—229 in Crelles Journal **91** folgendermaſsen aussprechen.

Verschwinden sämtliche Subderminanten $(r+1)$ten Grades der quadratischen Form

$$f \equiv \sum_{\varkappa} \sum_{\lambda} a_{\varkappa\lambda} x_{\varkappa} x_{\lambda} \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n),$$

ist dagegen irgend eine bestimmte Hauptunterdeterminante $r$ten Grades von Null verschieden, etwa

$$\sum \pm (a_{\alpha\alpha} a_{\beta\beta} \cdots a_{\varepsilon\varepsilon}),$$

so nimmt f Zahlenwerte mit gleichem Vorzeichen (die Null nicht ausgeschlossen) stets dann und nur dann an, wenn die Reihe

$$1, \qquad a_{\alpha\alpha}, \quad \sum \pm (a_{\alpha\alpha} a_{\beta\beta}), \cdots, \sum \pm (a_{\alpha\alpha} a_{\beta\beta} \cdots a_{\varepsilon\varepsilon})$$

lauter Zeichenwechsel oder lauter Zeichenfolgen darbietet. Überdies darf kein Glied der Reihe verschwinden.

Der von mir l. c. gegebene Beweis und noch kürzer meine Entwicklungen auf S. 215 in Bd. **2** dieses Archivs zeigen auch, *daſs f sein Zeichen wechseln kann, sobald auch nur eine einzige Hauptunterdeterminante von $\sum \pm (a_{\alpha\alpha} a_{\beta\beta} \cdots a_{\varepsilon\varepsilon})$ verschwindet.*

Ist z. B. für eine Fläche zweiter Ordnung

$$f \equiv \sum_{k,\lambda} a_{k\lambda} x_k x_\lambda = 0 \qquad (k, \lambda = 1, 2, 3, 4),$$

$$\sum \pm (a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}) = 0$$

dagegen etwa

$$A_{11} = \sum \pm (a_{22} a_{33} a_{44}) \neq 0,$$

so stellt $f = 0$ einen imaginären Kegel *oder* Cylinder stets dann und nur dann dar, wenn

$$\sum \pm (a_{22} a_{33}) > 0, \quad a_{44} \cdot \sum \pm (a_{22} a_{33} a_{44}) > 0.$$

Reell wird also der Kegel oder Cylinder sein, sobald diese beiden Bedingungen nicht *gleichzeitig* befriedigt sind, wenn also auch nur eine einzige der Determinanten

$$\sum \pm (a_{\alpha\alpha} a_{\beta\beta}); \quad a_{\alpha\alpha} \qquad (\beta, \alpha = 2, 3, 4)$$

Null wird.

Sind alle $A_{ik} = 0$, so wird $f = 0$ zwei imaginäre Ebenen (parallel oder nicht) darstellen, wenn für ein bestimmtes Zahlenpaar α, β aus der Reihe 1, 2, 3, 4 die Determinante $a_{\alpha\alpha} a_{\beta\beta} - a_{\alpha\beta}^2 > 0$.

Das Verschwinden von $a_{\alpha\alpha}$ oder $a_{\beta\beta}$ ist hierdurch von selbst ausgeschlossen.

Das von Herrn Koehler angemerkte „kleine Versehen“ im Journal für Math. **119**, S. 216, Anm. 7 dürfte wohl auf einen lapsus linguae bei meinen Vorträgen zurückzuführen sein.

Darmstadt, 20. April 1902. S. Gundelfinger.

Bemerkung zum Aufsatze von Herrn Kommerell: „Ein Satz über geodätische Linien.“

Der Satz, an den Herr V. Kommerell in dieser Zeitschrift ((3) **1**, S. 116 bis 117) erinnert hat:

„Das Quadrat der Torsion einer geodätischen Linie ist gleich dem Produkt aus den Differenzen ihrer Krümmung gegen die beiden Hauptkrümmungen der Fläche in dem betreffenden Punkte“

kann auch auf folgende, vielleicht ein bischen kürzere Weise bewiesen werden. Bezeichnen ξ, η, ζ die Kosinus der Hauptnormalen der geodätischen Linie und p, q, r, s, t, wie gewöhnlich, die fünf ersten Ableitungen der Koordinate z der Fläche $z = f(x, y)$ nach x und y, so ist die geodätische Linie charakterisiert durch die Gleichungen:

$$(1) \qquad \xi = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \eta = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \zeta = \frac{+1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

die längs der ganzen Kurve befriedigt werden. Nun folgt aus (1) (Frenetsche Formeln):

$$(2) \qquad -\frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\lambda}{R} = \frac{d}{ds}\left(\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right), \text{ etc.}$$

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit λ, μ, ν und addiert, so folgt

$$(3) \; \frac{1}{R} = \lambda \frac{d}{ds}\left(\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) + \mu \frac{d}{ds}\left(\frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) + \nu \frac{d}{ds}\left(\frac{+1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right).$$

Dies gilt für beliebige Achsen; wählt man zu solchen die Normale der Fläche im betreffenden Punkte (Mz) und die zwei Tangenten der Hauptrichtungen (Mx, My), so wird bekanntlich in M:

$$p = q = 0, \quad r = \frac{1}{\varrho_1}, \quad s = 0, \quad t = \frac{1}{\varrho_2}, \quad \nu = 0,$$

mithin aus (3) in M:

$$\frac{1}{R} = -\lambda \frac{dp}{ds} - \mu \frac{dq}{ds},$$

oder auch

$$\frac{1}{R} = -\left[\lambda r \frac{dx}{ds} + \mu t \frac{dy}{ds}\right] = -\left[\lambda \frac{1}{\varrho_1} \alpha + \mu \frac{1}{\varrho_2} \beta\right],$$

d. h.

$$\frac{1}{R} = -\cos\varphi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \cdot \frac{1}{\varrho_1} - \cos\varphi \cdot \sin\varphi \cdot \frac{1}{\varrho_2},$$

oder

$$\frac{1}{R^2} = \sin^2\varphi \cos^2\varphi \left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right)^2.$$

Es ist nun (Eulersche Formel):

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\varphi}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\varphi}{\varrho_2},$$

mithin

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1} = \sin^2\varphi \left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1}\right)$$

und

$$\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho} = \cos^2\varphi \left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1}\right),$$

also auch

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1}\right)\left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho}\right),$$

w. z. b. w.

Die Formel $\frac{1}{R} = \pm \sin\varphi \cos\varphi \left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1}\right)$, aus welcher die von Herrn Kommerell gefundene folgt, gilt übrigens allgemeiner für die *geodätische Torsion* $\left(\frac{1}{R} - \frac{d\tilde{\omega}}{ds}\right)$ irgend einer Kurve der Fläche und wurde zuerst von Bonnet gegeben.[1]) Ist die Kurve eine *geodätische*, so reduziert sich

1) Mémoire sur la théorie des surfaces (Journ. de l'École Polyt. **32**, 1, 1848). Cf. auch Darboux, Surfaces, II, p. 389.

$\frac{1}{R} - \frac{d\tilde{\omega}}{ds}$ zu $\frac{1}{R}$. Ebenso aber reduziert sich die geodätische Torsion zu der bloßen Torsion für alle Kurven, längs deren $\tilde{\omega}$ (= Winkel der Hauptnormalen und der Flächennormalen) *konstant* ist. Insbesondere gilt dies auch für die *asymptotischen* Linien. Man hat also auch für eine solche

$$(4) \qquad \frac{1}{R} = \pm \sin\varphi \cos\varphi \left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1}\right).^{1)}$$

Zieht man ferner in Betracht, daſs für diese Linie die Gleichung gilt

$$\frac{\cos^2\varphi}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\varphi}{\varrho_2} = 0,$$

so findet man

$$\sin\varphi = \pm \frac{\sqrt{-\varrho_2}}{\sqrt{\varrho_1 - \varrho_2}}, \quad \cos\varphi = \pm \frac{\sqrt{\varrho_1}}{\sqrt{\varrho_1 - \varrho_2}},$$

mithin

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{\sqrt{-\varrho_1\varrho_2}}{\varrho_1 - \varrho_2} \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_1\varrho_2} = \mp \frac{1}{\sqrt{-\varrho_1\varrho_2}},$$

d. h. die Ennepersche Formel, welche auf diese Weise leichter bewiesen worden ist.

Athen, den 12. Oktober 1901. N. J. HATZIDAKIS.

---

1) Diese Formel kann, wie die vorige für die geodätischen Linien, auch direkt bewiesen werden. Es ist nämlich hier:

$$\lambda = \frac{\mp p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \mu = \frac{\mp q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \nu = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

also auch

$$-\frac{\xi}{R} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\mp p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right), \text{ etc.}$$

oder wie früher

$$-\frac{1}{R} = \xi \frac{d}{ds}\left(\frac{\mp p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) + \eta \frac{d}{ds}\left(\frac{\mp q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) + \zeta \frac{d}{ds}\left(\frac{\pm 1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right).$$

Und wählt man die Achsen wie früher, so folgt

$$\frac{1}{R} = \pm \xi \frac{dp}{ds} \pm \eta \frac{dq}{ds} = \pm \alpha\xi r \pm \beta\eta t;$$

und da

$$r = \frac{1}{\varrho_1}, \qquad t = \frac{1}{\varrho_2},$$

$$\xi = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right), \quad \eta = \cos\varphi,$$

$$\alpha = \cos\varphi, \qquad \beta = \sin\varphi,$$

so wird

$$\frac{1}{R} = \pm \sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1}\right),$$

w. z. b. w.

Zur Bemerkung des Herrn Ed. Janisch im 2. Bande auf S. 153.

Herr Janisch bemerkt, dafs die von uns in **1**, S. 178 (Theorem V) genannte Ellipse in einem Falle zu einer doppelt zu zählenden Geraden wird. Wir benutzen diese Gelegenheit, um durch einige Bemerkungen das vom Lotpunkt bereits Gesagte zu ergänzen.

I. Der Ort der Lotpunkte inbezug auf Geraden durch einen festen Punkt ist eine Ellipse, welche durch die Fufspunkte der von dem Punkte auf die Seiten des Bezugsdreiecks gefällten Lote geht. (Diese Ellipse ist identisch mit der in **1**, S. 178, Theorem V.)

II. Der Ort der Lotpunkte eines Dreiecks inbezug auf die Geraden durch einen Punkt der Peripherie des Umkreises ist eine Strecke auf der Simson-Geraden dieses Punktes.

III. Der Schnittpunkt der Simson-Geraden zweier Punkte der Umkreisperipherie ist Lotpunkt des Dreiecks inbezug auf die Verbindungsgerade dieser Punkte.

Hieraus läfst sich der Satz folgern:

IV. Sind zwei Dreiecke einem Kreise ein- und einer Parabel umbeschrieben, so fallen die sechs Lotpunkte je eines der Dreiecke inbezug auf die Seiten des anderen in einen Punkt zusammen (vergl. E. Jahnke **1**, Aufg. **11**). Dieser Punkt halbiert den Abstand der Höhenschnittpunkte der Dreiecke.

Inzwischen hat Herr Fuhrmann in Königsberg die Güte gehabt, mir mitzuteilen, dafs der „*Lotpunkt*“ bereits als Aufgabe in den „Questions de Géométrie“ von Desboves (Paris 1875) p. 241, Nr. 77 gestellt ist.

Ferner verdanke ich Herrn H. Thieme in Posen die interessante Mitteilung, welche die Beziehung des Lotpunktes zum Feuerbachschen Kreise (**1**, S. 178, Theorem III) betrifft: „Geht die Beziehungsgerade durch den *Umkreismittelpunkt*, so ist sie *Direktrix*, und ihr Lotpunkt *Brennpunkt* einer Parabel, die mit dem Dreieck polar konjugiert ist.“

Berlin. K. Cwojdziński.

Bemerkung zu der Arbeit „Über Beweise von Schnittpunktsätzen“ (S. 121 ff. dieses Bandes) von Gerhard Hessenberg.

In der genannten Arbeit wird je ein spezieller Fall des Pascalschen und Desarguesschen Satzes aus dem anderen Satz hergeleitet und zum Schlusse die Bemerkung gemacht, dafs jeder der beiden Spezialfälle auf drei wesentlich verschiedene Arten bewiesen werden könne, weil es für den Pascalschen Satz zwei wesentlich verschiedene Beweise giebt.

Diese Bemerkung ist unzutreffend für den ersten Spezialfall. Von den beiden Beweisen des Pascalschen Satzes beruht der eine auf der Konstruktion unendlich vieler „rationaler“ Pascalscher Konfigurationen auf Grund des Desarguesschen Satzes und auf dem Nachweis der Existenz der allgemeinen durch eine Stetigkeitsbetrachtung. Da die in Rede stehende Konfiguration zu den „rationalen“ gehört, ist ihre Existenz bereits vor der Stetigkeitsbetrachtung erwiesen, und der Beweis auf diesem Wege deckt sich mit der angegebenen Herleitung aus dem Desarguesschen Satz.

Ein analoger Einwand kann hinsichtlich des zweiten Spezialfalles nicht erhoben werden, da die darin enthaltenen Pascalschen Konfigurationen, wie in der betr. Arbeit bereits erwähnt, allgemeine sind.

Die Fufsnote auf S. 121 ist dahin richtig zu stellen, dafs Herr Wiener l. c. den in Rede stehenden Satz ohne Beweis angegeben hat. Der erste veröffentlichte Beweis stammt von Herrn Schur. (Math. Ann. **51**, 406.)

Charlottenburg, im Mai 1902. HESSENBERG.

---

4. Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.

[Einsendungen für den Sprechsaal erbittet Franz Meyer, Königsberg i. Pr., Mitteltragheim 51.]

Zu I A 2.

I. Nr. 13, Anm. 44. Einen Beweis nebst weiteren Verallgemeinerungen giebt A. Hurwitz, Zeitschr. f. M. u. Ph. **35** (1890), S. 56. Vergl. auch Hurwitz, Math. Ann. **39** (1891), S. 21.

I. Nr. 15, Anm. 52. Die erste Bezeichnung stammt von Leibniz, Brief an L'Hôpital vom 28. April 1693; Acta Erud. 1700; S. 200 = Werke (Gerhardt) II, S. 239 und V, S. 348.

Giefsen. E. NETTO.

Zu I A 2. Kombinatorik.

I. S. 33, Z. 5 von **10.** Tripelsysteme. Lies „7 mal" statt „35 mal".

Magdeburg. W. AHRENS.

Zu I B 1a. Rationale Funktionen einer Veränderlichen; ihre Nullstellen.

I. S. 236—237. Das Citat auf v. Staudt, Anm. 39, S. 236 sollte nicht zum ersten, sondern zum zweiten, dem algebraischen, Gaufsschen Beweise für die Wurzelexistenz gemacht sein. Staudt giebt im J. f. Math. **29** eine einfache und kurze Darstellung dieses zweiten Beweises, durch Betrachtung der Resultante von $\varphi(x)$ und $\frac{1}{h}[\varphi(x+h)-\varphi(x)]$, ganz analog der späteren Gordanschen Betrachtung (Math. Ann. **10**).

I. S. 247, Anm. 95. Im Zitat auf Faà di Bruno ist „§ 5, No. 7 ff., besonders No. 11", statt „§ 5 ff., bes. § 11" zu lesen. Ferner ist zu diesem § 5, No. 8—10 meine Verbesserung in Erlanger Sitzungsber. 27, 1895 heranzuziehen.

Erlangen. M. NOETHER.

Zu I B 3 a. Separation und Approximation der Wurzeln.

I. S. 412, Z. 5 und 6. Gaufs kommt — allerdings nach einigem Hin- und Herschwanken — zu der entgegengesetzten Überzeugung und spricht die Ansicht aus, „dafs es einen in der Natur der Sache liegenden allgemeinen willkürfreien Zusammenhang zwischen den einzelnen kritischen Punkten und den einzelnen Paaren von imaginären Wurzeln gar nicht giebt“ (s. Briefw. Gaufs-Schumacher III, S. 72; s. a. ibidem II, S. 331 und III, S. 68).

Magdeburg. W. Ahrens.

I. S. 12, Anm. 18. Die Behauptung, Descartes habe durch einen und denselben Buchstaben einen positiven oder negativen Zahlwert bezeichnet, ist nicht bestätigt worden. Soweit bisher bekannt ist, war Newton der erste, der sich dieser Bezeichnung bediente (vergl. *Biblioth. Mathem.* 1888, S. 63—64). — Die *Ars magna* des Cardano erschien 1545 (nicht 1550).

I. S. 29, Anm. 1. Die Schrift Pascals: *Traité du triangle arithmétique* war schon 1654 (1664 hat keinen Sinn, da Pascal bekanntlich 1662 starb) geschrieben und vor Pascals Tode gedruckt, obgleich sie erst 1665 in den Buchhandel kam. — Anm. 2. Die *Dissertatio de arte combinatoria* von Leibniz erschien 1666 (nicht 1668). — Anm. 3. Es existiert keine Ausgabe 1673 des *Treatise of algebra* des Wallis, wohl aber erschien 1693 eine erweiterte lateinische Übersetzung unter dem Titel: *De algebra tractatus.*

I. S. 35, Anm. 47. Statt „p. 193 der hist. Abtl.“ mufs „p. 193 des Suppl.“ [= Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. 7] gesetzt werden. S. 193 der hist. Abtl. enthält etwas ganz anderes.

I. S. 38, Anm. 65; S. 63, Anm. 70. Statt Ch. A. Vandermonde ist A. Th. Vandermonde zu setzen (vergl. I, S. 450, Anm. 2).

I. S. 50, Anm. 5. Es ist ganz richtig, dafs die Benennung „surdus“ bei Leonardo Pisano vorkommt (*Liber abbaci* ed. Boncompagni, S. 356), aber schon früher wurde sie von Gherardo Cremonese benutzt (vergl. *Biblioth. Mathem.* 1_3, 1900, S. 516).

I. S. 59, Anm. 47. Statt Kap. 80 lies Kap. 89.

I. S. 60, Anm. 55. Schon vor Euler hatte W. Jones im Jahre 1706 die Bezeichnung π für 3,14159 ... benutzt (vergl. *Biblioth. Mathem.* 1894, S. 106). Die Angabe, dafs Barrow früher dieselbe Bezeichnung angewendet hatte (siehe *L'Intermédiaire des mathématiciens* **9**, 1902, S. 52), ist dagegen unrichtig.

I. S. 923, Anm. 10; II, S. 121, Anm. 325). Die Newtonsche Interpolationsformel kommt schon in den *Principia* (1687), S. 481 vor (vergl. z. B. *Biblioth. Mathem.* 2_3, 1901, S. 87).

I. S. 927, Anm. 15. Dafs schon den Römischen Agrimensoren die Summe der Kubikzahlen bekannt war, ist von Cantor 1875 nachgewiesen worden (vergl. *Vorles. über Gesch. der Mathem.* I^2, S. 519—520).

I. S. 927, Anm. 15ª. Den Bemerkungen des Herrn Braunmühl im *Arch. d. Mathem.* **3**, 1902, S. 86 kann noch hinzugefügt werden, dafs die Kosinusreihe (37) schon von Snellius (1626) summiert worden ist (vgl. Braunmühl, *Gesch. d. Trigon.* I, S. 240).

II. S. 3, Anm. 4. Statt § 1 lies § 2. Die Lagrangesche Behauptung ist ohne Zweifel wörtlich genommen falsch, vermutlich wollte Lagrange eigentlich sagen, daſs die ältesten Analysten im allgemeinen keine anderen Funktionen als Potenzen behandelten.

II. S. 56. Taylors *Methodus incrementorum* erschien 1715; einige Exemplare haben auf dem Titelblatt die Jahreszahl 1717. — Stirlings *Methodus differentialis* ist in London (nicht Rom) herausgegeben worden.

II. S. 62, Anm. 21. Statt 1664 lies 1684.

II. S. 78, Anm. 101. Statt § 828 lies § 751. — Statt 1717 lies 1730.

II. S. 82, Anm. 123[a]. Die fragliche Regel findet sich bei Maclaurin, *Treatise of fluxions*, § 261 und § 859.

II. S. 118. Hier hätten vielleicht auch die einschlägigen Abhandlungen von Hj. Holmgren (Stockh. Handlingar **5**, Nr. 11, 1866; **7**, Nr. 9, 1869) genannt werden sollen.

II. S. 157. Aus einem ungedruckten Briefe von Euler an Joh. I. Bernoulli vom 21. Oktober 1729 geht hervor, daſs jener wirklich durch den Briefwechsel zwischen Goldbach und D. Bernoulli veranlaſst wurde, sich mit der Interpolation der Reihe 1, 2, 6, 24 etc. zu beschäftigen. Dagegen scheint es fraglich, ob Euler *sofort* zu der Darstellung eines beliebigen Termes durch ein bestimmtes Integral gelangte. Wenigstens nennt er in dem zitierten Briefe an Joh. I. Bernoulli gar nichts hierüber, sondern nur, daſs er durch Untersuchungen über tautochrone Kurven eine Methode entdeckt hatte, um die Glieder der Reihe, deren Ordnungszahlen $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$ etc. sind, zu bestimmen.

II. S. 158. Die zwei Formeln für $P(a)$ sind viel älter als die Anm. 38 und 40 angeben. Die erste Formel findet sich schon in Eulers *Instit. calc. integr.* I (1768), Kap. IV, § 229, und auch die zweite Formel ist daselbst § 225 zu finden.

II. S. 167, Anm. 75. Bekanntlich haben Euler und Maclaurin unabhängig von einander die Summenformel gefunden, und Euler hat sie zuerst veröffentlicht.

II. S. 171, Anm. 99. Fritz war nur der Verteidiger der Dissertation, der Verfasser war Jakob Bernoulli selbst.

II. S. 213. Es ist nicht richtig, daſs Leibniz 1694 ein singuläres Integral gefunden hatte. Der fragliche Aufsatz in den *Acta Eruditorum* 1694, S. 311—315 enthält überhaupt keine Differentialgleichung, deren Integral hergeleitet wird, sondern beschäftigt sich nur mit der Bestimmung von Enveloppen.

II. S. 237, Anm. 7. Die Idee des integrierenden Faktors geht auf Johann I. Bernoulli zurück (siehe Cantor, *Vorles. über Gesch. d. Mathem.* III[2], S. 227 und *Biblioth. Mathem.* 1898, S. 58—60).

II: 2. S. 117, Anm. 3. Statt 1754 lies 1748.

Stockholm. G. Eneström.

Zu II A 2.

II. S. 62, Z. 7 lies $D(y) = e^x$ statt $= e$.
II. S. 69, Z. 6 von unten S. 106 statt 196.

Genf. H. Fehr.

Zu II A 3. Bestimmte Integrale.

II. S. 183—185, insbesondere Anmerkungen 163, 169, 170.

Die Leistungen K. v. Staudts auf dem Gebiete der Bernoullischen Zahlen sind unvollständig erwähnt. Es sei deshalb aus meinem Beitrag zu der wenig verbreiteten „Festschrift der Univers. Erlangen zum 80. Geburtstag des Prinzregenten von Bayern“, Bd. IV_2 (Leipzig und Erlangen, März 1901, A. Deichert Nachf.) betitelt

„Zur Erinnerung an Karl G. Ch. v. Staudt“

die folgende Stelle ausgezogen. (Nebenbei bemerkt war der Rufname „Karl“, nicht „Christian“, wie gewöhnlich, auch in der Encykl. I, angegeben wird.)

Eine ganze Reihe weiterer Fortschritte für die Theorie dieser Zahlen findet sich in den beiden akadem. Schriften, welche v. Staudt bei seinem Eintritt in Senat und Fakultät 1845 vorgelegt hat, Schriften, für deren Verbreitung der bescheidene Mann nicht gesorgt hat, so dafs sie fast unbekannt und unbeachtet geblieben sind.[1]) Nicht nur, dafs Staudt in der ersteren der beiden Noten einen neuen, höchst einfachen Beweis seines Satzes[2]), abgeleitet aus den Ausdrücken der Zahlen durch die Anfangsglieder der Differenzreihen der Reihe

$$1^n + 2^n + 3^n + \cdots + x^n,$$

giebt; diese Note enthält auch schon wenigstens einige Funktionalbetrachtungen. Sie enthält ferner die Verwandlung der Potenzreihen in x in Reihen, die nach Binomialkoeffizienten von x fortlaufen, die zweite Note auch die interpolatorische Darstellung und, daraus abgeleitet, die independente Darstellung der B.schen Zahlen: Entwicklungen, die späterhin irrtümlich mit dem Namen Kroneckers belegt worden sind.[3]) Gerade daraus erschliefst St. Kongruenzbeziehungen zwischen verschiedenen B.schen Zahlen, deren Indices n eine arithmetische Reihe erster Ordnung

---

1) „De numeris Bernoullianis“ [2 Teile.] Erlangen 1845. Diese Schriften finden sich nur bei L. Seidel in den Sitzungsber. der Kgl. Bayr. Akad. d. Wiss. von 1877, S. 165, Anm. und bei R. Lipschitz, J. f. Math. **96**, 1883 zitiert. Weder die denselben Gegenstand behandelnden Arbeiten von Arndt, Raabe, Kummer, Sylvester, Kronecker, Worpitzky etc. kennen sie, noch die Monographie über die B.schen Zahlen von L. Saalschütz, Berl. 1893, obwohl dieselbe die genannten Arbeiten von Seidel und Lipschitz ausführlich erörtert, noch die jetzt erscheinende „Encyklopädie der Math. Wiss.“

2) [Aus J. f. Math. **21**, 1840; cf. Anm. 170 von II, p. 185 der „Encykl.“]

3) Saalschütz, a. a. O., S. 102, 138.

bilden, wie sie später von analytischer Seite her durch Kummer wiedergefunden worden sind[1]), mit Kongruenzsätzen für die *Zähler* der Zahlen. Das Hauptziel ist aber ein Satz über diese Zähler: „Wenn n durch p^μ teilbar ist, wo p eine von den „Staudtschen" verschiedene Primzahl ist, so ist auch der Zähler der Zahl B_n durch p^μ teilbar."

Erlangen. M. Noether.

Zu II B 1.

II. S. 26, Z. 10 v. o. statt $z = k$ lies $x = k$.

II. S. 29, Z. 20 v. o. statt n lies n_{z_0}.

II. S. 75, Anm. 176, die Wörter „der Beweis ist ungenügend" müssen gestrichen werden.

II. S. 84, Z. 3 v. o. „Die von Fabry ausgesprochene Ansicht" . . . der Satz kommt bereits bei Pringsheim vor, *Math. Ann.* **44** (1894) p. 50.

II. S. 97, Z. 4 v. o., die Wörter „und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergiert" müssen gestrichen werden.

II. S. 105, Z. 1 v. u. statt $\Phi \equiv\!\!\!\!|\; o$ lies $\Phi \equiv\!\!\!\!|\; 0$.

II. S. 107, Anm. 254, letzte Z. statt (1901) lies (1902).

Cambridge (Mass. U. S.). W. Osgood.

Über Oughtreds abgekürzte Multiplikation.

In der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band I, S. 984, Z. 1f., findet sich zu dem Satz „Schreibt man die Einerziffer des Multiplikators über die letzte Ziffer des Multiplikanden, die noch berücksichtigt werden soll, und läſst links die übrigen Ziffern des Multiplikators in verkehrter Ordnung folgen, so kommt jede über die Ziffer zu stehen, bei welcher der zugehörige Teilmultiplikand abzubrechen ist", die Anmerkung 216) „Sog. Regel von W. Oughtred, angeblich in dessen Artis analyticae praxis (1631?) zu finden, welche Schrift der Verfasser nicht einsehen konnte". Auf die Angabe, daſs die Oughtredsche Regel der Multiplikation sich in Artis analyticae praxis, einer Schrift, welche nicht von Oughtred, sondern von Thomas Harriot stammt, findet, stöſst man auch in J. Fouriers Analyse des équations déterminées (1831). (Vgl. die in Ostwalds Klassikern von A. Loewy besorgte Ausgabe, S. 180). Die Regel geht in Wahrheit auf William Oughtreds „Arithmeticae in numeris et speciebus institutio quae tum logisticae tum analyticae atque adeo totius mathematicae quasi clavis est" (London 1631) zurück. Der Clavis ist selten geworden. In M. Cantors Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Band 2, S. 720—721 (Leipzig 1900), wo Oughtreds Clavis kurz besprochen wird, wird nichts über die von Oughtred gelehrte Multiplikation mitgeteilt; offenbar, nach den Anmerkungen zu schlieſsen, hatte Herr Cantor nicht Gelegenheit, selbst in den Clavis Einblicke zu thun, sonst würde er es sich wohl in einem Abschnitt, in dem er davon spricht, „es sei in der Richtung der Zeit gewesen,

1) J. f. Math. **41**, 1850 (cf. Saalschütz a. a. O., S. 158).

das Rechnen mit grofsen Zahlen zu erleichtern", nicht haben entgehen lassen, auf Oughtreds diesbezügliche Untersuchungen zu verweisen.

Nachdem Oughtred Addition und Subtraktion der ganzen Zahlen wie der Dezimalbrüche gelehrt hat, behandelt er im vierten Kapitel die Multiplikation zweier ganzen Zahlen in üblicher Weise. Die Rechnung, um 4576 mit 892 zu multiplizieren, lautet bei ihm:

```
   4576
    892
   ----
   9152
  41184
 36608
 -------
 4081792.
```

Hierauf folgt die fragliche Regel; bei Oughtred handelt es sich, wenn zwei Dezimalbrüche (numeri mixti) gegeben sind und man ihr Produkt suchen will, nur darum, des Produktes ganzzahligen Bestandteil, ohne seine Dezimalstellen (factum purum sine mixtura) zu finden. Für diese Aufgabe lautet seine Vorschrift „Man setzt die Einer der kleineren der gegebenen Zahlen unter die Einer der gröfseren und die übrigen Ziffern der kleineren Zahl in umgekehrter Reihenfolge unter die der gröfseren Zahl; dann beginnt man bei der Multiplikation überall bei jener Ziffer der gröfseren Zahl, welche über der zu multiplizierenden Ziffer der kleineren steht, und beachtet dabei den Überschufs, welcher durch die folgenden Ziffern der gröfseren Zahl geliefert wird". In dem Oughtredschen Beispiel: 246|914[1]) mit 35|27 zu multiplizieren und den ganzen Bestandteil 8708 zu finden, sieht die Rechnung so aus:

```
 246|914
  72|53
 -------
      17
      49
    1235
    7407
    ----
    8708.
```

Hierauf folgt die Bemerkung, dafs, um beim Produkt eine oder mehrere Dezimalstellen zu finden, man die Einer der kleineren Zahl um die gewünschte Anzahl Stellen von den Einern der gröfseren Zahl nach rechts hin fortrücken mufs. Um zwei Stellen nach dem Komma zu finden, lautet für das vorige Beispiel die Rechnung bei Oughtred:

```
 246|914
    72|53
 --------
    1729
    4938
  123457
  740742
  -------
  8708|66.
```

1) Auf diese Art bezeichnet O. den Dezimalbruch 246,914.

Will man bei dem Produkt nur eine gewisse Anzahl der ersten Ziffern der Ganzen finden, so hat man die Einer statt nach rechts nach links zu verschieben. Um die fünf ersten Ziffern des Produktes von 80902 in 39875 zu finden, rechnet Oughtred:

$$\begin{array}{r} 80902 \\ \underline{57893} \\ 4 \\ 57 \\ 647 \\ 7281 \\ \underline{24271} \\ 32260. \end{array}$$

Die Regeln werden von Oughtred ohne Beweis angegeben; der Grad der Genauigkeit des Verfahrens in der letzten Stelle wird von O. nicht erwähnt. Wie weit die Richtigkeit geht, davon kann man sich durch geeignete Zusammenfassung der Glieder des Produktes:

$$(a_\lambda \cdot 10^\lambda + a_{\lambda-1} 10^{\lambda-1} + \cdots + 10 a_1 + a_0 + 10^{-1} a_{-1} + 10^{-2} a_{-2} + \cdots) \cdot$$
$$\cdot (b_\mu \cdot 10^\mu + b_{\mu-1} 10^{\mu-1} + \cdots + 10 b_1 + b_0 + 10^{-1} b_{-1} + 10^{-2} b_{-2} + \cdots)$$

und Schätzung des fortgelassenen Teiles überzeugen. Man vergleiche hierzu J. Lüroths Vorlesungen über numerisches Rechnen, S. 74ff., vorzüglich S. 75 unten und S. 76. (Leipzig 1900.) Nur ist zu beachten, daſs Herr Lüroth nicht überschlägt, während dies von Oughtred geschieht. Bei Herrn Lüroth würde das erste Oughtredsche Beispiel lauten:

$$\begin{array}{r l} 246|914 & \\ \underline{72|53} & \\ 14 & = 7 \cdot 2 \\ 48 & = 2 \cdot 24 \\ 1230 & = 5 \cdot 246 \\ \underline{7407} & = 3 \cdot 2469 \\ 8699 & \end{array}$$

Bei Oughtred hingegen ist $17 = 7 \cdot 2 + 3$ als Überschuſs von dem vernachlässigten Produkt $7 \cdot 46914$, $49 = 2 \cdot 24 + 1$ als Überschuſs von dem vernachlässigten Teil $2 \cdot 6914$, $1235 = 1230 + 5$ wegen des Überschusses von $5 \cdot 914$.

Die sogenannte symmetrische Multiplikation findet man nicht bei Oughtred. Hingegen ist Oughtred die Quelle, aus der Fourier wohl die praktische Regel geschöpft hat, bei der schon den Indern bekannten Vajrâbhyâsa-Multiplikation, die im Mittelalter als kreuzweise Multiplikation geübt wurde, die Ziffern der einen Zahl in verkehrter Reihenfolge zu schreiben. (Vgl. Fourier in der oben zitierten Ausgabe S. 182, 183, sowie ebenda meine Anmerkung 61) auf S. 262.)

Im folgenden Kapitel behandelt Oughtred auch die abgekürzte Division.

Freiburg i/B. ALFRED LOEWY.

5. Bei der Redaktion eingegangene Bücher.

Bock, H., und Poske, F., Hauptsätze der Arithmetik. 4. Aufl. Berlin 1902, M. Rockenstein.

Burkhardt, H., Entwicklungen nach oscillierenden Funktionen. 2. Lfg. Leipzig 1902, B. G. Teubner. M. 7.60.

Compte rendu du deuxième Congrès international des Mathématiciens 1900. Paris 1902, Gauthier-Villars.

Darwin, G. H., Ebbe und Flut. Übers. v. Agnes Pockels. Leipzig 1902, B. G. Teubner. geb. M. 6.80.

Doehlemann, K., Projektive Geometrie in synthet. Behandlung. Leipzig 1902, Göschen. M. 0.80.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. IV_1, Heft 2: Geometrische Grundlegung der Mechanik eines starren Körpers. Von H. E. Timerding. — Kinematik. Von A. Schoenflies und M. Grübler. Leipzig 1902, B. G. Teubner. M. 4.60.

Ferraris, G., Wissenschaftliche Grundlagen der Elektrotechnik. Leipzig 1901, B. G. Teubner. geb. M. 12.

Gleichen, A., Lehrbuch der geometrischen Optik. Leipzig 1902, B. G. Teubner. geb. M. 20.

Hammer, E., Sechsstellige Tafel der Werte ${}^{10}\log \frac{1+x}{1-x}$. Leipzig 1902, B. G. Teubner. M. 3.60.

Haussner, R., Darstellende Geometrie. Erster Teil. Leipzig 1902, Göschen. M. 0.80.

Hensel, K., und Landsberg, G., Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale. Leipzig 1902, B. G. Teubner. geb. M. 28.

Holzmüller, G., Elemente der Stereometrie. III. Leipzig 1902, Göschen. M. 9.80.

Junker, Fr., Repet. u. Aufg.-Samml. z. Differentialrechnung. Leipzig 1902, Göschen. M. 0.80.

— Repet. u. Aufg.-Samml. z. Integralrechnung. Leipzig 1902, Göschen. M. 0.80.

— Integralrechnung. Leipzig 1902, Göschen. M. 0.80.

Lemoine, E., Géométrographie. Paris 1902, C. Naud.

Loria, G., Specielle algebraische und transcendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Leipzig 1902, B. G. Teubner. geb. M. 28.

Montcheuil, M. de, Sur une classe de surfaces. Thèse prés. à la Fac. des Sc. de Toulouse. Paris 1902, Gauthier-Villars.

Musil, A. und J. A. Ewing, Grundlagen der Theorie und des Baues der Wärmekraftmaschinen. Leipzig 1902, B. G. Teubner. M. 20.

Perry, John, Höhere Analysis für Ingenieure. Autorisierte deutsche Bearbeitung von Robert Fricke und Fritz Süchting. Leipzig 1902, B. G. Teubner. geb. M. 12.

Rudio, F., Die Elemente der analytischen Geometrie. II. Die analytische Geometrie des Raumes. 3. Aufl. Leipzig 1901, B. G. Teubner. geb. M. 3.

Sellenthin, B., Mathematischer Leitfaden mit besonderer Berücksichtigung der Navigation. Leipzig 1902, B. G. Teubner. geb. M. 8.40.

Stolz, Otto, und Gmeiner, J. A., Theoretische Arithmetik. II. Abteilung. Die Lehren von den reellen und von den komplexen Zahlen. Zweite umgearbeitete Auflage der Abschnitte V—VIII, X, XI des I. und I, II, V des II. Teiles der Vorlesungen über allgemeine Arithmetik von O. Stolz. Leipzig 1902, B. G. Teubner. geb. M. 7.20.

Thaer, A., Bestimmung von Gestalt und Lage eines Kegelschnitts aus einer Gleichung zweiter Ordnung ohne Koordinaten-Transformation. Leipzig 1902, B. G. Teubner. M. 1.40.

Weiler, W., Physikbuch in 3 Bänden und Phys. Experimentierbuch. Esslingen 1902, J. F. Schreiber.

Zeuthen, H. G., Histoire des Mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge. Paris 1902, Gauthier-Villars.

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

4. Sitzung am 29. Januar 1902.

Vorsitz: Herr Weingarten.

Anwesend: 41 Herren.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Felix Müller: Über die Bedeutung der Zeitschriften für die mathematische Litteratur und die mathematisch-historische Forschung (s. u.).

Herr Knoblauch richtet an die Mitglieder der Gesellschaft die Aufforderung, in ihren Mitteilungen zur Ausbildung eines Systems konsequenter und durchdachter, dauernd beizubehaltender Bezeichnungen für solche Gröfsen beitragen zu wollen, denen innerhalb der mathematischen Gebiete eine grundlegende Bedeutung zukommt. Von einer Regelung dieser dringenden Angelegenheit durch eine Kommission verspricht sich der Vortragende nichts. Als Beispiele besonders unzweckmäfsiger Bezeichnungen werden angeführt: 1. die Benennung der Asymptotenlinien einer Fläche als Haupttangentenkurven; 2) die Bezeichnung der Fundamentalgröfsen zweiter Ordnung einer Fläche mit D, D', D''.

Herr Hamburger: Über die Darstellung doppeltperiodischer Funktionen als Quotienten von Thetafunktionen (s. u.).

Herr Budde: Eine kleine Bemerkung über die Helmholtzsche Wirbeltheorie (s. u.).

Herr Koppe: Über die Theorie des Kreisels (s. u.).

An der Diskussion beteiligen sich die Herren Hensel, Kneser, Knoblauch, Koppe, F. Kötter, Weingarten.

Über die Bedeutung der Zeitschriften für die mathematische Litteratur und die mathematisch-historische Forschung.

Von Felix Müller.

Bei den Mathematikern hat während der letzten Dezennien das Interesse an der historischen Entwickelung ihrer Wissenschaft in erfreulicher Weise zugenommen, und besonders die Journallitteratur ist für die mathematisch-

historische Forschung mit der Zeit von immer gröfserer Bedeutung geworden. Während die Begründer des Jahrbuches über die Fortschritte der Mathematik für den ersten Band, der die Litteratur des Jahres 1868 enthält, nur 80 Zeitschriften exzerpierten, für den zweiten Band 100, stieg diese Zahl bereits für die Litteratur des Jahres 1879 auf 170 und hat sich seitdem auf dieser Höhe erhalten. Die Zahl der der Redaktion zur Verfügung stehenden Journale bleibt nun hinter der Zahl aller gegenwärtig erscheinenden Zeitschriften mathematischen Inhalts bedeutend zurück.

Durch eine von Herrn Stäckel angeregte Frage: „Wie sollen die Titel mathematischer Zeitschriften abgekürzt werden?“ ist der Vortragende veranlafst worden, ein Verzeichnis von ca. 700 Zeitschriften mathematischen Inhalts anzulegen, von denen allerdings heute 360 zu erscheinen aufgehört haben. An der Hand dieses Verzeichnisses läfst sich die zunehmende Bedeutung der Journallitteratur für die mathematisch-historische Forschung deutlich nachweisen. Herr Valentin schätzt die für seine grofse „Bibliographie der Mathematik“ notierten Journalartikel auf 90 000 bis 95 000, ungefähr dreimal so viel als die separat erschienenen Schriften; in dem Jahrbuche über die Fortschritte der Mathematik werden neuerdings vier- bis fünfmal soviel Journalartikel als Einzelwerke aufgeführt. Für das 'Répertoire bibliographique des sciences mathématiques' der Société mathématique de France zu Paris wurden allein aus 8 Zeitschriften 13 816 mathematische Aufsätze gezählt, die während des XIX. Jahrhunderts bis zum Jahre 1889 erschienen sind. Charakteristisch für die Bedeutung der mathematischen Journallitteratur ist ferner, dafs in den bekannten vier von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung herausgegebenen historisch-kritischen Darstellungen von Brill und Noether, Fr. Meyer, E. Kötter und Czuber nicht weniger als 157 verschiedene Zeitschriften als Quellenschriften zitiert werden. In gleicher Weise werden die in der „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften“ veröffentlichten historischen Entwickelungen einzelner mathematischer Methoden und Disziplinen neben den Einzelwerken auch der Journallitteratur gerecht. Endlich ist die Zahl der in den Nekrologen berühmter Mathematiker aufgeführten Einzelwerke im Vergleich zur Zahl der von ihnen veröffentlichten Journalartikel verschwindend klein.

Die erwähnten 700 Zeitschriften mathematischen Inhalts beginnen mit dem Jahre 1660, in dem das 'Journal des Savans' und die 'Philosophical Transactions' der R. Society von London erschienen, die für die Geschichte der Mathematik von hoher Bedeutung sind. Ebenfalls eine wichtige Fundgrube für den Historiker bilden das 'Giornale de' Letterati' Nazaris, das 'Giornale dei Letterati d'Italia' Zenos, die 'Acta Eruditorum' und 'Nova Acta Eruditorum' und die Publikationen der Accademia Naturae Curiosorum. Seit dem XVIII. Jahrhundert wuchs dann schnell die Zahl der Akademie-Schriften, so dafs diese die Hälfte der 700 Zeitschriften mathematischen Inhalts ausmachen. Eine gleichsam statistische Übersicht über die übrigen Zeitschriften, welche sich in 5 Gruppen teilen lassen, giebt nachstehende Tabelle, in der neben der Gesamtzahl die Zahl der seit 1868 erschienenen Zeitschriften, dann die Zahl der wieder eingegangenen und die der noch existierenden angegeben ist:

1) vorwiegend math. . . .	165,	seit 1868: 80,	aufgehört	78,	bleiben	87
2) astron.-geodät.	35,	„ 1868: 7,	„	14,	„	21
3) phys.-naturw.	73,	„ 1868: 20,	„	24,	„	49
4) techn. u. militär. . . .	28,	„ 1868: 8,	„	2,	„	26
5) allgem.-wiss.	50,	„ 1868: 11,	„	27,	„	23
im ganzen:	351,	126,		145,		206.

Von den Journalen der ersten Gruppe reichen 19 in das XVIII. Jahrhundert zurück; diese haben sämtlich aufgehört zu erscheinen, mit alleiniger Ausnahme des 'Journal de l'École Polytechnique'.

Über die Darstellung doppeltperiodischer Funktionen als Quotienten von Thetafunktionen.[1])

Von M. Hamburger.

Es sei $F(z)$ eine doppeltperiodische Funktion mit den Perioden a und b, die überall den Charakter einer rationalen Funktion besitzt. Die Nullstellen mögen mit z', die Unendlichkeitsstellen mit z'' bezeichnet werden. In der Umgebung einer μ-fachen Nullstelle ist $\log F - \mu \log(z - z')$, in der einer μ-fachen Unendlichkeitsstelle $\log F + \mu \log(z - z')$ holomorph. Zum Ausgangspunkt der gesuchten Darstellung dient uns die Entwickelung von $\log(z - z')$ in eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von z, unter der Voraussetzung, dafs $|z'| > |z|$. Es ist

$$\log(z - z') = \log(-z') - \frac{z}{z'} - \frac{1}{2}\frac{z^2}{z'^2} + H,$$

wo H eine Reihe ist, die für hinlänglich grofse Werte von $|z'|$ in der Form $\frac{\lambda z^3}{z'^3}$ geschrieben werden kann, wo $|\lambda|$ unterhalb einer endlichen Grenze liegt. Insbesondere ist $|\lambda| < \frac{2}{3}$, wenn $|z'| > 2|z|$.

Wir setzen zur Abkürzung

$$S(z, z') = \log(-z') - \frac{z}{z'} - \frac{1}{2}\frac{z^2}{z'^2}$$

und bilden die Summe

$$V(z) = \sum_{z'} \{\log(z - z') - S(z, z')\},$$

ausgedehnt über alle Nullstellen z' von F, jede so oft gezählt, als der Grad ihrer Vielfachheit in F beträgt, mit der Mafsgabe, dafs, falls $z' = 0$ eine Nullstelle etwa vom Grade μ ist, als Beitrag derselben zur Summe V nur $\mu \log z$, also $S(z, 0) = 0$ zu setzen ist. Man beweist leicht mit Hilfe des Satzes, dafs $\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (u + ma + nb)^{-3}$ für ein beliebiges u absolut konvergent ist, dafs die Reihe V absolut konvergent ist, wenn man die Punkte

---

1) Vgl. H. Poincaré: „Sur les propriétés du potentiel et sur les fonctions Abéliennes. Acta Math. 22. 1898.

$z = z'$ ausschliefst. In der Umgebung einer solchen Stelle ist, wenn sie eine μ-fache Nullstelle von F ist, $V - \mu \log(z - z')$ holomorph. Um die Änderung zu ermitteln, die V erfährt, wenn z sich um eine Periode a vermehrt, bemerken wir, dafs V auch geschrieben werden kann

$$V(z) = \sum_{z'} \{\log(z - z' - a) - S(z, z' + a)\},$$

da mit z' in der Reihe auch $z' + a$ als Nullstelle von F auftritt und die Summe über alle Nullstellen ausgedehnt wird. Demnach ist

$$V(z + a) = \sum_{z'} \{\log(z - z') - S(z + a,\ z' + a)\}$$

und daher

$$V(z + a) - V(z) = \sum_{z'} \{S(z, z') - S(z + a,\ z' + a)\}.$$

Die rechte Seite ist ein Polynom 2ten Grades in z. Es ist wichtig, festzustellen, dafs dieses sich auf ein Polynom ersten Grades in z reduziert. Der Koeffizient von $\frac{1}{2} z^2$ ist nämlich $\sum_{z'} \left\{\frac{1}{(z' + a)^2} - \frac{1}{z'^2}\right\} = \sum_{z'} \frac{-2z'a - a^2}{z'^2(z' + a)^2}$.

Diese Summe ist absolut konvergent, weil für grofse Werte von z' das allgemeine Glied von der Ordnung $\frac{1}{z'^3}$ ist. Um den Wert der Summe zu ermitteln, gruppieren wir die Glieder, indem wir alle Nullstellen von der Form $u + ka$ zu einer Gruppe zusammenfassen, in der u eine beliebige Nullstelle und k eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet, und erhalten als Summe einer solchen Gruppe

$$\left(\frac{1}{(u - na)^2} - \frac{1}{(u - (n + 1)a)^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{(u - a)^2}\right) + \left(\frac{1}{(u + a)^2} - \frac{1}{u^2}\right) + \cdots$$
$$+ \left(\frac{1}{(u + pa)^2} - \frac{1}{(u + (p - 1)a)^2}\right) = \frac{1}{(u + pa)^2} - \frac{1}{(u - (n + 1)a)^2}.$$

Beide Glieder auf der rechten Seite verschwinden, wenn n und p ins Unendliche wachsen, und da alle Nullstellen in solche Gruppen verteilt werden können, so ist der Wert der fraglichen Summe gleich Null. Mithin ist die Differenz $V(z + a) - V(z)$ ein Polynom ersten Grades in z. Bildet man ebenso die Summe

$$V'(z) = \sum_{z''} \{\log(z - z'') - S(z, z'')\},$$

ausgedehnt auf alle Unendlichkeitsstellen z'' von F, jede so oft gezählt, als der Grad ihrer Vielfachheit anzeigt, so ist V' mit Ausschlufs der Punkte $z = z''$ überall endlich, in der Umgebung einer μ-fachen Unendlichkeitsstelle z'' ist $V' - \mu \log(z - z'')$ holomorph, und V' vermehrt sich um ein Polynom ersten Grades in z, wenn z sich um eine Periode vermehrt.

Setzen wir jetzt $e^V = Q(z)$, dann ist $Q(z)$ eine in der ganzen Ebene holomorphe Funktion von z, deren Nullstellen mit denen von $F(z)$ übereinstimmen. Bei der Änderung von z um eine Periode a wird

$$Q(z + a) = Q(z) \cdot e^{\Pi(z)},$$

wo $\Pi(z)$ ein Polynom ersten Grades in z ist. Demnach hat $Q(z)$ die charakteristischen Eigenschaften einer Thetafunktion. Setzen wir ebenso $e^{V'} = Q'(z)$, dann ist $Q'(z)$ eine in der ganzen Ebene holomorphe Funktion von z, deren Nullstellen mit den Unendlichkeitsstellen von $F(z)$ übereinstimmen, und deren Änderung bei einer Vermehrung von z um eine Periode a durch

$$Q'(z+a) = Q'(z) \cdot e^{\Pi'(z)}$$

gegeben ist, wo $\Pi'(z)$ ebenfalls ein Polynom ersten Grades in z bedeutet. Betrachten wir jetzt den Ausdruck

$$U = \log \frac{FQ'}{Q} = \log F + V' - V,$$

so ist U in der ganzen Ebene holomorph, weil für die Stellen $z = z'$ sowohl V' als $\log F - V$ und für die Stellen $z = z''$ V und $\log F + V'$ holomorph sind. Ferner vermehrt sich U um ein Polynom ersten Grades in z, wenn z sich um eine Periode vermehrt. Folglich ist $\frac{d^2 U}{dz^2}$ eine doppeltperiodische Funktion von z, die in der ganzen Ebene holomorph ist, reduziert sich also auf eine Konstante. Mithin ist U ein Polynom 2[ten] Grades in z. Also ist

$$F = \frac{Q}{Q'} e^U,$$

wo U ein Polynom 2[ten] Grades von z bedeutet.

Durch diese Formel ist F als Quotient zweier Thetafunktionen dargestellt.

Ist die darzustellende Funktion $F = \wp(z)$, deren Unendlichkeitsstellen $w = ma + nb$ jede von der Ordnung 2 ist, dann ist

$$\tfrac{1}{2} V' = \log z + \sum_w{}' \left\{ \log(z - w) - \log(-w) + \frac{z}{w} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{w^2} \right\},$$

wo bei der Summation der Gröfse w alle in $ma + nb$ enthaltenen Werte mit Ausnahme des Wertes $w = 0$ beizulegen sind. Also ist

$$Q'(z) = e^{V'(z)} = \left\{ z \Pi'_w \left(1 - \frac{z}{w}\right) e^{\frac{z}{w} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{w^2}} \right\}^2 = \sigma(z)^2.$$

Demnach ist in diesem Falle $Q'(z)$ das Quadrat der Weierstrafsschen Sigmafunktion.

Kleine Bemerkung zur Helmholtzschen Wirbeltheorie.

Von E. Budde.

Wie allgemein bekannt, hat Helmholtz aus dem Satz

1. „Das Produkt aus der Rotationsgeschwindigkeit und dem Querschnitt eines Wirbelfadens ist in der ganzen Länge desselben Wirbelfadens konstant.“

den weiteren Satz abgeleitet

2. Ein Wirbelfaden mufs entweder ringförmig in sich verlaufen, oder bis an die Grenzen der Flüssigkeit reichen.

Zu diesem zweiten Satz ist ein Grenzfall denkbar, der wohl hervorgehoben zu werden verdient. Man kann sich nämlich vorstellen, der Wirbelfaden weite sich im Innern der Flüssigkeit trompetenförmig aus, etwa so, dafs sein Querschnitt sich nach allen Richtungen asymptotisch einer Ebene E nähert. Dann nimmt die Rotationsgeschwindigkeit seiner Bestandteile bei fortschreitender Annäherung an die Ebene E ins Unendliche ab, und jenseits E ist die Flüssigkeit in Ruhe, ohne dafs der Satz 1 dadurch verletzt würde. Auch ist kein Widerspruch gegen den Wortlaut des Satzes 2 vorhanden, da man den Vorgang so auffassen kann, dafs der Wirbelfaden sich mit abnehmender Geschwindigkeit bis an diejenige Grenze erstreckt, in welcher die Ebene E aus der Flüssigkeit heraustritt. Ist keine solche Grenze vorhanden, so weitet sich der Faden asymptotisch zu E unendlich aus, und die Rotationsgeschwindigkeit seiner Teilchen ist im Unendlichen ein unendlich Kleines zweiter Ordnung.

Zeichnet man sich die Figur zu dem hier bezeichneten Grenzfall, so wird man finden, dafs sie schematisch die Form eines Tornados darstellt. Darin liegt einerseits die Thatsache, dafs die fragliche Grenzform in der Natur wirklich vorkommt, und andererseits der Nachweis, dafs die blofse Form der Wirbelstürme sich den hydrodynamischen Gleichungen auch ohne Rücksicht auf Kompressibilität, Feuchtigkeit und Reibung der Luft unterordnet.

Die Bewegung des Kreisels.

Von Max Koppe.

Die durch den festen Punkt O gehende Achse eines mit der Winkelgeschwindigkeit Θ rotierenden Kreisels bewegt sich, ohne seitlichen Anstofs freigelassen, gerade so wie sich die Achse des *nicht* rotierenden Kreisels bewegen würde, wenn auf letzteren aufser der Schwere noch eine fingierte Kraft wirkte, welche die Achse stets senkrecht zu ihrer augenblicklichen Bewegungsebene, etwa nach links, zu verdrehen strebt. Es seien A, B, $\Gamma(=B)$ die Trägheitsmomente, φ der Winkel der Achse mit der Vertikalen, M die Masse, S der Schwerpunkt, $OS = s$. Wird die um O mit dem Radius 1 beschriebene Kugel von der Achse in P getroffen, so bewegt sich der Punkt P auf der Kugelfläche in beiden Fällen so wie ein selbständiger Punkt von der Masse 1, auf den abwärts, längs eines Meridians, die Kraft $G = Mgs \sin\varphi / B$ wirkt, und den senkrecht zu seiner augenblicklichen Geschwindigkeit ϑ die Kraft $H\vartheta = A\Theta\vartheta / B$ nach links ablenkt. Man denke sich eine Person, die auf dem Globus längs der Spur von P entlang schreitet, der positive Drehungssinn sei „rechts vorn links".

Wird der Punkt P freigelassen, so bewegt er sich zunächst auf einem Meridian abwärts mit der wachsenden Geschwindigkeit $G dt$. Hat er so die merkliche Geschwindigkeit ϑ erlangt, so wird diese durch die störende

Kraft $H\vartheta$ um einen kleinen Winkel nach links gedreht. Reduziert man die störende Kraft auf einzelne momentane Impulse, so wird die Bahn von P aus vielen Stücken gekoppelt, die unter bloſser Einwirkung von G durchlaufen werden, also Pendelbahnen sind. Die Bahn von P, nach oben konkav, muſs schlieſslich wagerecht werden, sie muſs dann, symmetrisch zu der bisherigen Bahn, wieder ansteigen. In der Höhe des Anfangs-Parallels kommt P zur Ruhe und beschreibt sofort eine zweite Ranke der Bahn.

In dem praktisch wichtigsten Falle, wo Θ sehr groſs ist, sind die Bahnranken wirklich Cykloiden, die nach dem Gesetz des Cykloidenpendels durchlaufen werden. Die störende Kraft lenkt dann sehr stark nach links ab, die Ranken haben Längen von weniger als 1 mm, werden durchlaufen in etwa $^1/_{100}$ Sekunde. Ein Bezirk, der viele Ranken umfaſst, kann also noch als eben gelten.

Rollt nämlich ein Kreis vom Radius a und Mittelpunkt M auf der unteren Seite einer Geraden, so daſs er sich mit der Winkelgeschwindigkeit α dreht, so beschreibt ein Massenpunkt P seines Umfangs eine Cykloide. Diese Bewegung kann durch die Centripetalkraft $PM \cdot \alpha^2$ unterhalten werden. Ist A der augenblickliche Berührungspunkt, so läſst sich geometrisch PM in PA und AM zerlegen. Die Kraft hat also zwei Komponenten. Die eine, $AM \cdot \alpha^2$, ist vertikal und hat die konstante Gröſse $a\alpha^2$, sie kann mit G identifiziert werden, die andere, $AM \cdot \alpha^2$, steht senkrecht zur augenblicklichen Geschwindigkeit $\vartheta\,(= AM \cdot \alpha)$ und ist ihr proportional, sie kann $= H\vartheta$ gesetzt werden. Aus $a\alpha^2 = G$, $\alpha = H$ folgt die mittlere Geschwindigkeit des Fortschreitens $= a\alpha = G/H$, endlich die mittlere Geschwindigkeit der durch die Achse gelegten Vertikalen (Präzessions-G.) $= a\alpha/\sin\varphi = Mgs/A\Theta$. Nach Dämpfung der Oszillationen bewegt sich die Kreiselachse nicht mehr wie der Punkt P des rollenden Kreises, sondern nähert sich asymptotisch der Bewegung seines Mittelpunktes M.

Steht die Achse fast vertikal aufwärts oder hängt sie abwärts, so beschreibt P andere Kurven, nämlich die Zweige von Epi- und Hypocykloiden.

Ein glockenförmiger Kreisel, dessen Schwerpunkt *unter* O liegt, und dessen Achse man von oben mit einem wagerechten S-förmigen Draht berührt, rollt seine runde materielle Achse an dieser Bahn ab, verdreht dadurch seine mathematische Achse, induziert so eine sehr starke Kraft, die ihn an das Geleise heranpreſst, so daſs er es sicher hin und her umläuft, ohne selbst an den stark gekrümmten Enden abzugleiten.

Der am Anfang ausgesprochene Satz soll nun *bewiesen* werden. Wir denken uns einen *schwerelosen* Kreisel, er rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit Θ um seine wagerechte Achse, welche in der Richtung OX liegt, gleichzeitig drehe sich diese Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ϑ um die vertikale Z-Achse, nach links, zur Y-Achse hin. Der Beweis kann auf zwei Arten geführt werden.

Entweder: Man nimmt als Kreisel nur 4 symmetrisch die Achse umgebende Massenpunkte m. Man führt den Kreisel erst durch die Rotation Θdt aus seiner Anfangslage (1) in eine Hilfslage (2), dann durch die Rotation ϑdt aus (2) in die Endlage (3). In allen 3 Lagen denkt man ihn sich mit den Geschwindigkeiten Θ, ϑ behaftet. Man bestimmt die Impulse, die jedes m aus dem Bewegungszustand (1) in (2) überführen,

ferner aus (2) in (3), und setzt sie an dem starren Kreisel zusammen.

Oder: Man denkt sich den anfänglichen Bewegungszustand des beliebigen Kreisels auf 2 Kräftepaare von Momentan-Kräften zurückgeführt, $A\Theta$ um OX, $B\vartheta$ um OZ. Ebenso zur Zeit dt in $A\Theta$ um eine neue wagerechte Achse, OX', die mit der alten den Winkel ϑdt bildet, und in $B\vartheta$ um die unveränderte Achse OZ. Zur Überführung des einen Zustandes in den andern ist erforderlich ein Impuls eines Kräftepaares $= A\Theta\vartheta dt$ mit der Achse OY, er müfste an sich den *ruhenden* Kreisel um OY abwärts zu drehen suchen. Denkt man sich daher zwei Kräftepaare, $A\Theta\vartheta$ und $-A\Theta\vartheta$ hinzugefügt, so unterhält das erste den Verlauf der beschriebenen Bewegung, das zweite sucht den Kreisel um OY beständig aufwärts zu drehen. Es bringt unendlich kleine Geschwindigkeiten hervor, die im Verlauf vieler Zeitelemente allmählich die Bewegung modifizieren, ähnlich den störenden Kräften der Planeten-Bewegung. Dieses zweite Kräftepaar ist die oben benutzte fingierte oder induzierte Ersatzkraft für die Rotation.

Hierin liegt die *wahre* Ausdehnung der Poinsotschen Gedanken auf den schweren Kreisel. Die *instantane* Achse zeigt sich hier *nicht* als das sachgemäfse Mittel zum anschaulichen Verständnis. Die „fingierte" Kraft, zuerst mitgeteilt in Poskes Zeitschrift II, 1888, S. 103 (ferner IV, S. 70—83), ist mit Poinsots Zentrifugalkräften, ferner mit Coriolis Kraft auf eine Linie zu stellen.

Zusatz. Die *Gröfse* der Geschwindigkeit ϑ für ein bestimmtes φ wird von der Kraft $H\vartheta$ nicht beeinflufst, sie folgt also dem Gesetz des sphärischen Pendels. Während aber die Pendelbahnen ihre konkave Seite nach dem unteren Teil der Kugel wenden, sind die Kreiselbahnen, unter Einflufs der Kräfte G und $H\vartheta$, auch bei mäfsigem Θ und bei *beliebigen* Anfangsbedingungen im tiefsten Gebiet der Kugel sicher nach oben konkav. Selten werden sie durch den tiefsten Punkt der Kugel hindurchgehen.

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

5. Sitzung am 26. Februar 1902.

Vorsitz: Herr Weingarten.

Anwesend 40 Herren.

Folgende Beschlüsse werden gefaſst:

Alle Herren, welche sich bis zum Beginn der heutigen Sitzung zum Eintritt in die Gesellschaft gemeldet haben, gelten als Mitglieder. Für die Aufnahme weiterer Mitglieder wird folgendes festgesetzt. Wer Mitglied der Gesellschaft zu werden wünscht, muſs durch zwei Mitglieder beim Vorstande angemeldet werden. Dieser giebt in der ersten auf die Meldung folgenden Sitzung die gemeldeten Namen bekannt; erfolgt bis zur darauffolgenden Sitzung kein Widerspruch, so gelten die gemeldeten Personen als Mitglieder der Gesellschaft.

Der Erwerb der Mitgliedschaft ist vom Wohnorte unabhängig.

In den Sitzungsberichten erscheinen nur wissenschaftliche Mitteilungen und Referate, die von Mitgliedern in den Sitzungen der Gesellschaft vorgetragen und noch nicht anderweitig veröffentlicht sind, und zwar unter dem Namen des Vortragenden.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Adler: Zur Theorie der Zeicheninstrumente (s. u.).

Herr Wallenberg: Zur Theorie der Differentialgleichungen erster Ordnung. Der Vortragende spricht über den Satz des Herrn Michel Petrowitsch (Thèse de Doctorat, Paris; Comptes rendus 1894), daſs eine Differentialgleichung erster Ordnung und ersten Grades

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

worin P und Q ganze rationale Funktionen von x und y sind, höchstens drei selbständige, d. h. algebraisch von einander unabhängige eindeutige transcendente Integrale besitzen kann.

An der Diskussion beteiligen sich die Herren Adler, Dziobek, Güntsche, Hessenberg, Koppe, F. Müller, Steinitz, Wallenberg, Weingarten.

6. Sitzung am 19. März 1902.

Vorsitz: Herr Weingarten.

Anwesend 38 Herren.

Verlesen wird das im Auftrage der Gesellschaft an Herrn Dedekind gerichtete Glückwunschschreiben zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum (s. u.).

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Hauck: Über uneigentliche Projektionen.

Herr Hensel: Algebraische Zahlen und analytische Funktionen (s. u.).

Zur Theorie der Zeicheninstrumente.

Von A. Adler.

Die gebräuchlichsten Zeichenhilfsmittel sind der Zirkel, das Lineal (zwei parallele Linien im konstanten Abstande) und der bewegliche rechte oder spitze Winkel (etwa aus Holz). Die naheliegendste Frage ist die nach dem Wirkungsbereiche eines jeden dieser Instrumente; davon soll im Nachfolgenden kurz die Rede sein. Ausführlicheres findet sich in der beigegebenen Litteratur.

1. Was den Zirkel anlangt, so hat bekanntlich Mascheroni gezeigt, dafs man alle geometrischen Konstruktionsaufgaben, welche man gewöhnlich mit Hilfe des Zirkels und der geraden Linie löst, also alle sogenannten geometrischen Aufgaben 2. Grades, nur mit Hilfe des Zirkels allein lösen kann; ein Resultat, welches auch praktisch genommen wertvoll ist, da ja der Zirkel das genaueste Zeichenhilfsmittel bildet. Die Konstruktionen, welche Mascheroni lehrt, sind zwar einfach, aber meist auf so künstlichem Wege gefunden, dafs wohl jeder Leser seines Werkes das Bedürfnis fühlt, diese Konstruktionen aus einem einheitlichen Prinzip heraus zu entwickeln.

Dies gelingt nun viel leichter, als man bei dem Umfange des Gegenstandes vermuten würde, und zwar mit Hilfe des Prinzips der reziproken Radien. Es ist dabei nur notwendig, eine Konstruktion anzugeben, nach welcher man mit dem *Zirkel allein* zu einem Punkte P in Bezug auf den festen Kreis K (mit dem Mittelpunkte O) den inversen Punkt P' finden kann. Zu dem Zwecke schlägt man aus P als Mittelpunkt den Kreis mit dem Radius PO und erhält so die Schnittpunkte S_1 und S_2 mit K und im Schnittpunkte der beiden Kreise, welche S_1 resp. S_2 zum Mittelpunkte haben und durch O gehen, schon den gesuchten inversen Punkt P'.

Jede ausgeführte geometrische Aufgabe 2. Grades bildet eine Figur F, welche aus geraden Linien und Kreisen besteht: die zu F in Bezug auf K inverse Figur F' besteht daher nur aus Kreisen und kann also mit dem Zirkel allein durchgeführt werden. Da aber auch der Übergang von F zu F' nach Obigem nur mit Hilfe des Zirkels allein gezeichnet werden kann, so ist damit schon bewiesen, dafs sich jede Aufgabe 2. Grades mit dem Zirkel allein lösen läfst, und ist auch schon ein brauchbarer Weg angegeben: Man denke sich nämlich die vorgelegte Aufgabe auf dem gewöhnlichen Wege gelöst, wodurch man vor dem geistigen Auge die Figur F erhält; nun *zeichne* man die in Bezug auf einen passenden Kreis K inverse Figur F' und zu

dem so erhaltenen Resultat von F' das inverse Gebilde, wodurch die Aufgabe gelöst ist.

Schlägt man diesen Weg ein, so erhält man auf durchsichtigem Wege die Mehrzahl der Mascheronischen Konstruktionen; besonders einfach wird jetzt auch die Lösung einer Hauptaufgabe, die besondere Schwierigkeiten bereitet, nämlich eine Strecke AB mit dem Zirkel allein in n gleiche Teile zu zerlegen. Man braucht jetzt nur als Kreis K den mit A als Mittelpunkt und AB als Radius anzunehmen, die Strecke AB ferner $(n-1)$-mal nacheinander auf ihrer Verlängerung aufzutragen und zu dem so erhaltenen Endpunkte den inversen in Bezug auf K zu konstruieren.

Unsere Konstruktion des inversen Punktes P' ist auch aus dem Grunde beachtenswert, dafs sie einfacher als die gewöhnlich angewandte ist, und weil sie wohl überhaupt zu den einfachsten, allgemeinen Konstruktionen gehört, welche man mit dem Zirkel allein durchführen kann, wodurch wieder die fundamentale Bedeutung des Prinzips der reziproken Radien für die Kreislehre hervortritt.

2. Auch mit jedem anderen der oben angeführten Zeichenhilfsmittel *allein*, dem Lineal, dem rechten oder spitzen Winkel, kann man jede geometrische Aufgabe 2. Grades streng lösen; die Konstruktionen, welche man dabei findet, sind oft sehr einfach und haben auch praktischen Wert, namentlich die mit dem Lineal allein für Mefstischarbeiten.

Bemerkt sei noch, dafs man mit zwei beweglichen rechten Winkeln auch Gleichungen 3. und 4. Grades strenge lösen kann, indem man der in Cremonas *„graphischem Kalkul“* dargestellten Methode Lills zur Konstruktion der Wurzeln algebraischer Gleichungen folgt. Der bewegliche rechte Winkel ist demnach das mächtigste der gewöhnlichen Zeichenhilfsmittel.

Es sei noch die wichtigste *Litteratur* des Gegenstandes angegeben:

1. Mascheronis Werk „La geometria del compasso“ erschien 1797 in Pavia und ist mehrfach ins Deutsche übertragen und bearbeitet worden.

2. Von Steiner erschien 1833 die Schrift: Die geometrischen Konstruktionen ausgeführt mit Hilfe der geraden Linie und eines festen Kreises“; bemerkt sei aber, dafs viele der von Steiner hier angegebenen Konstruktionen sich in Lamberts „freier Perspektive“ 1774 vorfinden; die Möglichkeit, alle geometrischen Konstruktionen mit Hilfe eines festen Kreises und der geraden Linie zu lösen, wurde auch schon von Poncelet gezeigt in seinen „Propriétés“ (S. 187—190) 1822.

3. Von dem Verfasser dieser Zeilen erschienen 1890 zwei kleine Aufsätze in den Wiener Berichten unter den Titeln: „Über die zur Ausführung geometrischer Konstruktionen notwendigen Hilfsmittel“, und „Zur Theorie der Mascheronischen Konstruktionen“.

4. Herr F. Klein hat bekanntlich 1895 ein Werk erscheinen lassen: „Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie“. Klein führt darin insbesondere die Konstruktion des regelmäfsigen 17-Eckes mit Hilfe eines festen Kreises und der geraden Linie aus und wirft in einer Fufsnote auf S. 27 die Frage nach Lösung derselben Aufgabe mit Hilfe des Zirkels allein auf. Die Antwort darauf ergiebt sich nach Obigem ohne weiteres; man hat nur zur Kleinschen Konstruktion die inverse in Bezug auf den festen Kreis zu zeichnen.

5. Herr Hilbert behandelt in seinen „Grundlagen der Geometrie“ (1899) die geometrischen Konstruktionen ausgeführt mit der geraden Linie und einem *Streckenübertrager*. Man kann aber mit alleiniger Benutzung dieser Hilfsmittel nicht jede geometrische Aufgabe 2. Grades lösen, nämlich jene nicht, welche die Konstruktion von $\sqrt{a^2 - b^2}$ verlangen, wobei a und b gegebene Strecken sind. Herr Hilbert beweist, dass die Konstruktion dieses Wurzelausdruckes mit seinen Hilfsmitteln nicht möglich ist, und bemerkt, daſs man wohl damit die auch mit dem Zirkel allein konstruierbaren regulären Polygone, ebenso z. B. das Malfattische Problem, nicht aber das Apollonische lösen kann.

6. Herr Feldblum zeigt in einer Doktordissertation „Über elementar geometrische Konstruktionen“ (Göttingen 1899) zunächst die Lösung der Elementaraufgaben mittelst Streckenübertrager und gerader Linie, ferner die Lösung der Malfattischen Aufgabe, die Konstruktion der regelmäſsigen 5- und 10-Ecke mit diesen Hilfsmitteln; er weist auch geometrisch nach, daſs es nicht möglich ist, damit einen Kreis zu konstruieren, welcher 2 gerade Linien berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

Herr Feldblum führt hierauf 2 Instrumente ein, den *Winkelhalbierer* und den *Winkeldrittler;* das erstere besitzt die Form eines Rhombus, von dem 3 Ecken Gelenke sind und wobei der 4. Eckpunkt auf einer vorhandenen Diagonale gleitet; das zweite besteht aus der Verbindung von zwei derartigen Mechanismen. Herr Feldblum beweist einfach, daſs der Winkelhalbierer genau gleichwertig dem Streckenübertrager beim Konstruieren ist, und daſs man mit dem Winkeldrittler die Wurzeln jeder kubischen Gleichung mit positiver Diskriminante konstruieren kann, also insbesondere den Kreis in 7 oder 13 gleiche Teile zerlegen kann, wie Herr Feldblum auch des näheren zeigt. Man ist aber nicht imstande, mit einem dieser beiden Instrumente $\sqrt{a^2 - b^2}$ zu konstruieren; selbst beide Instrumente zusammen machen daher den Zirkel nicht entbehrlich.

Glückwunschschreiben der Berliner Mathematischen Gesellschaft zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum des Herrn R. Dedekind.

Hochgeehrter Herr Geheimrat!

Die Berliner Mathematische Gesellschaft spricht Ihnen zur fünfzigjährigen Wiederkehr des Tages, an welchem Sie die ersten akademischen Ehren erwarben, die herzlichsten Glückwünsche aus.

Mit Dankbarkeit und Bewunderung gedenkt die mathematische Welt der reichen Früchte, welche Ihre rastlose Arbeit an den schwierigsten Problemen unserer Wissenschaft gezeitigt hat.

Sie haben den fundamentalen Begriff des Zahlkörpers ausgebildet und die Gesetze der Teilbarkeit ganzer Zahlen mittelst ganz neuer Methoden und Begriffsbildungen auf den allgemeinsten Körper ausgedehnt. Die Untersuchungen über die Komposition und Klassenzahl der quadratischen Formen, welche zu Gauſs' und Dirichlets höchsten Ruhmestiteln gehören, haben Sie verallgemeinert, Ihrer Theorie der Ideale eingeordnet und damit den tieferen Sinn der älteren Resultate dargelegt. Ein besonderer Genuſs wird

es für den Liebhaber der höheren Arithmetik immer sein, zu verfolgen, wie Sie, von der Theorie der höheren Kongruenzen ausgehend, jene rätselhaften Ausnahmeerscheinungen aufgeklärt haben, welche die Faktoren der Diskriminante bei der Zerlegung der algebraischen Zahlen in Faktoren darbieten.

Wenn alle diese Untersuchungen zum vollen Verständnis eine eingehende Vertiefung in die Algebra und Zahlentheorie erfordern, so haben Sie durch die Bearbeitung der Vorlesungen Dirichlets die weitesten Kreise der mathematischen Welt zu Dank verpflichtet und für das Studium der höheren Arithmetik das grundlegende Lehrbuch geschaffen.

Aber Ihre Thätigkeit war keineswegs auf eine einzelne Disziplin unserer Wissenschaft beschränkt; wie Sie schon innerhalb der Arithmetik, auf Dirichlets Bahnen fortschreitend, die mannigfaltigsten Beziehungen zur transzendenten Analysis anknüpften, so haben Sie durch Ihre Begründung der Theorie der Modulfunktionen für das Studium einer der interessantesten speziellen Funktionen die sichere Basis geschaffen. Sie haben ferner durch die Bearbeitung unvollendeter Untersuchungen von Dirichlet und Riemann verschiedene Probleme der mathematischen Physik und der Mannigfaltigkeitslehre wesentlich gefördert.

Endlich sind Sie der mächtigen, auf die Kritik der Grundbegriffe ausgehenden Bewegung unserer Zeit ein Führer gewesen, indem Sie durch Ihren Begriff des Schnittes eine ebenso eigenartige wie fruchtbare Lösung des Problems, die Stetigkeit arithmetisch zu erfassen, gegeben haben, und in Ihren Untersuchungen über den Zweck und das Wesen der ganzen Zahlen bis an die Schwelle der erkenntnistheoretischen Schwierigkeiten vorgedrungen sind.

Die dankbare und bewundernde Anerkennung der mathematischen Wetl ist Ihnen seit langen Jahren in reichem Maſse zu teil geworden; den schönsten Lohn Ihrer Arbeit aber haben Sie, so denken wir, an dem Bewuſstsein, in die lebendige Entwicklung der Wissenschaft auf das kräftigste eingegriffen und dem stolzen Bau der mathematischen Erkenntnis die Spuren Ihres persönlichen Schaffens in unauslöschlicher Weise eingeprägt zu haben. Möge Ihnen die Freude der Arbeit und der Vollbesitz aller Geisteskräfte noch lange erhalten bleiben.

Mit dem Ausdruck aufrichtigster Verehrung

Die Berliner Mathematische Gesellschaft.

Berlin, den 18. März 1902.

Über analytische Funktionen und algebraische Zahlen.

Von K. Hensel.

Vergleichen wir die Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen mit der Theorie der algebraischen Zahlen, so tritt uns besonders ein wesentlicher Unterschied in diesen beiden Disziplinen entgegen:

In der Funktionentheorie untersuchen wir eine algebraische Funktion in der Umgebung irgend einer Stelle, welche im Endlichen oder im Un-

endlichen liegen kann; in beiden Fällen sind die Methoden und die Resultate absolut identisch; diese Fälle brauchen also gar nicht von einander unterschieden zu werden. In der höheren Arithmetik werden die algebraischen Zahlen einmal auf ihre Teilbarkeit untersucht mit Hülfe der Idealtheorie, zweitens in Bezug auf ihre Gröfse, und diese Fragen führen auf die Theorie der Einheiten und im weiteren Umfange auf die Betrachtungen, welche man nach Minkowski als die Geometrie der Zahlen bezeichnet. Während die Resultate dieser beiden arithmetischen Untersuchungen sehr ähnlich sind, erscheinen ihre Methoden völlig verschieden.

Während ferner die Idealtheorie und die Theorie der Einheiten auf das Gebiet der algebraischen Zahlen beschränkt ist, bleibt die Theorie der analytischen Funktionen auf die transzendenten Funktionen genau ebenso anwendbar wie auf die algebraischen Funktionen; sie führt uns in naturgemäfsem Übergange aus dem Reiche der algebraischen Gröfsen zu den einfachsten mit ihnen zusammenhängenden transzendenten Funktionen und ergiebt nun eine einleuchtende Einteilung derselben nach ihren charakterischen Eigenschaften.

Durch langjährige Beschäftigung mit jenen beiden Disziplinen von diesem Gesichtspunkte aus wurde ich zu einer Auffassung der Lehre von den allgemeinen Zahlgröfsen hingeführt, welche man als Ausdehnung der Theorie der analytischen Funktionen auf die Zahlgröfsen ansehen kann, und welche mir einen neuen Einblick in die Natur der rationalen algebraischen und transzendenten Zahlen zu gewähren scheint. Sie hat bisher als gesichertes Resultat eine vollständige und völlig einheitliche Behandlung der algebraischen Zahlen nach ihrer Teilbarkeit *und* nach ihrer Gröfse ergeben, und ich möchte meine Auffassung an diesem Beispiele dadurch erläutern, dafs ich die Grundlagen der Theorie der rationalen und algebraischen Funktionen mit denjenigen der rationalen und algebraischen Zahlen vergleiche.

Eine eindeutige analytische Funktion besitzt an jeder Stelle $(x = \alpha)$ oder $(x = \infty)$ rationalen Charakter, wenn sie in der Umgebung derselben in eine Potenzreihe

$$r(x) = \sum_{k=\varrho}^{\infty} a_k (x-\alpha)^k, \quad \text{bzw.} \quad \sum_{k=\varrho}^{\infty} a_k \left(\frac{1}{x}\right)^k$$

entwickelt werden kann, welche höchstens eine endliche Anzahl negativer Potenzen enthält, wenn sie also für jene Stelle mit jeder vorgegebenen Genauigkeit, d. h. für eine beliebig hohe Potenz $(x-\alpha)^M$ als Modul durch eine rationale Funktion von x ausdrückbar ist. Ordnet man der Stelle $(x = \alpha)$ einen Primfaktor $\mathfrak{p}$ zu und sagt, dafs $r(x)$ durch $\mathfrak{p}^\varrho$ teilbar ist, wenn $r(x)$ an der zugehörigen Stelle die Ordnungszahl ϱ hat, so entspricht jeder endlichen und der unendlich fernen Stelle je ein Primfaktor, und für das Rechnen mit diesen Primteilern bestehen die einfachen Gesetze für die Primzahlen in der elementaren Arithmetik. An Stelle von $x-\alpha$ bzw. von $\frac{1}{x}$ kann auch irgend eine Funktion erster Ordnung für jene Stelle gewählt werden, an Stelle der Koeffizienten a_k kann man irgendwelche wohldefinierten Funktionenelemente von nicht negativer Ordnung voraussetzen, wobei wir aber speziell den Anfangskoeffizienten a_ϱ als von nullter Ordnung annehmen wollen. Alle rationalen Funktionen besitzen an jeder Stelle rationalen

Charakter, auf sie können daher die Gesetze der elementaren Arithmetik überall angewendet werden.

Eine n-deutige analytische Funktion y besitzt an jeder Stelle $(x = \alpha)$ oder $(x = \infty)$ algebraischen Charakter, wenn ihre n Werte in der Umgebung derselben nach ganzen oder gebrochenen Potenzen der zugehörigen Linearfaktoren entwickelt werden können, welche höchstens eine endliche Anzahl negativer Potenzen enthalten, wenn sie also an jeder Stelle $(x = \alpha)$ mit jeder vorgegebenen Genauigkeit, d. h. für eine beliebig hohe Potenz $(x - \alpha)^M$ als Modul durch eine algebraische Funktion dargestellt werden kann. Ordnet man der Stelle $(x = \alpha)$ n gleiche oder verschiedene Primteiler $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ zu, und sagt man, dafs y z. B. durch $\mathfrak{P}_i^{\varrho_i}$ teilbar ist, wenn die Entwickelung von y_i an jener Stelle die Ordnungszahl ϱ_i hat, so bestehen wieder für das Rechnen mit jenen Primteilern die Gesetze der elementaren Arithmetik.

Genau ebenso wollen wir sagen, eine Zahlgröfse r hat überall rationalen Charakter, wenn sie die folgenden beiden Eigenschaften besitzt:

1) Sie kann in eine nach fallenden Potenzen einer beliebigen Zahl m, z. B. von 10 fortschreitende Reihe entwickelt werden, mit wohldefinierten Koeffizienten, welche ihrer Gröfse nach unterhalb m liegen, und diese Entwickelung enthält höchstens eine endliche Anzahl positiver Potenzen von m. Eine solche Gleichung:

$$r = \frac{a_\varrho}{m^\varrho} + \frac{a_{\varrho+1}}{m^{\varrho+1}} + \cdots$$

spricht nur aus, dafs r eine endliche Zahl ist oder mit jeder vorgegebenen Annäherung der Gröfse nach durch eine rationale Zahl dargestellt werden kann.

2) Sie kann nach steigenden Potenzen einer beliebigen ganzen Zahl μ in eine Reihe

$$b_\varrho \mu^\varrho + b_{\varrho+1} \mu^{\varrho+1} + \cdots$$

mit wohldefinierten Koeffizienten $b_i < \mu$ entwickelt, d. h. mit jeder Annäherung (für eine beliebig hohe Potenz von μ als Modul) durch eine rationale Zahl dargestellt werden.

Alle rationalen Zahlen haben überall rationalen Charakter, da sie erstens stets endlich sind, und zweitens jede rationale Zahl im Zahlensysteme mit der Grundzahl μ auf eine einzige Weise dargestellt werden kann. Auf die hier sofort sich darbietende Umkehrung dieses Satzes gedenke ich bei einer anderen Gelegenheit einzugehen.

Ordnet man speziell jeder Primzahl p einen Primteiler $\mathfrak{p}$ zu, und sagt man, dafs r durch $\mathfrak{p}^\varrho$ teilbar ist, wenn die zu p gehörige Entwickelung die Ordnungszahl ϱ besitzt, so ergeben sich für das Rechnen mit diesen Primteilern diejenigen Gesetze, welche in der elementaren Zahlentheorie für die zugeordneten Primzahlen entwickelt werden. Dasselbe gilt hinsichtlich der Gröfse jener Zahlen r, wenn man ihnen für den zugeordneten Primteiler $\mathfrak{p}_\infty$ eine geeignet präzisierte Ordnungszahl giebt.

Allgemeiner will ich sagen, eine n-wertige Zahlgröfse ξ hat überall algebraischen Charakter, wenn sie die folgenden beiden Eigenschaften besitzt:

1) Ihre n Werte $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ können nach fallenden Potenzen einer beliebigen Zahl m mit wohldefinierten Koeffizienten entwickelt werden,

welche ihrem absoluten Betrage nach kleiner als m sind, d. h. diese n Werte sind endliche reelle oder komplexe Zahlen.

2) Ihre n Werte können nach steigenden Potenzen einer beliebigen Zahl μ, z. B. einer beliebigen Primzahl p in Reihen mit wohldefinierten Koeffizienten entwickelt werden, welche nach ganzen oder gebrochenen Potenzen von p fortschreiten und höchstens eine endliche Anzahl negativer Potenzen von p enthalten. Eine solche Zahlgröfse hat also algebraischen Charakter, wenn sie sowohl ihrer Gröfse nach, als auch für jede noch so hohe Potenz μ^M einer beliebigen Zahl μ als Modul mit jeder vorgegebenen Genauigkeit durch algebraische Zahlen darstellbar ist.

Die gewöhnlichen algebraischen Zahlen, d. h. die Wurzeln ganzzahliger Gleichungen sind Zahlgröfsen, welche überall algebraischen Charakter haben. Dafs dieselben nach *fallenden* Potenzen von m entwickelt werden können, lehrt der Existenzbeweis der Wurzeln, dafs dasselbe aber auch für die Entwickelung nach *steigenden* Potenzen jeder Zahl μ bezw. jeder Primzahl p der Fall ist, mufste erst bewiesen werden; ich habe einen direkten und sehr einfachen Beweis dieser Thatsache in einer in diesem Winter gehaltenen Vorlesung auseinandergesetzt.

Auf alle Zahlgröfsen, welche überall algebraischen Charakter haben, können die Gesetze der elementaren Arithmetik ohne weiteres angewendet werden. Ordnet man nämlich jeder Primzahl p wieder n gleiche oder verschiedene Primdivisoren $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_n$ zu und sagt, die Zahl ξ enthält z. B. den Primteiler $\mathfrak{p}_i$ in der ϱ_i-ten Potenz, wenn die Entwickelung von ξ_i nach Potenzen von p von der ϱ_i-ten Ordnung ist, so gelten für das Rechnen mit diesen Primteilern die einfachen Gesetze der elementaren Zahlentheorie, und die Anwendung derselben auf algebraische Zahlen liefert die vollständige Theorie der Ideale.

Ebenso kann man die Entwickelungen jener Zahlen nach fallenden Potenzen von m behandeln, und wenn man auch hier die Ordnungszahlen geeignet definiert, so erhält man eine vollständige Theorie der Einheiten.

Genau dieselben Prinzipien kann man auch auf die Theorie der algebraischen Funktionen zweier Variablen anwenden, wie ich demnächst an einer anderen Stelle ausführlich darlegen werde.

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

7. Sitzung am 30. April 1902.

Vorsitz: Herr Kneser.

Anwesend 35 Herren.

Der Vorsitzende gedenkt vor dem Eintritt in die Tagesordnung des schweren Verlustes, den die Wissenschaft durch das Hinscheiden des Herrn L. Fuchs erlitten hat.

Verlesen wird die Antwort des Herrn Dedekind auf die ihm dargebrachten Glückwünsche der Gesellschaft (s. u.) sowie das Protokoll der Verhandlungen über den nächsten internationalen Mathematikerkongreſs, welche im März unter Anteilnahme eines Vertreters der Gesellschaft zu Leipzig abgehalten worden sind.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Reiſsner: Mechanische Analogie zur Elastizität (s. u.).

Herr Hauck: Nachtrag zu dem in der vorigen Sitzung gehaltenen Vortrage (s. u.).

Herr Opitz: Über die Frage nach den Brennlinien eines sehr dünnen astigmatischen Strahlenbündels und ihre Bedeutung für das Bildpunktproblem der geometrischen Optik (s. u.).

An der Diskussion beteiligen sich die Herren Hahn, Hauck, Hessenberg, Koppe, Lampe, Opitz.

8. Sitzung am 28. Mai 1902.

Vorsitz: Herr Kneser.

Anwesend 38 Herren.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Budde: Über eine Gruppe von gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zwischen zwei Veränderlichen (s. u.).

Herr Hessenberg: Über die Gleichung der geodätischen Linien.

Herr Rothe: Bemerkungen über ein spezielles krummliniges Koordinatensystem (s. u.).

An der Diskussion beteiligen sich die Herren Budde, Hamburger, Hessenberg, Knoblauch.

Antwort des Herrn Dedekind auf das Schreiben der Berliner Mathematischen Gesellschaft (s. S. 28).

An die Berliner Mathematische Gesellschaft zu Händen des Herrn Geh. Regierungsrat Weingarten zu Charlottenburg.

Hochgeehrter Herr Kollege! Durch die Zuschrift, welche Sie und die Herren Kneser und Jahnke im Namen der Berliner Mathematischen Gesellschaft mit so herzlichen Glückwünschen zu meinem Doktor-Jubiläum am 18. März mir gewidmet haben, fühle ich mich hoch geehrt. Sie entwerfen ein überaus wohlwollend gezeichnetes Bild von den mathematischen Arbeiten, in welchen ich versucht habe, nach meinen Kräften einige Beiträge zu der durch ihren Reichtum überwältigenden, unvergleichlichen Entwicklung zu liefern, welche unsere Wissenschaft in der zweiten Hälfte des verflossenen Jahrhunderts erfahren hat. Das, was in der vorausgegangenen Zeit einige wenige, in einsamer Höhe stehende gröſste Geister geschaffen hatten, begann damals Gemeingut zu werden und immer gröſsere Kreise in unwiderstehlichem Strome mit sich fortzureiſsen zu fruchtbarer Arbeit auf neu eröffneten Bahnen. Denke ich zurück an meine Jugendzeit, an den damaligen Stand des mathematischen Studiums an den Universitäten, an die durchschnittlich recht mangelhafte Durchbildung des mathematischen Lehrerstandes, so läſst der Vergleich mit der Gegenwart einen gewaltigen Fortschritt erkennen, und ganz besonders charakteristisch erscheint mir hierfür das Wiederaufblühen älterer und die Bildung ganz neuer Gesellschaften zu sein, die sich in gemeinsamer Arbeit die Pflege der mathematischen Wissenschaft und ihre Verbreitung in gröſseren Kreisen zum Ziel erwählen. So begrüſse ich auch mit Freude die jüngste solche Vereinigung, Ihre Berliner Mathematische Gesellschaft, als ein hoffnungsreiches Zeichen für die unaufhörlich fortschreitende mathematische Bewegung im neuen Jahrhundert.

Indem ich Sie bitte, hochgeehrter Herr Kollege, der Berliner Mathematischen Gesellschaft meinen herzlichsten Dank für die hohe Ehrung zu übermitteln, deren sie mich gewürdigt hat, verbleibe ich mit ausgezeichneter Hochachtung Ihr ergebenster

Braunschweig, 1. April 1902. R. Dedekind.

Über uneigentliche Projektionen.

Von G. Hauck.

1. Es sollen zunächst die wichtigsten Sätze aus der (noch unveröffentlichten) Theorie der *parallelprojektiv-trilinearen Verwandtschaft*, soweit sie im Nachfolgenden in Betracht kommen, kurz skizziert werden.

Projiziert man ein räumliches Punktsystem parallel mit drei beliebigen Richtungen auf drei Projektionsebenen und bezeichnet je drei solche Punkte x, x', x'' der drei Ebenen, die die Projektionen des nämlichen Raumpunktes X vorstellen, als einander zugeordnet, so werden dadurch die Punkte der drei Ebenen trilinear auf einander bezogen.

Die drei Ebenen, die durch je zwei projizierende Strahlen eines Raumpunktes gelegt werden, schneiden die drei Projektionsebenen nach sechs Geraden, die wir *Kernstrahlen* nennen. Für mehrere Raumpunkte sind die gleichartigen Kernstrahlen unter sich parallel und bilden sechs Parallelstrahlenbüschel, von denen je zwei projektiv sind und perspektiv liegen in Bezug auf die Schnittkante (*Grundschnitt*) zweier Projektionsebenen. Wir bezeichnen sie als *gegnerische* Kernstrahlenbüschel. Die Zuordnung der Punkte der drei ebenen Systeme kann nun auch so ausgedrückt werden: *Von einem Tripel zugeordneter Punkte x, x', x'' müssen je zwei auf entsprechenden Strahlen der betreffenden gegnerischen Kernstrahlenbüschel liegen.* Dadurch ist die Zuordnungsbestimmung ganz in die Systemebenen selbst verlegt. Man kann beliebige Tripel zugeordneter Punkte durch Zeichnung in den Systemebenen bestimmen, ohne im Raum zu operieren.

Die durch die Perspektivität der gegnerischen Kernstrahlenbüschel bedingte besondere Lage der drei ebenen Systeme nennen wir *orientierte Lage*. Sie kann beliebig variiert werden: Im Schnittpunkt der drei Projektionsebenen (*Scheitelpunkt*) liegt ein Tripel zugeordneter Punkte vereinigt. Man kann nun jedes beliebige Tripel a, a', a'' dazu bestimmen, daſs es in den Scheitelpunkt zu liegen kommt. Die zugehörigen Grundschnitte ergeben sich dadurch, daſs man je zwei gegnerische Kernstrahlenbüschel nach kongruenten Punktreihen schneidet, die durch die bezüglichen Punkte des Tripels a, a', a'' gehen (∞^3 Möglichkeiten). Fügt man dann die drei Systemebenen zu einem Dreikant so zusammen, daſs je zwei kongruente Punktreihen in einer Kante (Grundschnitt) vereinigt werden, so ist die orientierte Lage hergestellt.

In dieser neuen orientierten Lage stellen die drei ebenen Systeme wieder die Parallelprojektionen eines räumlichen Systems vor. Die projizierenden Richtungen und der zu einem Tripel x, x', x'' gehörige Raumpunkt X ergeben sich durch den Schnitt der drei Ebenen, die durch je zwei gegnerische Kernstrahlen des Tripels gelegt werden. Das jetzige räumliche System ist aber verschieden von dem früheren, es ist zu ihm nur affinverwandt. Die gegenseitigen Beziehungen zwischen den drei ebenen Systemen sind gänzlich unabhängig von der jeweiligen Orientierung und von der durch sie bedingten verschiedenen Gestaltung des räumlichen Systems, als dessen Projektionen die drei ebenen Systeme bei verschiedener Orientierung erscheinen. — Dadurch greift in der Theorie der trilinearen Verwandtschaft eine gröſsere Freiheit in der Auffassung der zur Darstellung eines räumlichen Gebildes zusammenwirkenden Projektionen Platz, als sie in der darstellenden Geometrie bislang statthaft erschien.

In einer und derselben Ebene befinden sich die drei ebenen Systeme in orientierter Lage, sobald sie so gelegt werden, daſs ein Tripel zugeordneter Punkte in einem Punkt vereinigt ist.

Die Verwandtschaft ist bestimmt, wenn die drei Winkel, die die Kernrichtungen in jedem System mit einander bilden, und die drei Projektivitätsverhältnisse der drei gegnerischen Kernbüschelpaare (Verh. der Abstände zweier Paare entsprechender Strahlen) gegeben sind. Die verschiedenen Arten und Unterarten der parallelprojektiv-trilinearen Verwandtschaft werden charakterisiert durch gewisse Beziehungen, die zwischen diesen 6 Bestimmungsgröſsen stattfinden.

2. Unter der reichen Mannigfaltigkeit der verschiedenen Verwandtschaftsformen ist die einfachste diejenige, die durch die Bedingung gekennzeichnet wird, dafs die Summe der drei Kernstrahlenwinkel $= 2R$ ist, und dafs die drei Projektivitätsverhältnisse je $= 1$ (also je zwei gegnerische Kernstrahlenbüschel kongruent) sind.

Gemäfs dieser Bedingung können drei solche Systeme stets in eine derartige orientierte Lage in einer und derselben Ebene gebracht werden, bei welcher je zwei gegnerische Kernstrahlenbüschel sich in Deckung befinden. Je drei zugeordnete Punkte bilden dann die Ecken von lauter ähnlichen und ähnlich liegenden Dreiecken, in deren Seiten je zwei entsprechende gegnerische Kernstrahlen vereinigt sind. Die Grundschnitte und der Scheitelpunkt sind unbestimmt. In jedem Punkt der Ebene sind drei zugeordnete Punkte vereinigt.

Wir bezeichnen diese besondere Form der Verwandtschaft als *komplanare* Verwandtschaft. Man erkennt nämlich leicht, dafs drei solche Systeme in der genannten Orientierung als Projektionen eines räumlichen Systems auf drei zusammenfallende Projektionsebenen betrachtet werden können. Man kann zu einem Tripel zugeordneter Punkte x, x', x'' den zugehörigen Raumpunkt X willkürlich wählen und dadurch die Richtungen der projizierenden Strahlen bestimmen. Die einzelnen Punktetripel mit ihren zugehörigen Raumpunkten bilden dann die Ecken von lauter ähnlichen und ähnlich liegenden Tetraedern.

3. Es liegt nun der Gedanke nahe, diese einfachste Verwandtschaftsform für die Konstruktionen der Mongeschen darstellenden Geometrie nutzbar zu machen. Das Verfahren der darstellenden Geometrie, bei welchem drei Projektionen ins Spiel kommen, wird als Methode der *Transformation* bezeichnet: Man nimmt zu Grundrifs und Aufrifs noch eine dritte Projektion hinzu, die man so wählt, dafs sich in ihr vermöge ihrer gestaltlichen Besonderheit die Lösung der gestellten Aufgabe direkt oder wenigstens einfacher ergiebt als in den zwei ursprünglichen Projektionen. — Nun sind die gegnerischen Kernstrahlenbüschel zwischen Grundrifs und Aufrifs kongruent und befinden sich in der Zeichenebene in Deckung. Es liegt daher nahe, bei der Einführung einer dritten Projektion diese so zu wählen, dafs Grundrifs und Aufrifs mit ihr zusammen drei komplanare Systeme in komplanarer Orientierung bilden.

Das Verfahren mag an einem einfachen Beispiel veranschaulicht werden. Wir wählen ein solches, bei dem es ohnehin nahe liegt, sich der Methode der Transformation zu bedienen:

Es soll der Schnittpunkt der Ebene eines Dreiecks abc, $a'b'c'$ mit einer Geraden mn, $m'n'$, die in einer zur Projektionsachse senkrechten Ebene liegt, ermittelt werden. (Vgl. Fig. 1.)

Wir fügen zu den zwei gegebenen Projektionen S und S' eine dritte S'', die mit S und S' komplanar ist. Die Kernrichtungen zwischen S und S'' und zwischen S' und S'' können beliebig gewählt werden; wir werden aber zweckmäfsig die Wahl so treffen, dafs sich die Lösung der Aufgabe in der dritten Projektion möglichst direkt ergiebt. Dies ist der Fall, wenn sich das Dreieck in der dritten Projektion als gerade Linie darstellt, was dadurch erreicht werden kann, dafs die zwei Kernrichtungen parallel zu den Projektionen einer in der Dreiecksebene liegenden Geraden —, am

einfachsten parallel zu den Projektionen einer Seite des Dreiecks, z. B. parallel zu ac und $a'c'$ angenommen werden. — Thut man dies und konstruiert mittels der Kernstrahlen zu den Punkten von S und S' die dritten zugeordneten von S'', so fallen die Punkte a'' und c'' zusammen, und das Dreieck stellt sich als gerade Linie dar, welche von $m''n''$ in v'' geschnitten wird. Zieht man dann durch v'' die Kernstrahlen, welche mn und $m'n'$ in v und v' schneiden, so stellen v und v' Grundrifs und Aufrifs des gesuchten Schnittpunkts vor.

In gleich einfacher Weise erledigen sich nach dem angegebenen Verfahren alle Aufgaben situeller Natur, die sich überhaupt zur Lösung mittels Transformation eignen (Sehr elegant macht sich z. B. die konstruktive Ausführung der Steinerschen Lösung der Aufgabe: die zwei Geraden zu bestimmen, die vier gegebene windschiefe schneiden.) — Für Aufgaben metrischer Natur empfiehlt sich die Methode weniger, da für solche die schiefe Parallelprojektion weniger günstig ist als die orthogonale.

Fig. 1.

4. Das Verfahren bedarf indessen noch einer genaueren Prüfung seiner Zulässigkeit.

S und S' stellen zwei Orthogonalprojektionen eines bestimmten Raumobjektes O auf zwei zu einander senkrechte Projektionsebenen dar, von denen die eine in die andere umgelegt ist. Wenn wir sie nun zusammen mit S'' als komplanare Projektionen behandeln, so fassen wir sie (oder mindestens eine von ihnen) plötzlich als schiefe Parallelprojektionen auf. Durch diese zwei schiefen Projektionen wird aber ein ganz anderes Raumobjekt bestimmt als das thatsächlich vorliegende O.

Dieses Bedenken würde zerfallen, sobald sich nachweisen liefse, dafs S'' mit einer wirklichen Projektion des Objektes O gleichgestaltet ist. Denn dann würden die drei komplanaren Systeme nur eine andere Orientierung dreier wirklichen Projektionen von O vorstellen; wir haben aber gesehen, dafs deren gegenseitige Beziehungen ganz unabhängig sind von der durch die jeweilige Orientierungsart bedingten verschiedenen Gestaltung des Objektes.

Nun mufs die Frage, ob S'' mit einer wirklichen Projektion des Objektes O identifiziert werden kann, allerdings verneint werden. Wohl aber ist S'' mit einer solchen *ähnlich*.

Dies mag zunächst an einem speziellen Beispiele veranschaulicht werden: Wir wählen als Objekt O einen Würfel, von welchem zwei Seitenflächen zur Grundrifsebene und zur Aufrifsebene parallel sind. (Vgl. Fig. 2.)

Seine Projektionen S und S' seien $12\ldots8$ und $1'2'\ldots8'$. Die Richtungen der Kernstrahlen zwischen S und S'' und zwischen S' und S'' wählen wir so, daſs jede mit der Kernrichtung zwischen S und S' einen halben rechten Winkel bildet. Es ergiebt sich dann als dritte Komplanare S'' eine Figur, die zwei Quadrate mit gemeinsamer Ecke enthält.

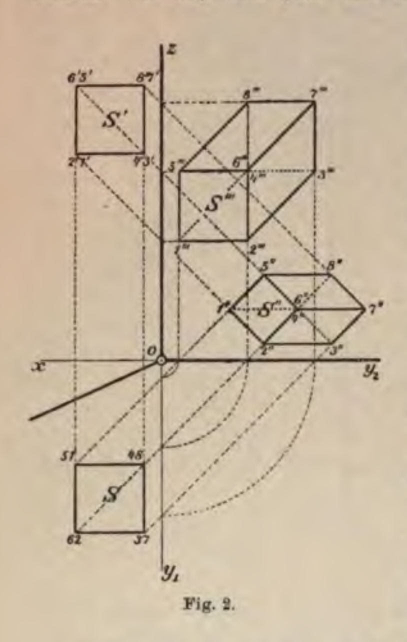


Fig. 2.

Daſs eine ähnlich gestaltete Figur als wirkliche Projektion des Würfels auftreten kann, und unter welchen Annahmen sie erhalten wird, ist leicht ersichtlich: Wählt man die Projektionsebene senkrecht zur Projektionsachse ox und die projizierende Richtung parallel zur Würfeldiagonale 64, $6'4'$, so projizieren sich die zwei zur Projektionsebene parallelen seitlichen Quadrate in wahrer Gestalt und die genannte Würfeldiagonale als Punkt. — In Figur 2 ist die resultierende Projektionsfigur S''' in einer Lage gezeichnet, in die sie gelangt, wenn man die Projektionsebene durch Drehung um ihre Schnittlinie oz mit der Aufriſsebene in diese umlegt, wodurch ihre Schnittlinie oy_1 mit der Grundriſsebene in die Lage oy_2, zusammenfallend mit ox, gelangt.

Während nun in der Projektion S''' die Quadratseite gleich der Würfelkante a ist, ist sie in der dritten Komplanaren $S'' = a\sqrt{\frac{1}{2}}$. S'' kann also nicht als eine wirkliche Projektion des Würfels angesprochen werden, sondern ist einer solchen nur ähnlich. Wir bezeichnen sie als eine *uneigentliche* Projektion.

Die drei wirklichen Projektionen S, S', S''' befinden sich in orientierter Lage in einer und derselben Ebene. Die (in Fig. 2 durch dickere Striche markierten) Grundschnitte zwischen S und S''' und zwischen S' und S''' sind oy_2 und oz; als Grundschnitt zwischen S und S' kann jede durch o gezogene Linie genommen werden. — Die gegnerischen Kernstrahlenbüschel zwischen S und S''' und zwischen S' und S''' sind in den Grundschnitten gebrochen. Dagegen ist die dritte Komplanare S'' mit S und S' durch nicht gebrochene Kernstrahlenbüschel verknüpft. Wir können demnach unser Verfahren kurz so kennzeichnen:

Die durch die zweimalige Brechung bedingten zwei Umwege werden abgekürzt dadurch, daſs man die nichtgebrochenen Wege einschlägt, indem man an Stelle der wirklichen Projektion S''' die mit ihr ähnliche uneigentliche Projektion S'' benützt.

5. So wie in dem vorgeführten speziellen Beispiel verhält es sich nun allgemein: Es läſst sich beweisen, daſs zu der dritten Komplanaren S'' stets eine wirkliche Projektion S''' existiert, die mit ihr ähnlich ist. In eine Grundebene umgelegt befindet sie sich mit S, S' und S'' in den näm-

lichen Lagebeziehungen, wie sie das obige Beispiel veranschaulicht. — Der allgemeine Beweis kann auf Grund von axonometrischen Anschauungen geführt werden:

Wir beziehen das räumliche System O auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, von welchem zwei Ebenen parallel zur Grundrifsebene und zur Aufrifsebene sind. Schneidet man auf den Achsen vom Ursprung aus drei gleiche Strecken ab, so erhält man ein *Dreibein*, dessen Grundrifs- und Aufrifsprojektionen Δ und Δ' seien. Konstruiert man dann zu Δ und Δ' für irgendwelche Kernrichtungen die dritte Komplanare Δ'', so bildet Δ'' die Figur eines Dreistrahls (mit begrenzten Strahlstrecken), und es folgt aus dem Pohlkeschen Satz, dafs immer eine wirkliche Projektion des Dreibeins existiert, welche mit dem Dreistrahl ähnlich ist. Wir konstruieren sie (nach dem von Herrn H. A. Schwarz in seinem Beweise des Pohlkeschen Satzes angegebenen Verfahren) und bezeichnen sie durch Δ'''. — Sind nun x und x' die Grundrifs- und Aufrifsprojektionen irgend eines Punktes X des räumlichen Systems O, so kann der zugeordnete Punkt x''' in der Projektion S''' axonometrisch in den Dreistrahl Δ''' eingezeichnet werden (durch Teilen der drei Strahlstrecken in entsprechenden Verhältnissen und Ziehen von Parallelen zu den Strahlen). Führt man dann ebendieselbe Konstruktion auch an dem ähnlichen Dreistrahl Δ'' aus, so erhält man einen Punkt x'', der in Beziehung zu Δ'' ähnlich liegt, wie x''' zu Δ''', und der sich vermöge der Konstruktion unmittelbar als identisch erweist mit demjenigen Punkt x'', der den Punkten x und x' als dritter komplanarer im System S'' zugeordnet ist. Da dies für jeden beliebigen Punkt X gilt, so ist damit die Ähnlichkeit der zwei ebenen Systeme S'' und S''' bewiesen.

Nachtrag. — Herr August Adler hat mich darauf aufmerksam gemacht, dafs das besprochene Konstruktionsverfahren auch auf Grund der elementaren darstellenden Geometrie gedeutet werden kann. Denkt man sich nämlich die Ebene, welche den von der oberen Vertikalebene und der hinteren Horizontalebene gebildeten Flächenwinkel halbiert („zweite Medianebene“), als dritte Projektionsebene und deutet die Kernstrahlen xx'' und $x'x''$ als Grundrifs und Aufrifs des zugehörigen projizierenden Strahls des Punktes x, x', so fallen Grundrifs und Aufrifs der dritten Projektion dieses Punktes in x'' zusammen. Die von mir als *dritte Komplanare* bezeichnete uneigentliche Projektion S'' kann demnach als vereinigte Grundrifs- und Aufrifsprojektion einer schiefen Projektion auf die „zweite Medianebene“ gedeutet werden. Durch diese Auffassung erfährt also das besprochene Verfahren eine Begründung mit den blofsen Mitteln der elementaren darstellenden Geometrie. — Zu der mit S'' ähnlichen Projektion S''' steht die Projektion auf die Medianebene in keiner näheren Beziehung.

Mechanische Analogie zur Elastizität.

Von H. Reifsner.

Die Molekulartheorie der Elastizitätslehre entsprach der Fernkraftauffassung der mathematischen Physik. Dieselbe ist nach der Ausarbeitung, die ihr W. Voigt hat zuteil werden lassen, geeignet, die Gesetze der vollkommenen Elastizität und die Symmetrieeigenschaften sowie das Entstehen der Kristalle darzustellen, scheint aber einer Erweiterung für die thermodynamischen Beziehungen und die Erscheinungen der inneren Reibung, der bleibenden Deformation und der elastischen Nachwirkung nicht fähig zu sein.

Es liegt nahe zu versuchen, die Elastizitätslehre auf dem Boden der von Lord Kelvin, Helmholtz, J. J. Thomson und Hertz vertretenen kinetischen Schule aufzubauen. Man kann diese Aufgabe auf zwei Arten aussprechen, indem man entweder verlangt, die potentielle Energie eines elastischen Volumenelements solle als kinetische Energie verborgener Bewegung, oder die elastischen Druckkräfte sollen als Verbindungskräfte beschleunigter, verborgener Massen gedeutet werden.

Offenbar hat man nur nötig, diese Aufgabe für ein einziges Volumenelement zu lösen, und erhält die Erweiterung auf einen Körper von gröfseren Dimensionen durch Aneinanderfügung der Elemente. Gerade wie in der klassischen Theorie sollen hier diskrete Massenpunkte und Einzelkräfte angesetzt werden, deren Mittelkräfte genommen über mefsbare Flächen als die elastischen Druckkomponenten erscheinen. Als Volumenelement kann am einfachsten ein System von vier Punkten, die nicht in einer Ebene liegen, genommen werden. An diese soll ein solcher dem Experiment verborgen bleibender Mechanismus angeschlossen werden, dafs die infolge der verborgenen Bewegung und der geometrischen Bedingungen entstehenden Kräfte die vorgeschriebenen Werte der elastischen Druckkräfte erhalten.

Bei Betrachtung von rein elastischen Ortsänderungen eines einzigen Volumenelements mufs natürlich dieses Elementartetraeder im Raum festgelegt werden, z. B. indem ein Eckpunkt festgehalten, ein anderer in einer Geraden und ein dritter in einer Ebene geführt wird. Dadurch bleiben von den zwölf cartesischen Koordinaten der Eckpunkte sechs zur Bestimmung der reinen Deformation übrig. Diese sechs Koordinaten kann man für unendlich kleine Deformationen linear, für endliche linear und quadratisch durch die sechs Deformationskomponenten $p_1 = \frac{\partial u}{\partial x}$, $p_2 = \frac{\partial v}{\partial y}$, $p_3 = \frac{\partial w}{\partial z}$, $p_4 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$, $p_5 = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$, $p_6 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$ ausdrücken.

Führt man nun diese Deformationskomponenten als allgemeine Lagrangesche Koordinaten ein, so erhält man als allgemeine Lagrangesche Kräfte die zugehörigen Druckkomponenten auf die Flächeneinheit multipliziert mit dem Elementarvolumen $d\tau$.

Erfahrungsmäfsig gelten nun für genügend kleine Deformation zwischen den Druckkräften P_ϱ und den Deformationskomponenten p_ϱ die folgenden

sechs Gleichungen, die die elastischen Eigenschaften des Körpers enthalten:

$$P_\varrho = -\sum_1^6 {}^\sigma c_{\varrho\sigma} p_\sigma d\tau \qquad (\varrho = 1, \ldots, 6), \tag{1}$$

wo $c_{\varrho\sigma}$ die Elastizitätskonstanten.

Damit nun bei konstanter oder, um einen thermodynamischen Ausdruck zu gebrauchen, unendlich langsamer Gestaltsänderung Verbindungskräfte auftreten können, mufs es noch mindestens eine verborgene, schnell veränderliche Koordinate $\mathfrak{p}$, die die Spannungsenergie als kinetische erzeugt, geben. Alsdann müssen die Parameterkräfte P_ϱ als Lagrangesche Kräfte aus Bewegungsgleichungen entstehen. Diese Bewegungsgleichungen haben aber noch gewisse Eigentümlichkeiten, die Helmholtz als Definitionseigenschaften des monocyklischen Systems aufgestellt hat. Die Kräfte müssen nämlich, da unendlich langsame Zustandsänderung vorausgesetzt ist, unabhängig von den Deformationsgeschwindigkeiten sein und dürfen, da sie bei konstanter Deformation konstant bleiben, sich mit der schnell und unaufhörlich verändernden cyklischen Koordinate $\mathfrak{p}$ nicht ändern. Daraus folgt die Energie des Systems:

$$\mathfrak{E} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{m}\mathfrak{a}\dot{\mathfrak{p}}^2,$$

wo $\mathfrak{a}$ eine erfahrungsmäfsig zu bestimmende Funktion der Parameter $p_1, \ldots, p_6$. Aus den Lagrangeschen Bewegungsgleichungen folgt unter Benutzung der Definitionseigenschaften des monocyklischen Systems ferner

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \dot{p}_\varrho} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \mathfrak{p}} = 0.$$

Die Parameterkräfte erhalten dadurch die Werte:

$$P_\varrho = -\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial p_\varrho} = -\tfrac{1}{2}\mathfrak{m}\dot{\mathfrak{p}}^2 \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial p_\varrho}, \tag{2}$$

während die Kraft nach der cyklischen Koordinate, deren Arbeit die Zuführung von Wärme bedeutet, die Form annimmt:

$$\mathfrak{P} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \dot{\mathfrak{p}}}\right) = \dot{\mathfrak{q}} = \frac{d}{dt}(\mathfrak{m}\mathfrak{a}\dot{\mathfrak{p}}). \tag{3}$$

Die Elastizitätskonstanten haben verschiedene Werte je nach der Art der Zustandsänderung. Entsprechend mufs man auch die Art der Zustandsänderung durch eine Aussage über die cyklische Kraft $\mathfrak{P}$ ausdrücken und in die Gleichungen für die Parameterkräfte P_ϱ einführen.

Bei adiabatischer Zustandsänderung z. B. darf zu keiner Zeit Wärme in das System eintreten. Es mufs dann die auf die cyklische Koordinate wirkende Kraft $\mathfrak{P}$ dauernd verschwinden. Aus (3) folgt dann $\mathfrak{m}\mathfrak{a}\dot{\mathfrak{p}} = \mathfrak{q}_0$.

Nach Einführung in (2) ergiebt sich

$$P_\varrho = \frac{\mathfrak{q}_0^2}{2\mathfrak{m}} \frac{\partial b}{\partial p_\varrho}, \quad \text{wo } b = \frac{1}{\mathfrak{a}}. \tag{4}$$

Nehmen wir nun an, daſs für genügend kleine $p_1, \ldots, p_6$ die Funktion b sich in die Form bringen läſst:

$$b = b_0 + \sum \left(\frac{\partial b}{\partial p_\varrho}\right)_{p=0} p_\varrho + \sum \sum \left(\frac{\partial^2 b}{\partial p_\varrho \partial p_\sigma}\right)_{p=0} p_\varrho p_\sigma,$$

so wird (4):

$$P_\varrho = \frac{\mathfrak{q}_0^2}{2m}\left[\left(\frac{\partial b}{\partial p_\varrho}\right)_{p=0} + \sum \left(\frac{\partial^2 b}{\partial p_\varrho \partial p_\sigma}\right)_{p=0} p_\sigma\right].$$

Durch Vergleichung mit der Erfahrungsgleichung (1) erhält man:

$$c'_{\varrho\sigma} d\tau = -\left(\frac{\partial^2 b}{\partial p_\varrho \partial p_\sigma}\right)_{p=0} \frac{\mathfrak{q}_0^2}{2\,\mathfrak{m}}. \tag{5}$$

Gleichzeitig folgt aus dieser Vergleichung, daſs auch Anfangsdrucke $\frac{\mathfrak{q}_0^2}{2\,\mathfrak{m}}\left(\frac{\partial b}{\partial p_\varrho}\right)_{p=0}$ vorhanden sein können und sogar müssen, wenn bei verhinderter Deformation thermische Drucke entstehen sollen.

Für andere als adiabatische Änderungen muſs man die Bedingung benutzen, daſs die Gröſse $\frac{\bar{d}Q}{\vartheta}$ ein vollständiges Differential sein muſs, wo $\bar{d}Q$ die zugeführte Wärme, ϑ die absolute Temperatur.

Es ist nun (Hertz, Princ., § 584)

$$\bar{d}Q = \mathfrak{P} d\mathfrak{p} = b\, d\frac{\mathfrak{q}^2}{2\,\mathfrak{m}},$$

und daraus

$$\vartheta = b f\left(\frac{\mathfrak{q}^2}{2\,\mathfrak{m}}\right).$$

Unter gewissen Vorbehalten kann man dann setzen:

$$\frac{\mathfrak{q}^2}{2\,\mathfrak{m}} = f\left(\frac{\vartheta}{b}\right)$$

und wegen (4)

$$P_\varrho = f\left(\frac{\vartheta}{b}\right)\frac{\partial b}{\partial p_\varrho}.$$

Für genügend kleine Temperaturänderungen $d\vartheta$ und Deformationen db möge wieder für $f\left(\frac{\vartheta}{b}\right)$ und $\frac{\partial b}{\partial p_\varrho}$ eine Reihenentwicklung mit linearen Gliedern abbrechend gesetzt werden, woraus sich ergiebt:

$$P_\varrho = P_{\varrho_{\mathrm{adiab}}} + \frac{c_v}{b_0}\left(\frac{\partial b}{\partial p_\varrho}\right)_{p=0} d\vartheta - \frac{c_v \vartheta}{b_0^2}\left(\frac{\partial b}{\partial p_\varrho}\right)_{p=0} \sum_1^6{}_\sigma \left(\frac{\partial b}{\partial p_\sigma}\right)_{p=0} p_\sigma,$$

wo $c_v = \left(\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \vartheta}\right)_{p=0} = \frac{\partial f\left(\frac{\vartheta}{b}\right)}{\partial \frac{\vartheta}{b}}$ die spez. Wärme bei verhinderter Deformation

Die thermischen Drucke entnimmt man daraus zu:

$$q_\varrho = \frac{c_v}{b_0}\left(\frac{\partial b}{\partial p_\varrho}\right)_{p=0},$$

die isothermen Elastizitätskonstanten zu:

$$c_{\varrho\sigma} = c'_{\varrho\sigma} - \frac{c_v \vartheta}{b_0^2} \left(\frac{\partial b}{\partial p_\varrho}\right)_{p=0} \left(\frac{\partial b}{\partial p_\sigma}\right)_{p=0}.$$

Diese Beziehungen sind identisch mit denjenigen, die W. Voigt[1]) aus den beiden Hauptsätzen der Wärmetheorie abgeleitet hat.

Überhaupt ist diese kinetische Methode für Gleichgewichtszustände gleichwertig mit den Hauptsätzen der Wärmetheorie. Sie verlangt die Kenntnis derselben Anzahl einzuführender Erfahrungskonstanten und liefert dieselben Resultate. Man könnte ohne Schwierigkeit aus ihr auch noch die Abhängigkeit der Elastizitätskonstanten von der Temperatur, die thermischen Ausdehnungskoeffizienten, die Entropie u. s. w. bestimmen.

Während jedoch die mechanische Wärmetheorie keine Erweiterung für schnelle Zustandsänderungen und unvollkommene Elastizität zuläfst, kann die kinetische Methode durch Aufgeben der beschränkenden Voraussetzungen des monocyklischen Systems Gleichungen zur Beschreibung der Erscheinungen der inneren Reibung, der elastischen Nachwirkung, der Wärmeleitung, der bleibenden Deformation und überhaupt der nicht umkehrbaren Zustandsänderungen aufstellen.

Man möge sich den den obigen Formeln entsprechenden Mechanismus folgendermafsen konstruktiv vorstellen: Ein Centrifugalregulator von der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\mathfrak{p}}$ und dem Bahnradius der rotierenden Massen $\mathfrak{m}$ von der Gröfse $\sqrt{\mathfrak{a}}$ soll durch starre Glieder so an die vier Eckpunkte des Elementartetraeders, die sonst mit einander nicht verbunden sind, angeschlossen werden, dafs nach Gleichung (5)

$$\frac{\mathfrak{m}}{2} \dot{\mathfrak{p}}^2 \mathfrak{a}^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{\mathfrak{a}}}{\partial p_\varrho \partial p_\sigma} = - c'_{\varrho\sigma} d\tau,$$

dafs also der Bahnradius $\sqrt{\mathfrak{a}}$ der rotierenden Massen in eine gewisse, durch obige Gleichung ausgedrückte kinematische Abhängigkeit von den Deformationskomponenten, d. h. auch den gegenseitigen Eckpunktverschiebungen, gebracht wird.

Eine ausführlichere Darstellung, sowie die besprochenen Erweiterungen und die Besonderheiten für Gase und Flüssigkeiten wird man in einem demnächst in den Annalen der Physik erscheinenden Aufsatze finden.

---

1) W. Voigt, Referat über Kristallelastizität, Gött. Nachr. 1900, H. 2.

Über eine Gruppe von gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zwischen zwei Veränderlichen.

Von E. Budde.

Vorgelegt sei eine Differentialgleichung von der Gestalt

$$\frac{d^2y}{dx^2} + L\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + M\frac{dy}{dx} + N = 0. \tag{1}$$

Der Verfasser untersucht diejenigen Gleichungen dieser Art, welche hervorgehen können aus der Differentiation einer Differentialgleichung erster Ordnung von der Form

$$\chi\left(\frac{dy}{dx} + p\right) = c, \tag{2}$$

wo χ und p irgend welche Funktionen von x und y sind, c eine Konstante ist. Er stellt sich die Aufgabe, Fälle anzugeben, in denen man die Gleichung (1) unter dieser Voraussetzung einmal integrieren kann, und das Kriterium zu bezeichnen, aus welchem man ersehen kann, ob eine gegebene Differentialgleichung (1) die Bedingung erfüllt, dafs sie durch Differentiation aus einer Gleichung der Form (2) hervorgegangen sei.

Differentiiert man Gleichung (2), dividiert durch χ und setzt zur Abkürzung u für $\frac{1}{\chi}\frac{\partial \chi}{\partial x}$ und v für $\frac{1}{\chi}\frac{\partial \chi}{\partial y}$, so findet sich

$$\frac{d^2y}{dx^2} + v\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} + pv + u\right)\frac{dy}{dx} + \frac{\partial p}{\partial x} + pu = 0. \tag{3}$$

Also ist Gleichung (1) mit (3) identisch, wenn

$$L = v, \tag{4}$$

$$M = \frac{\partial p}{\partial y} + pv + u, \tag{5}$$

$$N = \frac{\partial p}{\partial x} + pu. \tag{6}$$

Aus Gleichung (5) und (6) folgt leicht

$$\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} = p\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial p}{\partial y} - p\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{7}$$

Nun sind u und v die beiden partiellen Differentialquotienten von $\log \chi$, also ist $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$, folglich hebt sich das letzte Glied auf der rechten Seite von (7) gegen das erste. Setzt man ferner für $\frac{\partial p}{\partial y}$ und $\frac{\partial p}{\partial x}$ ihre Werte aus (5) und (6), so ergiebt sich

$$\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + v(N - pu) - u(M - pv - u),$$

und hieraus, wenn man noch L für v setzt,

$$\frac{\partial u}{\partial x} - Mu + u^2 = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} - NL$$

oder, wenn man abkürzend Q für $\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} - NL$ setzt,

$$\frac{\partial u}{\partial x} - Q - Mu + u^2 = 0. \tag{8}$$

Damit ist für unseren Fall die erste Integration der Gleichung (1) auf eine Differentialgleichung erster Ordnung zurückgeführt. Gleichung (8) ist rein durch partielle Differentiationen entstanden, also wesentlich partiell, d. h. bei ihrer Integration sind die etwa in ihr aufretenden y wie konstante Parameter zu behandeln. An die Stelle der Integrationskonstante tritt eine willkürliche Funktion von y, die ev. benutzt werden kann, um das Kriterium des Falles zu erfüllen.

Dies Kriterium, also die Eigenschaft der Gleichung (1), an welcher man erkennt, dafs sie sich dem hier behandelten Fall subsumiert, liegt in der Gleichung $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$, aus welcher folgt $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial L}{\partial x}$. Trifft diese Bedingung zu, so ist Gleichung (8) auf (1) anwendbar. Dabei genügen auch partikuläre Lösungen von (8), wenn sie das Kriterium erfüllen.

Es mögen zunächst einige der umfassenderen Spezialfälle hervorgehoben werden, in denen Gleichung (8) bequem lösbar ist. Man bemerke, dafs, wenn L eine reine Funktion von y ist, u vermöge der Gleichung $\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$ eine reine Funktion von x sein mufs.

a) Ist M nicht frei von y und u eine reine Funktion von x, so kann man durch partielle Differentiation von (8) nach y leicht die Gleichung bilden:

$$u = -\frac{\frac{\partial Q}{\partial y}}{\frac{\partial M}{\partial y}}.$$

Dieselbe ist brauchbar, wenn sich aus ihr eine reine Funktion von x für u ergiebt.

b) Ist $Q = 0$, so ist (8) in bekannter Weise direkt lösbar.

c) Ist $Q = 0$ und gleichzeitig $L = 0$, so ist (1) direkt integrabel.

d) Ist $Q = 0$ und L eine reine Funktion von y, so genügt die Lösung $u = 0$; dann ist $e^{\int L\,dy}$ ein integrierender Faktor von (1).

e) Hat die Gleichung $u^2 - Mu = Q$ eine Wurzel r_1, die eine reine Funktion von y (Konstante und Null eingeschlossen) ist, so reduziert sich (8) durch die Substitution $u - r_1 = z$ auf integrable Gestalt.

f) Ist $Q = -\frac{M}{x}$, so wird aus (8)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{M}{x} - Mu + u^2 = 0,$$

und dieser Gleichung genügt die Lösung $u = \frac{1}{x}$, verwendbar, wenn L eine reine Funktion von y ist.

Ist zugleich $L = 0$, so tritt der Fall ein, dafs in der Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} + M\frac{dy}{dx} + N = 0$ der Anteil $M\frac{dy}{dx} + N$ für sich den integrierenden

Faktor x hat. Man kann also (1) dann schreiben $x\frac{d^2y}{dx} = \frac{dP}{dx}$, wo P irgend eine Funktion von x und y; der Posten $x\frac{d^2y}{dx^2}$ läfst sich durch Teile integrieren und giebt $x\frac{dy}{dx} - y$, womit die erste Integration vollzogen ist.

g) Ist $\frac{\partial N}{\partial y} + LN = 0$, so ist $Q = \frac{\partial M}{\partial x}$, und Gleichung (8) nimmt die Gestalt an

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial x} - Mu + u^2 = 0.$$

Verwandelt man diese in bekannter Weise in eine homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung durch die Substitution $u = \frac{\partial}{\partial x}(\log t)$, so erhält man

$$-\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + M\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial x}t = 0.$$

Dies ist direkt integrabel und giebt aufser der von vornherein ersichtlichen Lösung $u = M$ eine leicht zu ermittelnde allgemeine Lösung.

Weitere Mittel zur Herstellung von u ergiebt unter Umständen folgende Betrachtung. Aus den beiden Gleichungen

$$u = \frac{1}{\chi}\frac{\partial \chi}{\partial x} \text{ und } v = \frac{1}{\chi}\frac{\partial \chi}{\partial y} = L$$

leitet man leicht ab

$$u = \frac{\varphi'}{\varphi} + \int \frac{\partial L}{\partial x}\partial y, \tag{9}$$

wo φ eine reine Funktion von x ist. Setzt man hierin $\frac{\varphi'}{\varphi} = u_1$, so ergiebt sich durch Substitution in (8) eine neue Differentialgleichung der gleichen Art für u_1. u_1 ist von u nicht verschieden, wenn L eine reine Funktion von y ist. Ist dies aber nicht der Fall, so hat man für u_1 eine besondere Gleichung, auf welche die vorstehenden Erwägungen wieder Anwendung finden können. Man bemerke noch, dafs die in der Gleichung (8) nach Einführung von (9) auftretenden Integrale die additive Integrationskonstante Null erhalten, weil das Integral $\int \frac{\partial L}{\partial x}\partial y$ aus Gleichung (9) schon von seiner Integrationskonstante abgetrennt war.

Hat man nun u gefunden, so hat man zwei Wege vor sich.

Entweder man leitet aus den beiden Gleichungen

$$\frac{1}{\chi}\frac{\partial \chi}{\partial x} = u \quad\text{und}\quad \frac{1}{\chi}\frac{\partial \chi}{\partial y} = L$$

die Doppelgleichung

$$\chi = \psi e^{\int u \partial x} = \varphi e^{\int L \partial y}$$

ab, in welcher ψ eine reine Funktion von y, φ eine solche von x ist, und benutzt χ als integrierenden Faktor der Gleichung (1).

Oder man setzt u in Gleichung (6) ein, die dann direkt integrabel ist, integriert partiell nach x und fügt statt der Integrationskonstante eine unbestimmte Funktion von y zu. Diese Funktion wird dann durch Einsetzen in Gleichung (5) bestimmt; sie enthält die Integrationskonstante. Dieser Weg läfst sich natürlich auch umkehren. Man integriert Gleichung (5) und bestimmt die zusätzliche reine Funktion von x durch Einsetzen in (6).

Bemerkungen über ein spezielles krummliniges Koordinatensystem.

Von Rudolf Rothe.

Nach einem bekannten von Liouville herrührenden Satze der Differentialgeometrie[1]) sind die Ebene und ihre Biegungsflächen die einzigen, auf denen zwei einfach unendliche, unter rechtem Winkel sich schneidende Systeme von geodätischen Linien existieren. Will man daher das gewöhnliche ebene cartesische Koordinatensystem für eine Fläche mit nicht verschwindender Krümmung verallgemeinern, so ist entweder die Bedingung der Orthogonalität oder die andere von vornherein fallen zu lassen, dafs beide Scharen der Koordinatenlinien geodätische Linien der Fläche sind. In die letzte Klasse von Koordinatensystemen gehört bekanntlich das Gaufssche orthogonal-geodätische, bei welchem nur die *eine* Schar von Kurven geodätische Linien auf der Fläche sind; diese sind also in gewisser Hinsicht einseitig vor der anderen Schar bevorzugt.

Bei der Untersuchung der Voraussetzungen, welche zum Beweise des angeführten Liouvilleschen Satzes notwendig ist, gelangt man nun zu einem Koordinatensystem, welches, ohne dafs die erwähnte Bevorzugung der einen Schar der Koordinatenlinien eintritt, als eine wesentliche Verallgemeinerung des cartesischen Systems betrachtet werden kann und, wie das Gaufssche, bei der Biegung der Fläche invariant bleibt.

1. Ein derartiges System ergiebt sich, wenn man die Koordinatenlinien den Bedingungen unterwirft, erstens auf einander senkrecht zu stehen und zweitens die Eigenschaft zu besitzen, dafs in jedem Punkte der Fläche ihre geodätischen Krümmungen einen und denselben, im allgemeinen vom Ort auf der Fläche abhängigen Wert besitzen.

Ist dieser Wert beständig gleich Null, so sind die Koordinatenlinien geodätisch und die Fläche nach dem Liouvilleschen Satze zu den auf die Ebene abwickelbaren gehörig, auf welchen stets Koordinatensysteme der verlangten Eigenschaft existieren. Ist aber der gemeinsame Wert der geodätischen Krümmungen nicht beständig Null, so soll die Existenz solcher Coordinatensysteme zunächst vorausgesetzt werden.

Nun sei (x, y) ein den genannten Bedingungen entsprechendes Koordinatensystem auf einer Fläche; da es orthogonal ist, so nimmt das Linienelement ds auf der Fläche die durch die Gleichung

$$ds^2 = E dx^2 + G dy^2$$

1) Man sehe z. B. G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, Bd. II. S. 422, Nr. 530.

gegebene Form an, unter E und G die Gaufsschen Fundamentalgröfsen erster Ordnung verstanden. Es soll nun zunächst die Frage beantwortet werden, welchen Bedingungen die Koeffizienten E und G zu unterwerfen sind, damit die geodätischen Krümmungen der beiden Koordinatenlinien in jedem Punkte (x, y) einen und denselben Wert $g(x, y)$ besitzen.

Die geodätischen Krümmungen g_x und g_y der Koordinatenlinien sind allgemein gegeben durch die Gleichungen

$$-\sqrt{EG}\cdot g_x = \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial x}, \quad -\sqrt{EG}\cdot g_y = \frac{\partial\sqrt{E}}{\partial y},$$

deren rechte Seiten, falls $g_x = g_y = g(x, y)$ sein soll, übereinstimmen müssen; daraus folgt aber die Existenz einer Funktion $\varphi(x, y)$ von der Art, dafs

$$2\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \sqrt{E}, \quad 2\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \sqrt{G}$$

ist. Das Quadrat des Linienelements nimmt daher die Form an

$$(1) \qquad \tfrac{1}{4}\,ds^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 dx^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 dy^2.$$

Diese Form ist für das in Rede stehende Koordinatensystem, im folgenden schlechthin als (xy)-System bezeichnet, auch hinreichend; denn die geodätischen Krümmungen der beiden Koordinatenlinien haben einen und denselben Wert $g(x, y)$, welcher durch die Gleichung

$$(2) \qquad 0 = 2g(x, y)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}$$

gegeben ist.

2. Um den Beweis der Existenz von (xy)-Systemen auf einer beliebigen Fläche zu erbringen, ist es nun zunächst nötig, die geometrische Bedeutung der Funktion $\varphi(x, y)$ kennen zu lernen. Weil der Winkel β, den die positive Richtung der Linie $\varphi(x, y) = \text{const}$ mit der positiven x-Linie einschliefst, durch die Gleichung

$$\cos\beta = -\frac{\sqrt{E}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\sqrt{E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2}} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

gegeben ist, so zeigt sich die Kurve $\varphi = \text{const}$ als Winkelhalbierende des äufseren Koordinatenwinkels $(\widehat{-x, +y})$. Ihre Orthogonale $\psi(x, y) = \text{const}$ genügt der Gleichung

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0,$$

welche ausdrückt, dafs eine Funktion $r(x, y)$ von der Art existiert, dafs

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx - \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy = r\,d\psi$$

wird. Addiert man nun zum Quadrat der rechten Seite das Quadrat des vollständigen Differentials $d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy$, so ergiebt sich die Gleichung

$$(3) \qquad \tfrac{1}{2}\,ds^2 = d\varphi^2 + r^2 d\psi^2;$$

sie läfst erkennen, dafs das System (φ, ψ) ein orthogonal-geodätisches System auf der Fläche ist; die Kurven $\psi = \text{const}$ sind seine geodätischen Linien. Es besteht daher der Satz:

Existiert auf einer Fläche ein (xy)-System, so bilden seine Winkelhalbierenden ein System orthogonal-geodätischer Koordinaten.

Die Umkehrung dieses Satzes liefert nun den Existenzbeweis der orthogonalen Kurvenscharen gleicher geodätischer Krümmung auf einer beliebigen Fläche. Man beziehe nämlich die Fläche auf ein orthogonal-geodätisches Koordinatensystem $\varphi = \text{const}$, $\psi = \text{const}$, durch welches das Linienelement in die durch die Gleichung (3) gegebene Form übergeführt wird, unter ν eine Funktion der Variablen φ, ψ verstanden. Man bestimme sodann zwei Funktionen $x(\varphi, \psi)$, $y(\varphi, \psi)$ gemäfs den Gleichungen

$$\frac{\partial x}{\partial \psi} = \nu \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \psi} = -\nu \frac{\partial y}{\partial \varphi}$$

oder den damit identischen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \nu \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\nu \frac{\partial \psi}{\partial y};$$

in die Form des Linienelements eingeführt erteilen sie dieser die Gestalt (1), aus der ersichtlich ist, dafs die eben definierten Kurven ein (xy)-System bilden. Solche Systeme lassen sich daher auf jeder Fläche konstruieren zufolge des Satzes:

Die Winkelhalbierenden eines orthogonal-geodätischen Koordinatensystems haben dieselbe geodätische Krümmung.

3. Nun sei die Funktion $g(x, y)$ eine *gegebene* Funktion der Variablen x, y; durch Integration der partiellen Differentialgleichung (2) ist dann die Funktion $\varphi(x, y)$ und damit das Linienelement der Fläche selber bestimmt. Die (xy)-Systeme vorgeschriebener geodätischer Krümmung sind daher im allgemeinen nur auf einer speziellen Klasse auf einander abwickelbarer Flächen vorhanden.

Ist z. B. $g(x, y) = 0$, so wird $\varphi = X + Y$, wo X, Y Funktionen bedeuten, welche wesentlich von x bezw. y abhängen; daher wird

$$\tfrac{1}{4} ds^2 = dX^2 + dY^2$$

das Quadrat des Linienelements einer Developpablen in Übereinstimmung mit dem eingangs zitierten Liouvilleschen Satz.

Ist zweitens $g(x, y) = a$ konstant, so wird $\varphi = \frac{1}{2a} \log (X + Y)$, also

$$ds^2 = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{dX^2 + dY^2}{(X + Y)^2};$$

das Linienelement gehört dann also den Flächen konstanten negativen Krümmungsmafses $-2a^2$ an, wenn a reell ist, in Übereinstimmung mit einem bekannten Satz von Bonnet.[1])

Da jedes beliebige System von Winkelhalbierenden eines orthogonalgeodätischen Systems ein (xy)-System ist, so existieren aufser denen, für

1) L. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie, Deutsche Ausg. von M. Lukat, S. 151 u. 177, Anmerkungen.

welche $g(x, y) = 0$ ist, auf den Developpablen noch unendlich viele andere. Wählt man in der Ebene z. B. als (xy)-Kurven die Winkelhalbierenden des gewöhnlichen Polarkoordinatensystems, so ergiebt sich ein zweifach unendliches System von logarithmischen Spiralen, deren Krümmung von Null verschieden ist. Auf der Kugel bildet z. B. das System der die Meridiane unter 45^0 schneidenden Loxodromen ein (xy)-System nicht konstanter geodätischer Krümmung.

4. Die (xy)-Systeme besitzen eine bemerkenswerte, dem ebenen cartesischen Koordinatensystem zukommende Eigenschaft. Bezeichnet man mit s_x und s_y die von einem passenden Nullpunkt zu messenden Bogenlängen der Koordinatenlinien, so bestehen die Gleichungen

$$\frac{\partial s_y}{\partial x} = 2\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial s_x}{\partial y} = 2\frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

so dafs $s_x = 2\varphi + (x)$, $s_y = 2\varphi + (y)$ wird, wo (x), (y) zwei wesentlich von x bez. y abhängende Funktionen bedeuten; diese können unbeschadet der Allgemeinheit gleich Null genommen werden, in welchem Falle man die Bogenlängen von der Linie $\varphi(x, y) = 0$ aus wählt. Dann ergiebt sich

$$s_x = s_y = 2\varphi;$$

die orthogonalen Kurven gleicher geodätischer Krümmung sind Kurven gleicher Bogenlänge.

Dieser Satz läfst sich umkehren: *Besitzen die Kurven eines Orthogonalsystems gleiche Bogenlänge, so besitzen sie auch gleiche geodätische Krümmung.* Denn wenn

$$ds^2 = E dx^2 + G dy^2$$

ist, und

$$s_y = \int \sqrt{E} dx, \quad s_x = \int \sqrt{G} dy$$

denselben Wert haben sollen, so folgt hieraus

$$\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial y} = \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial x}$$

und also wie oben die Existenz einer Funktion $\varphi(x, y)$, durch welche das Linienelement in die Form (1) gebracht wird.

Man betrachte nun ein aus je zwei der Linien $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ gebildetes Viereck auf der Fläche; seine Ecken seien $O = (x_0, y_0)$, $A = (x, y_0)$, $B = (x_0, y)$, $C = (x, y)$. Nach dem Vorstehenden ist dann z. B.

$$OA = 2\int_{x_0, y_0}^{x, y_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = 2(\varphi(x, y_0) - \varphi(x_0, y_0))$$

und entsprechend für die anderen Seiten. Weil nun das über die geschlossene Kurve $OACBO$ erstreckte

$$\int_{(OACBO)} d\varphi = 0$$

ist, so folgt

$$OA + AC + CB + BO = 0,$$

d. h. das betrachtete Viereck besitzt die bekannte, dem ebenen, aus vier Kreistangenten gebildeten Viereck zukommende Eigenschaft.

Wenn ferner der Punkt C so beschaffen ist, daſs er auf der durch O gehenden φ-Linie liegt, d. h. wenn $\psi(x, y) = \psi(x_0, y_0)$, so ist gemäſs der Gleichung (3) die Länge der geodätischen Linie

$$OC = \sqrt{2}\int_{x_0, y_0}^{x, y} d\varphi = \sqrt{2}(\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0)),$$

und es besteht die Relation

$$\sqrt{2} \cdot OC = OA + AC = OB + BC,$$

oder wenn mit s_φ die von der Kurve $\varphi(x, y) = 0$ aus gerechnete Bogenlänge der geodätischen Linie $\psi = \text{const}$ bezeichnet wird,

$$s_x = s_y = \sqrt{2} \cdot s_\varphi.$$

5. Durch Einführung des orthogonal-geodätischen Koordinatensystems (φ, ψ) an Stelle des (xy)-Systems geht die Gleichung (2) über in

$$\frac{\partial \nu}{\partial \varphi} + 2g\nu = 0. \tag{4}$$

Berechnet man nun aus der Formel (3) des Linienelements die geodätische Krümmung g_ψ der Linie $\varphi = \text{const}$, so wird

$$\frac{\partial \nu}{\partial \varphi} + \sqrt{2}\, g_\psi \nu = 0,$$

daher

$$g(x, y) = g_x = g_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot g_\psi.$$

Längs einer geodätischen Linie $\varphi = \text{const}$ verschwindet daher $g(x, y)$, und man hat

$$g_x = g_y = g_\varphi = g_\psi = 0.$$

Die vorstehenden Formeln gestatten im Verein mit der bekannten Gauſsschen Formel für das Krümmungsmaſs K

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial \varphi^2} + 2K\nu = 0,$$

die Koeffizienten einer Entwickelung der Funktion ν, wenn eine solche möglich ist, in der Umgebung einer Kurve $\varphi = \varphi_0$ nach Potenzen von $\varphi - \varphi_0$ zu berechnen. Bezeichnet man durch den Index 0 die längs dieser Kurve genommenen Werte, so ist

$$\frac{\nu}{\nu_0} = 1 - 2g_0(\varphi - \varphi_0) - K_0(\varphi - \varphi_0)^2 + \tfrac{1}{3}\left(2g_0K_0 - \left(\frac{\partial K}{\partial \varphi}\right)_0\right)(\varphi - \varphi_0)^3 + \cdots,$$

eine Entwickelung, welche für den Fall, wo $\varphi = \varphi_0$ eine geodätische Linie ist, also g_0 verschwindet, in die bekannte[1]), von Bonnet angegebene übergeht.

1) G. Darboux, l. c. Bd. III., S. 93, Nr. 624.

6. Aus den Gleichungen (4) und (5) ergiebt sich

$$\frac{\partial g}{\partial \varphi} = 2g^2 + K,$$

eine Formel, welche dazu dienen kann, bei gegebenem Wert von $K(\varphi, \psi)$ die Funktion g zu berechnen. Denn ist g' eine Partikularlösung, so findet man in bekannter Weise die allgemeine in der Form

$$g = g' + \frac{1}{2} \frac{e^{4\int g' d\varphi}}{\Psi - \int e^{4\int g' d\varphi} . d\varphi},$$

unter Ψ eine von φ nicht abhängende Gröfse verstanden. Ist z. B. $K = 0$, so ist $g' = 0$ eine Partikularlösung, also

$$g = \frac{1}{2} \frac{1}{\Psi - \varphi}$$

die allgemeine Lösung; wenn $K = -2a^2$ konstant ist, so ist $g' = a$ eine Partikularlösung, und

$$g = a + \frac{2ae^{4a\varphi}}{4a\Psi - e^{4a\varphi}}$$

die allgemeine Lösung.

7. Auf den developpablen Flächen und denen von konstantem Krümmungsmafs sind die (xy)-Systeme verschwindender bezw. konstanter geodätischer Krümmung isometrisch, wie aus den oben (No. 3) angegebenen Formen des Linienelements ersichtlich ist. Fragt man nach allen Flächen, welche die Bedingung erfüllen, isometrische (xy)-Systeme zu enthalten, so erhält man aus der bekannten Bedingung der Isometrie

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log \frac{E}{G} = 0$$

die Funktion φ in der Form $\varphi(X + Y)$ und demnach das Linienelement

$$\tfrac{1}{2} ds = \varphi'(X + Y)\sqrt{dX^2 + dY^2},$$

welches den auf Rotationsflächen abwickelbaren Flächen zukommt. Weil dann ferner

$$g(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\varphi''}{\varphi'}$$

eine Funktion von φ allein ist, so folgt nach dem Vorhergehenden, dafs die Kurven $\varphi = \text{const}$ konstante geodätische Krümmung besitzen und längs jeder derselben $g(x, y)$ einen konstanten Wert hat. Diese Eigenschaften sind, wie leicht nachweisbar, für die Rotationsflächen und ihre Biegungen charakteristisch.

8. Zu den Rotationsflächen gelangt man auch durch folgende Betrachtungen. Man denke sich aufser der Fläche (S) deren Linienelement der Gleichung (1) genügt, eine zweite (T) vom Linienelement dt, für welches die Gleichung

$$\tfrac{1}{4} dt^2 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 dx^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 dy^2$$

besteht. Aus dem Zusammenhang zwischen den Funktionen φ und ψ ergiebt sich aber $ds = \nu \cdot dt$. *Eine jede Fläche läſst sich also stets auf eine andere in der Weise konform abbilden, daſs einem (xy)-System der einen ein (xy)-System der anderen entspricht.* Bei dieser Abbildung entspricht, wie leicht nachzuweisen, einem orthogonal-geodätischen System (φ, ψ) ein anderes (ψ, φ) in der Weise, daſs der Schar der geodätischen Linien die Schar der orthogonalen Trajektorien und umgekehrt zugeordnet ist. Das durch die Abbildung erhaltene (xy)-System der Fläche (T) hat im allgemeinen eine von $g(x, y)$ verschiedene geodätische Krümmung $h(x, y)$, welche durch die Gleichung

$$0 = 2h(x, y) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}$$

gegeben ist; mit der Funktion ν steht sie durch die Formel

$$\frac{\partial \nu}{\partial \psi} - 2h\nu = 0$$

in Zusammenhang, welche der Gleichung (4) entspricht. Daraus folgt

$$\nu = e^{-2\int(g\,d\varphi - h\,d\psi)}$$

mit der Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial h}{\partial \varphi} + \frac{\partial g}{\partial \psi} = 0.$$

Stellt man nun die spezielle Forderung, daſs das (xy)-System bei der konformen Abbildung der Fläche seine geodätische Krümmung nicht ändert, so würde diese nach der vorhergehenden Gleichung eine Funktion des Arguments $\varphi - \psi$ werden, ebenso wie die Funktion ν, so daſs sich

$$\tfrac{1}{4} ds^2 = d\varphi^2 + F(\varphi - \psi)\, d\psi^2$$

ergiebt. Dieses Linienelement kommt aber bekanntlich ebenfalls den Rotationsflächen und ihren Biegungen zu.

Über die Frage nach den Brennlinien eines sehr dünnen astigmatischen Strahlenbündels und ihre Bedeutung für das Bildpunktproblem der geometrischen Optik.

Von H. Opitz.

Ch. Sturm (Journal de Liouville **3**, 1838; Comptes rendus XX. 1845, übersetzt in Poggendorffs Annalen **65**) und E. E. Kummer (Monatsberichte der Berliner Akademie d. Wiss., 30. Juli 1860) haben sehr dünne optische Normalenbündel dahin charakterisiert, daſs dieselben von geradlinigen Flächen umhüllt sind, deren erzeugende Gerade stets durch zwei auf der Achse des Bündels senkrecht stehende und um 90° gedrehte Linien (Brennlinien) und zugleich durch eine die Achse konzentrisch umgebende, sehr kleine geschlossene Kurve hindurchgeht. Die Existenz von Strahlenbündeln, bei denen Brennlinien vorkommen, welche die Achse des Bündels

in schiefer Richtung durchschneiden, hat Herrn L. Matthiessen (Sitzungsber. der math. phys. Klasse der Kgl. Bayr. Akad. d. W., 1883; Acta mathematica **4**, 177—192, 1884) Veranlassung zu einem Einwurf gegen die genannten Theorien gegeben.

Dieser Matthiessensche Einwurf ist nicht nur vom rein mathematischen, sondern auch vom geometrisch optischen Standpunkte aus einer näheren Prüfung unterzogen worden. (J. Weingarten, Journal f. Math. **98**, 1885; S. Czapski, Wiedemanns Annalen **42**, 1891).

Definiert man die Brennlinien als Elemente der Brennflächen eines geradlinigen Strahlensystems, — was nicht im Sinne der Kummerschen Theorie liegt (vgl. den Irrtum Meibauers in seiner Theorie der geradlinigen Strahlensysteme des Lichts, Berlin 1864, S. 7) — so ist der Einwurf unbedingt berechtigt. Handelt es sich um die Untersuchung der Dichtigkeitsverhältnisse bei der räumlichen Verteilung der Strahlen, so ist es nicht gleichgültig, ob — wie es bei optischen Bündeln in der Regel der Fall ist — eine Gerade existiert, welche von jedem Strahle des Bündels in geometrischem Sinne geschnitten wird, und welche selbst die Achse des Bündels in einem Brennpunkt schief durchschneidet. Dann ist nämlich das Dichtigkeitsmafs und damit die Dichtigkeit an dieser Stelle unendlich grofs gegen diejenige in dem anderen Brennpunkt (Beweis mit Hilfe eines Satzes von K. Hensel, Journal f. Math. **102**, S. 301).

Für das Bildpunktproblem der geometrischen Optik ergiebt sich hieraus die Konsequenz, dafs bei *reellen* Bildern in dem erstgenannten Brennpunkt die gröfseste Lichtintensität zu erwarten sei. Es dürfte jedoch schwer sein, die beiden Bilder, welche Herr Czapski auf einer diffus reflektierenden Tafel erzeugt, die man in den Weg des dünnen Büschels stellt, inbezug auf ihre Intensität zu unterscheiden. Anders liegen die Verhältnisse bei *virtuellen* Bildern, wo das Auge diese Unterscheidung herbeizuführen imstande ist.

Diese Bemerkungen lassen sich an dem ersten Problem der Dioptrik erläutern.

Ein z. B. unter Wasser befindliches Objekt liefert auch bei schiefer Inzidenz nur *ein* Bild. Dasselbe liegt scheinbar da, wo die Dichtigkeit der Strahlen am gröfsesten ist. Das Objekt erfährt also eine *nur vertikale* Hebung. Kummers Methode (Journal f. Math. **57**) läfst sich auf dieses Problem gut anwenden, und man gelangt auf diesem Wege auch leicht zu der analytischen Darstellung des Bildes z. B. des horizontalen ebenen Bodens eines Wasserbeckens (vgl. Bermann, Zeitschrift f. Math. u. Phys. **8**, 1863; Nipher, Transactions of the Acad. of St. Louis IV 2. 1881 und Science XIV. 1901; Matthiessen, Annalen der Physik 1901).

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

9. Sitzung am 25. Juni 1902.

Vorsitz: Herr Kneser.

Anwesend: 29 Herren.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Steinitz: Über die Theorie der Polyeder.

Das Referat beschränkte sich darauf, Eberhards Morphologie in ihren Grundzügen darzustellen. Nach Auseinandersetzung der wesentlichsten Grundbegriffe, der Herstellung der $(n+1)$-Flache aus den n-Flachen, sowie der Einschaltungssysteme, welche man durch Abschneiden sämtlicher Kanten eines Polyeders erhält, wurde auf den Beweis des Fundamentalsatzes eingegangen, daſs jedes Lösungssystem der Gleichung $\sum x_i(i-6)=12$ einen Polyederstamm definiert. Den Schluſs bildete die Angabe der wichtigsten Ergebnisse der Morphologie, welche nicht in unmittelbarem Zusammenhange mit dem Hauptproblem stehen.

Herr Skutsch: Graphische Zerlegung einer Kraft in sechs Komponenten mit vorgeschriebenen Wirkungslinien (s. u.).

Herr Knoblauch macht im Anschluſs an den in der vorigen Sitzung von Herrn Hessenberg gehaltenen Vortrag einige Bemerkungen über einen Fundamentalsatz der Flächentheorie und der Theorie der Differentialformen. Ein Teil des Vortrages folgt auf S. 63 unter dem Titel: Über den Beweis der Christoffelschen Kovarianz.

An der Diskussion beteiligen sich die Herren Hessenberg, Kneser, Knoblauch, Lampe, Reiſsner, Steinitz.

Über die Gleichung der geodätischen Linien.

Von Gerhard Hessenberg.

I.

1. Bei den Untersuchungen über quadratische Differentialformen stöſst man auf eine Operation, die sich treffend als *„kogrediente Differentiation“* bezeichnen läſst, weil sie aus einem Gröſsensystem, welches beim Übergang zu andern unabhängigen Variabeln linear transformiert wird, ein *kogredientes* System bildet, d. h. ein System, welches dieselbe lineare Transformation er-

leidet, wie das ursprüngliche. Dieses neue System $d'\xi_i$ $(i=1,\ldots,m)$ ist aus den Gröfsen ξ_i $(i=1,\ldots,m)$ des ursprünglichen und deren Differentialen linear zusammengesetzt, und zwar nach folgendem Schema:

$$(1) \qquad d'\xi_i = d\xi_i + \sum_\lambda q_{i\lambda}\xi_\lambda. \qquad (i,\lambda=1,\ldots,m)$$

Die Koeffizienten $q_{i\lambda}$ sind lineare Formen der Differentiale der unabhängigen Veränderlichen $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Sie sind für alle kogredienten Gröfsensysteme dieselben, aber verschieden für Systeme, die andere Transformationen erleiden.

2. *Kontragredient* nennt man zwei Systeme ξ und x, wenn das eine die inverse und transponierte Transformation des anderen erfährt. Unter dieser Voraussetzung ist $\sum_i \xi_i x_i$ eine Invariante, und umgekehrt folgt aus dieser Invarianz, sofern eines der Systeme linear und vom andern unabhängig ist, dafs es dem andern kontragredient ist. Sind ξ_i und η_k $(i=1,\ldots,m,\ k=1,\ldots,m')$ zwei linear unabhängige Systeme, so ist auch das System der mm' Gröfsen $\xi_i\eta_k$ linear unabhängig. Ist also $\sum_{i,k} a_{ik}\xi_i\eta_k$ eine bilineare Invariante, so sind die Gröfsen a_{ik} den $\xi_i\eta_k$ kontragredient, die Gröfsen $\sum_k a_{ik}\eta_k = z_i$ den ξ_i. Ist x_i zu ξ_i, y_k zu η_k kontragredient, so ist es auch $x_i y_k$ zu $\xi_i\eta_k$, weil $\sum_{i,k} x_i y_k \xi_i \eta_k$ als Produkt zweier Invarianten selbst invariant ist. Sind daher α_{ik} die Koeffizienten einer in x_i und y_k bilinearen Invariante, so sind sie den $\xi_i\eta_k$ kogredient und $\sum_{i,k} a_{ik}\alpha_{ik}$ ist invariant.

3. Besitzen die Ausdrücke (1) die Eigenschaft, für ein spezielles, linear unabhängiges System ξ^* diesem kogredient zu sein, so kommt ihnen diese Eigenschaft für jedes den ξ_i^* kogrediente System zu. Zugleich sind die Ausdrücke

$$(2) \qquad d'x_i = dx_i - \sum_\lambda q_{\lambda i} x_\lambda \qquad (i,\lambda=1,\ldots,m)$$

kogrediente Differentiale für jedes den ξ_i kontragrediente System.

Zum Beweis dieses Satzes überzeugen wir uns von der Identität

$$(3) \qquad d\sum \xi_i x_i = \sum d'\xi_i \cdot x_i + \sum \xi_i \cdot d'x_i.$$

In dieser ist nun die erste Summe invariant, die zweite ist es für unser spezielles System ξ^* nach Voraussetzung. Damit ist die dritte invariant, woraus die angegebene Eigenschaft der $d'x_i$ folgt. Aus dieser wieder folgt für *jedes* System ξ_i die Invarianz der dritten, also auch der zweiten Summe und damit der erste Teil unseres Satzes.

4. Existieren für ein weiteres System η_k kogrediente Differentiale mit Koeffizienten $\mathfrak{r}_{k\mu}$ $(k,\mu=1,\ldots,m')$, so sind die Systeme $\xi_i \cdot d'\eta_k$ und $d'\xi_i \cdot \eta_k$ dem System $\beta_{ik} = \xi_i\eta_k$ kogredient, also auch das System $d'\xi_i \cdot \eta_k + \xi_i \cdot d'\eta_k$, welches sich als

$$(4) \qquad d'\beta_{ik} = d\beta_{ik} + \sum_\lambda q_{i\lambda}\beta_{\lambda k} + \sum_\mu \mathfrak{r}_{k\mu}\beta_{i\mu} \qquad \binom{i,\lambda=1,\ldots,m}{k,\mu=1,\ldots,m'}$$

schreiben läfst. Da mit ξ und η auch β linear unabhängig ist, sind die

Ausdrücke (4) für *jedes* den $\xi_i \eta_k$ kogrediente System α_{ik} nach No. **3** kogrediente Differentiale und ebenso die Ausdrücke

$$(5) \qquad d'a_{ik} = da_{ik} - \sum_{\lambda} \mathfrak{q}_{\lambda i} a_{\lambda k} - \sum_{\mu} \mathfrak{r}_{\mu k} a_{i\mu}$$

für jedes den α_{ik} kontragrediente System a_{ik}, wobei, ebenfalls nach No. **3**:

$$(6) \qquad d\sum_{i,k} a_{ik}\alpha_{ik} = \sum_{i,k} d'a_{ik} \cdot \alpha_{ik} + \sum_{i,k} a_{ik} \cdot d'\alpha_{ik}.$$

Andererseits erkennt man durch Vergleich von (5) mit (4) und (2) mit (1)., dafs für das spezielle System $b_{ik} = x_i y_k$

$$(7) \qquad d'b_{ik} = d'x_i \cdot y_k + x_i \cdot d'y_k$$

werden wird.

5. Das *distributive Gesetz*, welches bisher galt, bestätigt sich auch für die in No. **2** gebrauchten Ausdrücke z_i, und zwar ohne explizites Ausrechnen der kogredienten Differentiale. Man hat blofs die Identität $\sum_{i,k} a_{ik}\xi_i\eta_k = \sum_i \xi_i z_i$ kogredient zu differentiieren. Die $d'\xi_i$ enthaltenden Glieder heben sich weg, und durch Vergleichung der Koeffizienten der ξ_i folgt

$$(8) \qquad d'z_i = \sum_k a_{ik} d'\eta_k + \sum_k d'a_{ik}\eta_k.$$

Wenn man festsetzt, dafs das Differential einer Invariante zugleich ihr kogredientes Differential ist, so befolgen auch die Gleichungen (3) und (6) das distributive Gesetz. Endlich ist für einen invarianten Ausdruck a irgend ein System ξ_i zu $a\xi_i$ kogredient, also $d'(a\xi_i)$ aus den $(a\xi_i)$ ebenso zu bilden, wie $d'\xi_i$ aus den ξ_i. Der allgemeine Ansatz (1) bestätigt wiederum das distributive Gesetz $d'(a\xi_i) = a\,d'\xi_i + \xi_i da$.

II.

6. Wenn n unabhängige Veränderliche $u_1, \ldots, u_n$ beliebig transformiert werden, so werden ihre Differentiale $du_1, \ldots, du_n$ linear transformiert. Gelingt es uns also, von diesen Differentialen kogrediente Differentiale zu bilden, so sind wir auf Grund der vorigen Entwicklungen imstande, für alle den du_i ko- und kontragrediente Systeme, sowie für die Koeffizienten aller invarianten algebraischen Formen dieser Systeme kogrediente Differentiale anzugeben.

Ist nun $\sum_{i,k} a_{ik} du_i du_k$ $(i, k = 1, \ldots, n,\ a_{ik} = a_{ik})$ eine bestimmte quadratische Form, $\sum_{i,k} a_{ik} d_1 u_i d_2 u_k$ (für zwei verschiedene Differentiationen d_1, d_2) ihre polare Kovariante, so erhält man für die $d_1 u_i$ kogrediente Differentiale, wenn man in (1) $\xi_i = d_1 u_i$, $\mathfrak{q}_{i\lambda} = \sum_{\mu} \left\{ {\lambda\mu \atop i} \right\} du_\mu$, also

$$d'd_1 u_i = dd_1 u_i + \sum_{\lambda\mu} \left\{ {\lambda\mu \atop i} \right\} d_1 u_\lambda du_\mu$$

setzt. Hierbei soll $\left\{ {\lambda\mu \atop i} \right\}$ der bekannte Christoffelsche, aus den Koeffizienten a_{ik} und ihren Ableitungen gebildete Ausdruck sein.

Zum Nachweise unserer Behauptung beachten wir, dafs erstens $d'a_{ik}=0$, zweitens (9) $d'd_1u_i=d'_1du_i$ wird, letzteres, weil die oberen Indices des Christoffelschen Ausdrucks vertauschbar sind. Damit wird

$$\tfrac{1}{2}\Big[d_1\sum_{i,k}a_{ik}d_2u_id_3u_k+d_2\sum_{i,k}a_{ik}d_1u_id_3u_k-d_3\sum_{i,k}a_{ik}d_1u_id_2u_k\Big]$$
$$=\sum_{i,k}a_{ik}d'_1d_2u_id_3u_k;$$

also ist die rechte Seite invariant, $d'_1d_2u_i$ mithin den du_i kogredient.

III.

7. Es möge auf Grund des vorstehenden die Gleichung der geodätischen Linien als Bedingung für das Verschwinden der ersten Variation des Integrals $\int\sqrt{\sum a_{ik}du_idu_k}=\int ds$ abgeleitet werden. Hierbei ist zu bemerken, dafs auf Grund von (3) die partielle Integration in der Form

$$\sum_i\int x_id'\xi_i=\sum_i\xi_ix_i-\sum_i\int\xi_id'x_i$$

angewandt werden darf.

Unter Beachtung von $d'a_{ik}=0$ ist

$$\delta(ds^2)=\delta\sum_{i,k}a_{ik}du_idu_k=2\sum_{i,k}a_{ik}\delta'du_idu_k,$$

also wegen (9)

$$\delta\int ds=\sum_i\int\frac{\sum_k a_{ik}du_k}{ds}\,d'\delta u_i=0.$$

Integriert man partiell und vernichtet die Grenzglieder durch Variation zwischen festen Grenzen, so kommt

$$\sum_i\int\delta u_i\cdot d'\sum_k a_{ik}\frac{du_k}{ds}=0.$$

Hierin müssen, nach dem bekannten Schlufs der Variationsrechnung, die Koeffizienten der Variationen einzeln verschwinden, was unter Beachtung von (8) und $d'a_{ik}=0$ ergiebt

$$d'\left(\frac{du_k}{ds}\right)=0.$$

Danach wird

$$d'du_k\cdot ds-d^2s\,du_k=0$$

oder nach Multiplikation mit ds

$$\sum_{\lambda,\mu}(a_{\lambda\mu}du_\lambda du_\mu d'du_k-a_{\lambda\mu}d'du_\lambda du_\mu du_k)=0.$$

Im Falle $n=2$, $u_1=u$, $u_2=v$ folgt daraus die bekannte Gleichung

$$d'du\cdot dv-d'dv\cdot du=0.$$

IV.

Das Rechnen mit kogredienten Differentialen vermeidet die langwierige Umrechnung der Ableitungen der a_{ik} in die Christoffelschen Ausdrücke. Ferner liefert es die Invarianten in einer Form, aus der die Invarianz auf *algebraischem* Wege erkannt werden kann. Dafs dadurch Vereinfachungen der Rechnung geschaffen werden können, habe ich in einer früheren Arbeit für das Biegungsproblem[1]) nachzuweisen versucht. Daselbst findet sich ein Beweis für die Kogredienz der $d'du_i$, der das Auftreten der Christoffelschen Ausdrücke in ungezwungener Weise erreicht.

Ein spezieller Teil der hier mitgeteilten Resultate ist von Christoffel[2]) angegeben worden, nämlich die Bildung einer kovarianten Form $(n+1)$ten Grades aus einer solchen $n$ten Grades der Differentiale du_i. Allgemeiner bekannt ist speziell die Christoffelsche Kovariante

$$\sum_{i,k}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_i \partial u_k} - \sum_{\lambda}\begin{Bmatrix} i\,k \\ \lambda \end{Bmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\lambda}\right] du_i du_k,$$

die sich in unserer Bezeichnungsweise als

$$\sum_i d'\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}\, du_i$$

darstellt. Von allen dem Verfasser bekannten Behandlungen des Gegenstandes unterscheidet sich die hier gegebene durch die prinzipielle Vermeidung des Nachrechnens irgend welcher Transformation der Variabeln.

Charlottenburg, im Mai 1902.

Graphische Zerlegung einer Kraft in sechs Komponenten mit vorgeschriebenen Wirkungslinien.

Von Rudolf Skutsch.

Ein räumliches Kräftesystem läfst sich im allgemeinen nicht auf eine einzige Resultante zurückführen, da eine solche nur fünf Bestimmungsstücke hat, also nicht sechs gegebene Gleichgewichtsbedingungen erfüllen kann. Bei Zurückführung des Systems auf zwei Kräfte können dagegen von deren zehn Bestimmungsstücken vier willkürlich angenommen werden, z. B. ein Punkt in der Wirkungslinie der einen Kraft und eine Ebene durch die der andern. Die Zusammensetzung des Kräftesystems zu einem „Kraftkreuz" dieser Art erfolgt einfach durch Zerlegung der einzelnen Kräfte in je zwei Komponenten, von denen die eine durch den festen Punkt geht, die andere in der festen Ebene liegt. Die ersteren haben eine Resultante durch den festen Punkt, die zweiten eine Resultante in der festen Ebene.

Mit der hier behandelten Aufgabe, eine Kraft durch ein System von

---

1) Über die Invarianten linearer und quadratischer binärer Differentialformen und ihre Anwendung auf die Deformation der Flächen. Acta math. **23.**

2) Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades. Journal f. Math. **70.**

sechs Kräften zu ersetzen, deren Wirkungslinien gegeben sind, ist zugleich die Zerlegung eines *Kräftesystems* nach sechs Richtungen erledigt: man braucht nur die einzelnen Kräfte des Systems nach den sechs Richtungen zu zerlegen und die in die einzelnen Wirkungslinien fallenden Komponenten zu addieren, oder man kann auch das System zunächst durch ein Kraftkreuz ersetzen, um die Zerlegung nach sechs Richtungen nur zweimal vornehmen zu müssen.

Die analytische Behandlung der Aufgabe führt auf sechs lineare Gleichungen für die sechs unbekannten Kräfte, bietet also keine Schwierigkeit. Graphische Lösungen haben aber von vornherein einen Vorsprung, wenn die Aufgabe graphisch gestellt ist, das heifst wenn die gegebenen Stücke in Projektionen gezeichnet vorliegen, wie dies in der Technik häufig zutrifft. So sind denn auch bereits mehrere gemischte oder rein zeichnerische Verfahren entstanden, die zunächst beschrieben werden sollen.

Das sogenannte Ersatzstabverfahren von Herrn Müller-Breslau beruht auf folgendem Gedankengang. Anstatt nach den sechs gegebenen Richtungen A_1 bis A_6 zerlegt man die gegebene Kraft A zunächst in sechs andere Komponenten, von denen drei in die Richtungen A_1, A_2, A_3 fallen, während die drei andern, die „Ersatzrichtungen", so gewählt werden, dafs die Zerlegung ohne weiteres erfolgen kann. Nach diesen sechs Richtungen zerlegt man nun aber auch die unbekannten Kräfte A_4, A_5, A_6 und bestimmt dieselben so, dafs die in die Ersatzrichtungen fallenden Komponenten von A, A_4, A_5, A_6 sich tilgen. Es bleibt hiernach für die Rechnung nur die Lösung von drei linearen Gleichungen mit drei Unbekannten A_4, A_5, A_6. Das Verfahren ist einfach und bereits praktisch bewährt.

Herr F. Kötter hat neuerdings in seinen Vorlesungen über Mechanik ein anderes geometrisches Verfahren zur Elimination von drei der unbekannten sechs Kräfte A_1 bis A_6 angegeben von der Art, dafs hier das Ergebnis der Elimination in einer Form erscheint, welche die völlige Durchführung der Aufgabe auf graphischem Wege ermöglicht. Herrn Kötters Verfahren ist mit einigen von mir herrührenden Abänderungen das folgende. Legt man durch die Wirkungslinien dreier Kräfte A_1, A_2 und A_3 drei beliebige Geraden B_1, B_2, B_3, so enthalten die Momentengleichungen inbezug auf die Achsen B_1, B_2, B_3 aufser der gegebenen Kraft A nur noch die drei Unbekannten A_4, A_5 und A_6. Aus diesen drei Gleichgewichtsbedingungen kann man in mannigfaltiger Weise drei andere ableiten, indem man die Kräfte A, A_4, A_5 und A_6 in je zwei Komponenten zerlegt, von denen die eine die betreffende Momentenachse schneidet. Die übrig bleibenden, „wirksamen" Komponenten kann man dabei in allen drei Fällen in den nämlichen vier beliebigen, die Wirkungslinie von A, A_4, A_5 bzw. A_6 schneidenden Geraden annehmen, die z. B. alle in einer Ebene liegen, allenfalls auch noch sich in einem Punkt schneiden. Da das Verhältnis der Kräfte A_4, A_5 und A_6 zu diesen „wirksamen" Komponenten leicht festgestellt ist, so erübrigt nur noch die graphisch ziemlich einfache Lösung der Aufgabe, drei Kräfte, deren Wirkungslinien in einer Ebene gegeben sind, so zu bestimmen, dafs sie, mit drei gegebenen Koeffizientensystemen multipliziert, auf drei gegebene Punkte gegebene Momentensummen haben. Bei diesem Verfahren wird leider die räumliche Konstruktion durch Häufung von Hilfslinien unübersichtlich.

Einheitliche, rein geometrische Konstruktionen im Anschlufs an Möbius' Statik gab zuerst Herr Henneberg. Die betreffenden Sätze von Möbius lauten:

Wenn vier Kräfte sich das Gleichgewicht halten, so sind ihre Wirkungslinien Erzeugende einer Schar eines Hyperboloids. Vier Kräfte halten sich das Gleichgewicht, wenn ihre Wirkungslinien Erzeugende einer Schar eines Hyperboloids sind und das Kräfteviereck sich schliefst.

Wenn fünf Kräfte sich das Gleichgewicht halten, so gehören ihre Erzeugenden einer linearen Kongruenz an.

Wenn sechs Kräfte sich das Gleichgewicht halten, so gehören ihre Erzeugenden einem linearen Komplex an.

Herr Henneberg stellt sich zunächst die Aufgabe, eine Kraft A nach vier Richtungen A_1, A_2, A_3, A_4 zu zerlegen, von denen drei vorgeschrieben sind und die vierte durch einen gegebenen Punkt P gehen soll. Er löst sie unter Einführung einer Geraden S, welche sowohl mit A, A_1, A_2 als mit A_2, A_3, P auf einem Hyperboloid liegt, und welche er durch eine sinnreiche lineare Konstruktion findet. Nach Bestimmung der Geraden S bedarf es nur zweier räumlichen Kräftevierecke, um zuerst A nach A_1, A_2 und S, darauf S nach A_2, A_3 und die durch P gehende A_4 zu zerlegen.

Auf die Lösung dieser Aufgabe baut sich die der folgenden: eine Kraft nach fünf Richtungen zu zerlegen, von denen vier, A_1, A_2, A_3, A_4, vorgeschrieben sind und die fünfte durch einen festen Punkt gehen soll. Herr Henneberg findet nach dem eben beschriebenen Verfahren eine bestimmte durch P gehende Richtung V der Kongruenz $AA_1A_2A_3$, eine zweite durch P gehende Richtung W der Kongruenz $A_1A_2A_3A_4$. Diese beiden Richtungen bestimmen einen ebenen Büschel, von dessen Strahlen jeder als Richtung für A_5 angenommen werden kann. Die Zerlegung für eine gegebene Richtung A_5 erfolgt, indem man A nach A_1, A_2, A_3 und V, V nach A_5 und W, W nach A_1, A_2, A_3 und A_4 zerlegt.

Über die Zerlegung nach sechs willkürlich gewählten Richtungen sagt Herr Henneberg nur: die Zerlegung läfst sich leicht auf dreimalige Zerlegung einer Kraft in fünf Komponenten zurückführen. Es läfst sich aber kaum verkennen, dafs diese Lösung einen ganz aufserordentlichen zeichnerischen Aufwand bedingt.

Herr W. Stäckel gab 1898 in der Zeitschrift für Mathematik und Physik eine elegantere Lösung. Er bedient sich von ihm sogenannter „Hilfskomponenten“, durch die sich einerseits die gegebene Kraft leicht ersetzen läfst, und die sich andererseits bequem nach den gegebenen Richtungen zerlegen lassen. Solche Hilfskomponenten erhält Herr Stäckel folgendermafsen. Er denkt die Kräfte A_1 bis A_6 in je zwei Komponenten zerlegt, von denen eine parallel der gegebenen Kraft A ist, die andere in eine feste Ebene, z. B. die horizontale Projektionsebene fällt. Es ist nun nicht schwer, Kräftesysteme mit den gegebenen sechs Wirkungslinien zu finden, deren Resultante parallel A ist; es ist dazu ja nur erforderlich, dafs sich die sechs Horizontalkomponenten aufheben. Mögen drei solche Systeme A_1' bis A_6', A_1'' bis A_6'', A_1''' bis A_6''', bzw. die Resultanten S', S'', S''' haben, deren Wirkungslinien, wie leicht zu bewirken, nicht in eine Ebene fallen, so können dieselben als Hilfskomponenten dienen. Ergiebt die

Zerlegung von A die Komponenten $\alpha S'$, $\beta S''$, $\gamma S'''$, so sind die gesuchten sechs Kräfte $A_1 = \alpha A_1' + \beta A_1'' + \gamma A_1'''$; $A_2 = \alpha A_2' + \beta A_2'' + \gamma A_2'''$ u. s. w.

Herr Stäckel zeigt ferner, dafs man ganz entsprechend eine Kraft A in vier Komponenten A_1, A_2, A_3, A_4 zerlegen kann, wobei natürlich, damit die Zerlegung überhaupt möglich ist, A der linearen Kongruenz $A_1 A_2 A_3 A_4$ angehören mufs. Soll z. B. A einer festen Geraden parallel sein, so denke man wieder A_1, A_2, A_3 und A_4 in je zwei Komponenten zerlegt, von denen die einen der festen Geraden parallel sind, die andern in die Horizontalebene fallen. Bestimmt man nun die letzteren vier so, dafs sie sich tilgen und setzt die ersteren vier zu einer Resultante zusammen, so hat man in einfachster Weise gleichzeitig die gesuchte fünfte Gerade der Kongruenz und das zum Gleichgewicht erforderliche Gröfsenverhältnis gefunden. Soll A durch einen festen Punkt im Endlichen gehen, so erfolgt die Zerlegung der A_1, A_2, A_3 und A_4 in je zwei Komponenten, von denen die eine durch den festen Punkt geht, die andere in der Horizontalebene liegt. Herrn Stäckels Verfahren läfst sich auch dualistisch umkehren, wenn A in einer gegebenen Ebene liegen soll. Man zerlegt dann die A_1, A_2, A_3 und A_4 in je zwei Komponenten, deren eine in der gegebenen Ebene liegt, während die andere durch einen festen Punkt geht, und bestimmt die Kraftgröfsen so, dafs die *letzteren* vier Komponenten sich tilgen.

Gerade diese Zerlegungen in vier Komponenten kann man nun benutzen, um die Zerlegung in sechs Komponenten gegenüber Herrn Stäckels Konstruktion noch bedeutend zu vereinfachen. Sei eine Kraft A in sechs Komponenten A_1 bis A_6 zu zerlegen, so bestimme man die drei zu A parallelen oder die drei in einer willkürlich durch A gelegten Ebene befindlichen Kräfte S', S'' und S''', deren Wirkungslinien bzw. den Kongruenzen $A_1 A_2 A_3 A_4$, $A_1 A_2 A_5 A_6$ und $A_3 A_4 A_5 A_6$ angehören, und welche sich demzufolge durch je vier Komponenten A_1', A_2', A_3', A_4' bzw. A_1'', A_2'', A_5'', A_6'' bzw. A_3''', A_4''', A_5''', A_6''' ersetzen lassen. Ergiebt nun die Zerlegung von A nach den Richtungen von S', S'' und S''' die Komponenten $\alpha S'$, $\beta S''$ und $\gamma S'''$, so sind die gesuchten sechs Komponenten mit vorgeschriebenen Wirkungslinien

$$A_1 = \alpha A_1' + \beta A_1''; \; A_2 = \alpha A_2' + \beta A_2''; \; A_3 = \alpha A_3' + \gamma A_3'''; \; A_4 = \alpha A_4' + \gamma A_4''';$$
$$A_5 = \beta A_5'' + \gamma A_5'''; \; A_6 = \beta A_6'' + \gamma A_6'''.$$

Was die Genauigkeit der graphischen Verfahren anbetrifft, so ist sie im allgemeinen befriedigend, kann aber durch spitze Schnitte im einzelnen Fall sehr beeinträchtigt werden; jedenfalls bleibt sie hinter derjenigen der inversen Operation, der Kräftezusammensetzung, zurück. Eben dieser Umstand ermöglicht aber eine nachträgliche Verbesserung der Ergebnisse. Man braucht nur die ermittelten Kräfte A_1 bis A_6 umzukehren und mit A zu einem Kraftkreuz zusammenzusetzen, so giebt die Zerlegung dieses Kraftkreuzes nach den gegebenen sechs Richtungen die gesuchten sechs Korrekturen.

Über den Beweis der Christoffelschen Kovarianz.

Von J. Knoblauch.

Im 70. Bande des Journals für Mathematik (1869), S. 47—49, hat Christoffel ein System von Formeln aufgestellt, die heute allgemein bekannt sind und deren Wichtigkeit für die Theorie der Differentialformen von keiner Seite bezweifelt wird. Bedeutet

$$\sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa\lambda}\, du_\varkappa\, du_\lambda = \mathsf{A} \qquad (a_{\lambda\varkappa} = a_{\varkappa\lambda})$$

eine quadratische Differentialform, deren Determinante nicht identisch Null ist, und wird diese Differentialform beim Übergange von den n unabhängigen Variablen $u_1, \ldots, u_n$ zu einem neuen Variablensystem dieser Art, $u_1', \ldots, u_n'$, in

$$\sum_{\mu,\nu} a_{\mu\nu}'\, du_\mu''\, du_\nu' = \mathsf{A}' \qquad (a_{\nu\mu}' = a_{\mu\nu}')$$

transformirt, sodaſs vermöge der Beziehungen zwischen den beiden Systemen die Gleichung

$$\mathsf{A} = \mathsf{A}' \tag{1}$$

besteht, so geben die Christoffelschen Relationen eine Darstellung der zweiten partiellen Ableitungen von $u_1, \ldots, u_n$ nach $u_1', \ldots, u_n'$ durch die ersten Differentialquotienten, wobei als Koeffizienten gewisse Verbindungen aus den Gröſsen $a_{\varkappa\lambda}$ und ihren ersten Ableitungen, sowie die aus den Gröſsen $a_{\mu\nu}'$ entsprechend gebildeten Ausdrücke auftreten. Die wahre Bedeutung dieser Relationen besteht in Folgendem: Wird zu der Form A eine beliebige Funktion $\varphi(u_1, \ldots, u_n)$ hinzugenommen, die nur den Bedingungen der Differentiierbarkeit, soweit wie sie gebraucht werden, genügen muſs, sodaſs beim Übergange von $u_1, \ldots, u_n$ zu $u_1', \ldots, u_n'$ Gleichungen der Form

$$\varphi(u_1, \ldots, u_n) = \bar{\varphi}(u_1', \ldots, u_n'), \tag{2}$$

$$d\varphi = d\bar{\varphi}, \tag{3}$$

$$d^2\varphi = d^2\bar{\varphi}, \tag{4}$$

. . . .

bestehen, so läſst sich mittels dieser Funktion und unter Benutzung der Christoffelschen Gleichungen eine quadratische Differentialform

$$\sum_{\varkappa,\lambda} \varphi_{\varkappa\lambda}\, du_\varkappa\, du_\lambda = \Phi$$

bilden, die zu A kovariant ist, also für

$$\sum_{\mu,\nu} \varphi_{\mu\nu}'\, du_\mu'\, du_\nu' = \Phi'$$

der Gleichung

$$\Phi = \Phi' \tag{5}$$

genügt. Dabei bezeichnet $\varphi_{\varkappa\lambda}$ eine gewisse homogene lineare Funktion der Ableitung $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_\varkappa \partial u_\lambda}$ und der n partiellen Ableitungen erster Ordnung

$\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_n}$, eine Funktion, deren Koeffizienten die oben erwähnten Christoffelschen Verbindungen sind, während $\varphi'_{\varkappa\lambda}$ den aus den Ableitungen von $\bar{\varphi}(u'_1, \ldots, u'_n)$ und den Koeffizienten von A' in gleicher Weise gebildeten Ausdruck bedeutet. Ich bezeichne Φ als die Christoffelsche Kovariante der Form A, und demnach die Thatsache, daſs der Form Φ die Kovarianteneigenschaft zukommt, kurz als die Christoffelsche Kovarianz. Darauf, daſs die Gröſsen $\varphi_{\varkappa\lambda}$ überall, wo gleichzeitig mit einer Funktion φ eine quadratische Differentialform A vorkommt, an Stelle der Ableitungen $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_\varkappa \partial u_\lambda}$ anzuwenden sind, wenn nicht die Übersicht über die Formeln verloren gehen soll, scheint zuerst Ricci, dem die Theorie der zu einer Differentialform kovarianten Differentiationen so viel verdankt, ausdrücklich hingewiesen zu haben.

Bei der fundamentalen Bedeutung, die der Christoffelschen Kovarianz in der Theorie der Differentialformen, für $n = 2$ in der Theorie der Biegung der Flächen zukommt, ist es auffallend, daſs ein einfacher Beweis dieses Satzes, der die Gleichung (5) lediglich als Folge der Gleichungen (1) bis (4) erscheinen läſst, bisher nicht gegeben worden ist. Wenigstens wird in den mir bekannten Arbeiten über diesen Gegenstand, namentlich auch in Riccis Teoria delle superficie (1898) und in dem vor wenigen Wochen erschienenen ersten Bande der zweiten Auflage von Bianchis Geometria differenziale immer zugleich mit der Gleichung (1) auch das in ihr enthaltene und dem Inhalte nach mit ihr identische System von Transformationsgleichungen zwischen den Gröſsen $a_{\varkappa\lambda}$ und $a'_{\mu\nu}$ in Betracht gezogen; ein Mangel an Einheitlichkeit in der Behandlungsweise, der auch an anderen Stellen der Theorie der Differentialformen auffällt. Den Anforderungen, die man an einen Beweis der Gleichung (5) zu stellen hat, habe ich für $n = 2$ im 111. Bande des Journals f. Math., S. 280—282, durch Aufstellung einer Identität zu genügen gesucht, die die Form Φ mit bekannten Kovarianten der quadratischen Differentialform A und der linearen Differentialform $d\varphi$ verknüpft. Allein abgesehen davon, daſs die Herleitung dieser Identität nicht einfach genug erscheint, kann man gegen sie auch den Einwand erheben, daſs die Gröſsen $\varphi_{\varkappa\lambda}$ von vornherein eingeführt werden, anstatt im Laufe der Untersuchung von selbst aufzutreten. Ich hatte damals nicht bemerkt, daſs man den von Christoffel für seine Formeln gegebenen Beweis unter Festhaltung der Hauptpunkte des Gedankenganges so umwandeln kann, daſs er auch die Kovarianz der Form Φ liefert.

Es sei $\delta u_1, \ldots, \delta u_n$ ein den Differentialen $du_1, \ldots, du_n$ kogredientes, im übrigen beliebiges System unendlich kleiner Gröſsen. Dann besteht, wenn man

$$\sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa\lambda}\, du_\varkappa\, \delta u_\lambda = \mathfrak{A}$$

setzt, gleichzeitig mit (1) die Gleichung zwischen bilinearen Differentialformen

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'. \tag{6}$$

Die kleinen Buchstaben des griechischen Alphabets bezeichnen, soweit sie als Indices gesetzt werden, hier wie auch schon vorher Zahlen aus der Reihe $1, \ldots, n$; bei der Summation durchlaufen sie alle diese Werte.

Nun empfiehlt es sich in der Formentheorie stets, die Gleichung zwischen einer Form und der aus ihr durch Transformation hervorgehenden unter der Gestalt

$$\sum_{\nu} x_\nu \xi_\nu = \sum_{\nu} x'_\nu \xi'_\nu \tag{7}$$

zu betrachten, die die beiden Gröſsensysteme $x_1, \ldots, x_n$ und $\xi_1, \ldots, \xi_n$ unter der Voraussetzung ihrer Unabhängigkeit als einander kontragredient kennzeichnet. Im vorliegenden Falle sind auf Grund von (6) die Ausdrücke

$$\sum_{\lambda} a_{\varkappa\lambda}\, \delta u_\lambda = x_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, \ldots, n) \tag{8}$$

den Differentialen $du_\varkappa = \xi_\varkappa$ $(\varkappa = 1, \ldots, n)$ kontragredient, und zwar kann man unter $x_1, \ldots, x_n$ ein beliebiges Gröſsensystem dieser Art verstehen. Die Beschränkung auf unendlich kleine Gröſsen ist nur erforderlich, insofern man gewisse Folgerungen aus den Gleichungen (1) und (6) in einfacher Weise darstellen will.

Es gelten nämlich dann gleichzeitig mit diesen die Gleichungen

$$\delta \mathsf{A} = \delta \mathsf{A}', \tag{9}$$

$$d\mathfrak{A} = d\mathfrak{A}', \tag{10}$$

aus denen

$$d\mathfrak{A} - \tfrac{1}{2}\,\delta \mathsf{A} = d\mathfrak{A}' - \tfrac{1}{2}\,\delta \mathsf{A}'$$

folgt. Dabei hat man

$$d\mathfrak{A} - \tfrac{1}{2}\,\delta \mathsf{A} = \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa\lambda}\, d^2u_\varkappa\, \delta u_\lambda + \sum_{\varkappa,\lambda} d a_{\varkappa\lambda}\, du_\varkappa\, \delta u_\lambda - \tfrac{1}{2} \sum_{\varkappa,\lambda} \delta a_{\varkappa\lambda}\, du_\varkappa\, du_\lambda. \tag{11}$$

Der Koeffizient von $d^2u_\varkappa$ in der ersten Summe ist nach der bereits eingeführten Bezeichnung gleich $x_\varkappa$, und es mögen $x_1, \ldots, x_n$ statt $\delta u_1, \ldots, \delta u_n$ auch in die zweite und dritte Summe eingeführt werden. Wird die Determinante $|a_{\varkappa\lambda}|$ mit a, die hierin zu dem Elemente $a_{\varkappa\lambda}$ gehörige Unterdeterminante, durch a dividiert, mit $\alpha_{\varkappa\lambda}$ bezeichnet, so folgt aus (8)

$$\delta u_\lambda = \sum_{\varkappa} \alpha_{\varkappa\lambda}\, x_\varkappa,$$

mithin wird

$$\sum_{\varkappa,\lambda} d a_{\varkappa\lambda}\, du_\varkappa\, \delta u_\lambda = \sum_{\varkappa,\lambda,\mu,\nu} \alpha_{\nu\lambda} \frac{\partial a_{\varkappa\lambda}}{\partial u_\mu}\, x_\nu\, du_\varkappa\, du_\mu.$$

Der Wert des Koeffizienten von x_ν,

$$\sum_{\varkappa,\lambda,\mu} \alpha_{\nu\lambda} \frac{\partial a_{\varkappa\lambda}}{\partial u_\mu}\, du_\varkappa\, du_\mu,$$

erscheint in übersichtlicherer Form, wenn man den ihm gleichen

$$\sum_{\varkappa,\lambda,\mu} \alpha_{\nu\lambda} \frac{\partial a_{\mu\lambda}}{\partial u_\varkappa}\, du_\varkappa\, du_\mu$$

hinzuaddiert und dann durch 2 dividiert. Der in Rede stehende Ausdruck wird hierbei gleich

$$\tfrac{1}{2} \sum_{\varkappa,\lambda,\mu,\nu} \alpha_{\nu\lambda} \left(\frac{\partial a_{\varkappa\lambda}}{\partial u_\mu} + \frac{\partial a_{\mu\lambda}}{\partial u_\varkappa} \right) x_\nu\, du_\varkappa\, du_\mu.$$

Für den dritten Teil der rechten Seite der Gleichung (11) ergiebt sich

$$-\tfrac{1}{2}\sum_{\varkappa,\lambda}\delta a_{\varkappa\lambda}\,du_\varkappa\,du_\lambda = -\tfrac{1}{2}\sum_{\varkappa,\lambda,\mu}\frac{\partial a_{\varkappa\lambda}}{\partial u_\mu}du_\varkappa\,du_\lambda\,\delta u_\mu$$

$$= -\tfrac{1}{2}\sum_{\varkappa,\lambda,\mu,\nu}\alpha_{\nu\mu}\frac{\partial a_{\varkappa\lambda}}{\partial u_\mu}x_\nu\,du_\varkappa\,du_\lambda$$

$$= -\tfrac{1}{2}\sum_{\varkappa,\lambda,\mu,\nu}\alpha_{\nu\lambda}\frac{\partial a_{\varkappa\mu}}{\partial u_\lambda}x_\nu\,du_\varkappa\,du_\mu,$$

mithin wird, wenn man nach Christoffel

$$\tfrac{1}{2}\sum_{\lambda}\alpha_{\nu\lambda}\left(\frac{\partial a_{\varkappa\lambda}}{\partial u_\mu}+\frac{\partial a_{\mu\lambda}}{\partial u_\varkappa}-\frac{\partial a_{\varkappa\mu}}{\partial u_\lambda}\right)=\begin{Bmatrix}\varkappa\mu\\ \nu\end{Bmatrix} \tag{12}$$

setzt,

$$d\mathfrak{A}-\tfrac{1}{2}\delta\mathsf{A}=\sum_\nu x_\nu\left(d^2u_\nu+\sum_{\varkappa,\mu}\begin{Bmatrix}\varkappa\mu\\ \nu\end{Bmatrix}du_\varkappa\,du_\mu\right). \tag{13}$$

Da die linke Seite zu A kovariant ist, so ist es auch die rechte.

Man setze nun z. B.

$$x_\nu=\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial u_\nu},\qquad x'_\nu=\sigma\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial u'_\nu},\qquad (\nu=1,\ldots,n)$$

wo σ eine unendlich kleine, von den sonst in der Rechnung vorkommenden unabhängige Gröſse bedeutet. Dies ist nach der oben gemachten Bemerkung und auf Grund der Kontragredienz der Ableitungen $\frac{\partial\varphi}{\partial u_1},\ldots,\frac{\partial\varphi}{\partial u_n}$ gegen die Differentiale $du_1,\ldots,du_n$ (nach Gleichung (3) in Verbindung mit (7)) gestattet. Auf diese Weise erhält man

$$\begin{aligned}&\sum_\nu\frac{\partial\varphi}{\partial u_\nu}\left(d^2u_\nu+\sum_{\varkappa,\mu}\begin{Bmatrix}\varkappa\mu\\ \nu\end{Bmatrix}du_\varkappa du_\mu\right)\\ &=\sum_\nu\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial u'_\nu}\left(d^2u'_\nu+\sum_{\varkappa,\mu}\begin{Bmatrix}\varkappa\mu\\ \nu\end{Bmatrix}'du'_\varkappa du'_\mu\right),\end{aligned} \tag{14}$$

wo die Zeichen $\begin{Bmatrix}\varkappa\mu\\ \nu\end{Bmatrix}'$ keiner Erläuterung bedürfen. Endlich können die zweiten Differentiale mittels der Gleichung (4), nachdem man

$$d^2\varphi=\sum_\nu\frac{\partial\varphi}{\partial u_\nu}d^2u_\nu+\sum_{\varkappa,\mu}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_\varkappa\partial u_\mu}du_\varkappa du_\mu$$

gesetzt hat, entfernt werden. Nach Einführung der Bezeichnungen

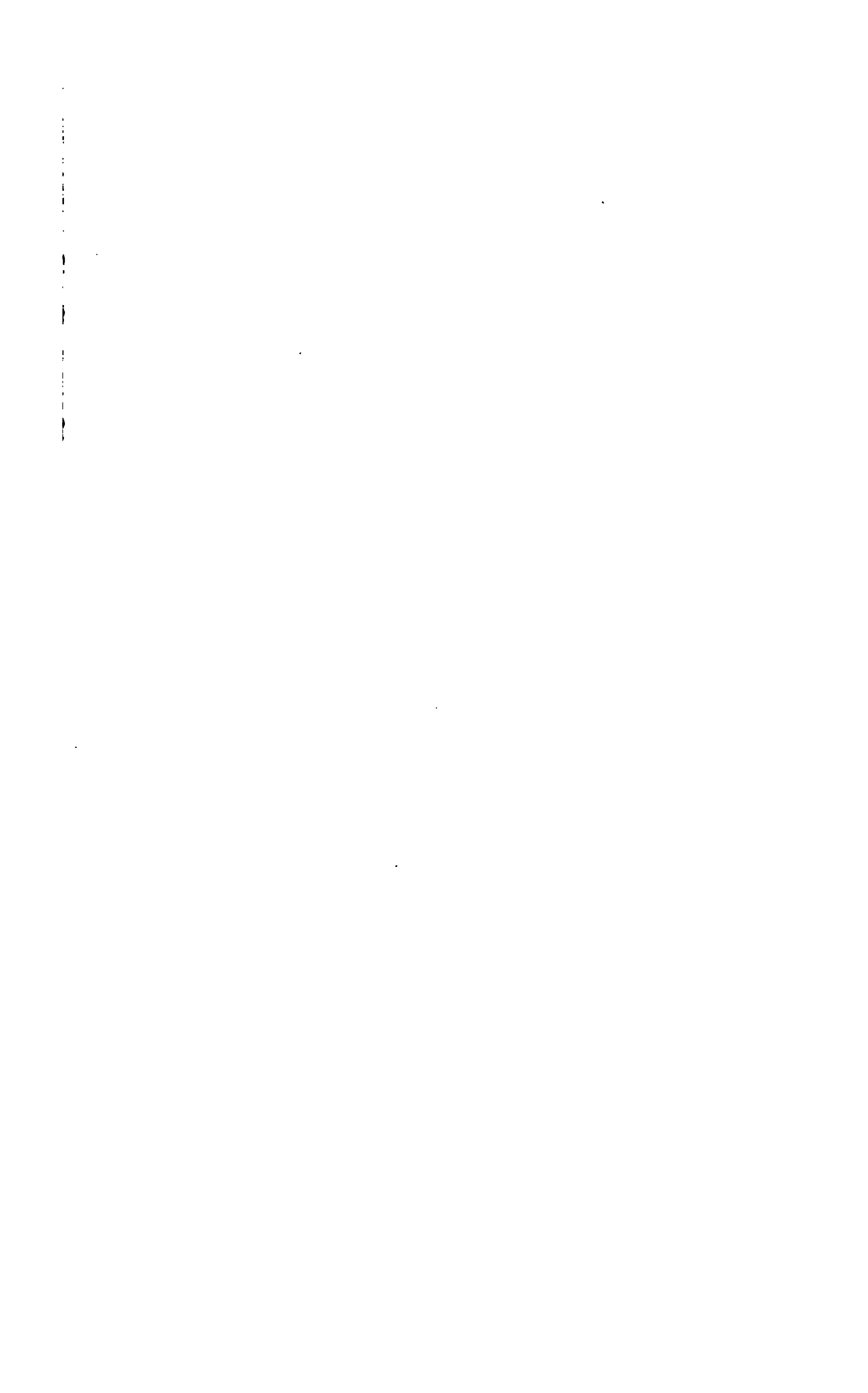
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_\varkappa\partial u_\mu}-\sum_\nu\begin{Bmatrix}\varkappa\mu\\ \nu\end{Bmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\nu}=\varphi_{\varkappa\mu}, \tag{15}$$

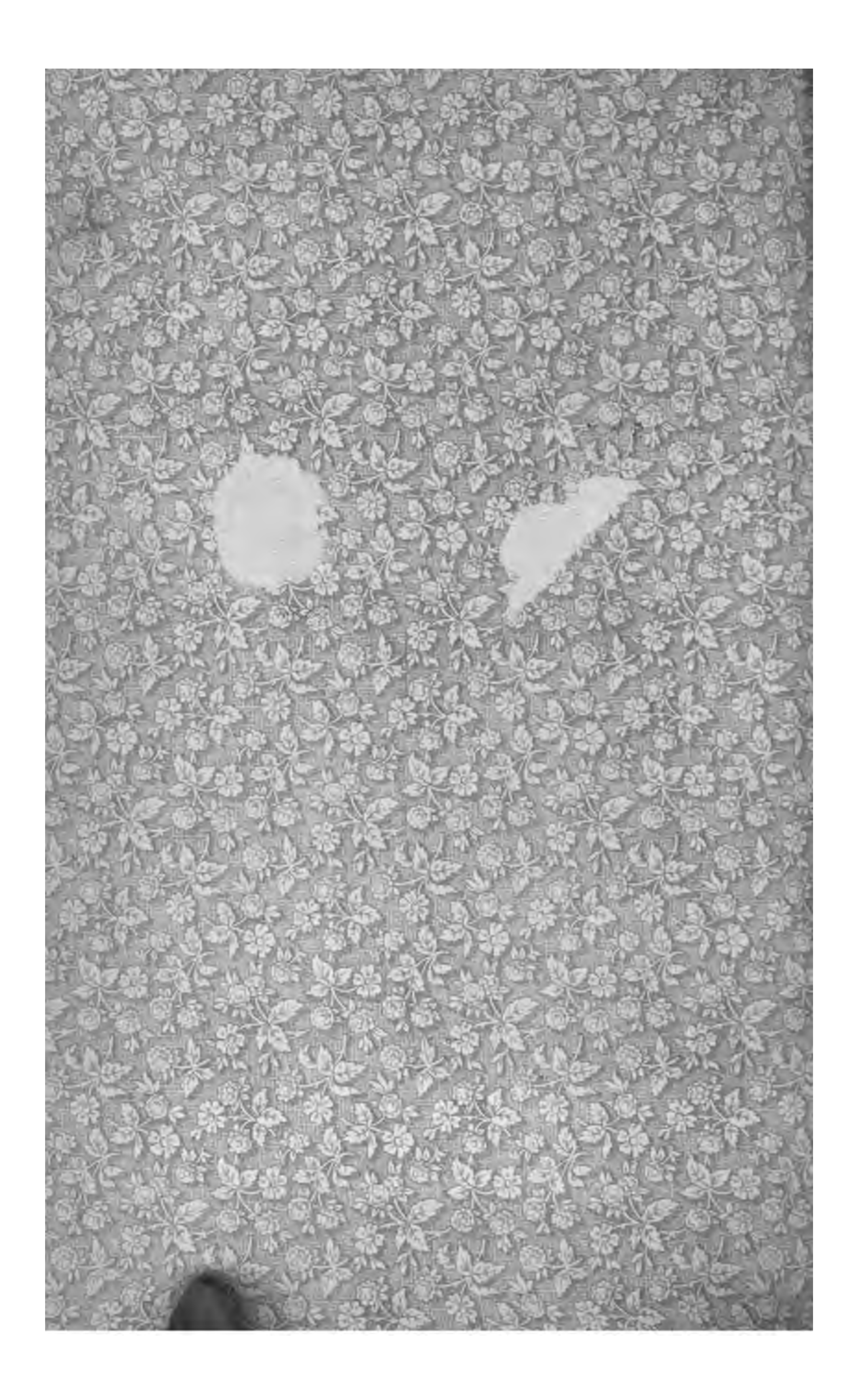
$$\sum_{\varkappa,\mu}\varphi_{\varkappa\mu}\,du_\varkappa\,du_\mu=\Phi \tag{16}$$

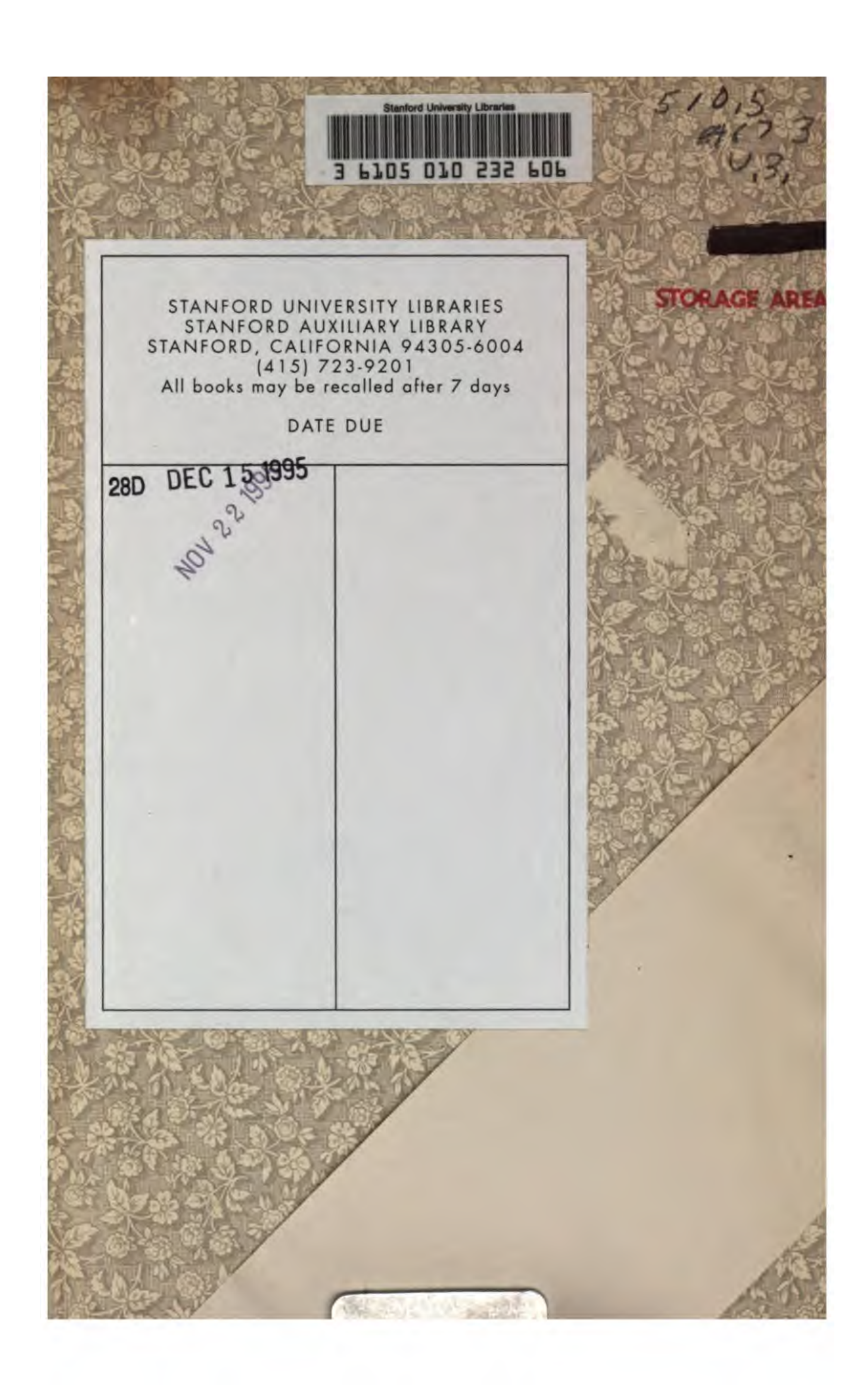
ergiebt sich dann die Gleichung (5), also die Christoffelsche Kovarianz.

In welcher Form Φ selbst, und zwar mittels $\delta\mathsf{A}$ allein, dargestellt werden kann, ist aus der vorangehenden Entwickelung leicht ersichtlich.








Stanford University Libraries
3 6105 010 232 606
510.5
A673
v.3.
STORAGE AREA
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD AUXILIARY LIBRARY
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004
(415) 723-9201
All books may be recalled after 7 days
DATE DUE
28D DEC 15 1995
NOV 22

